

文化脈絡中的數學 期末報告 - 《脈絡》

100502531 林岳霖 資工 1

學期開始，介紹 **Escher** 這位藝術家。談到作品中有三大特色：「其一是『Image Impossible』，代表作品《Waterfall》。後來無聊在網路上找到這個《[Waterfall](#)》，影片是『正確但是不可能』，很有趣喔。其二是『特殊的變型或週期性』。其三是『漸變(Morphing)』。」因此有介紹到一系列的畫作，其中有類似這樣的圖。右邊這張也是 **Escher** 的作品，起初以為只是具有著 **Escher** 特色二和特色三的正常畫作而已。但是在期中考的前一周，處於極度渙散的某人，剛好看了 **Margaret Wertheim** 的演講—《**The beautiful math of coral**》，才發現這張圖片的不簡單。



演講的主題是：「數學家發明的鉤針技術重建珊瑚礁生物，以頌揚珊瑚礁的神奇，並深入探討以雙曲幾何為基礎的珊瑚創作。」內容基本上都是從比較平易近人的角度切入。從雪花、碎形、葉片上的圖案—這些美景存在於**自然和物理**，**美學和數學**的交叉路口。**Margaret Wertheim** 成立的塑形研究所，推動科學概念的審美觀，從雪花和碎形這些自然物體，到人類建構物，如伊斯蘭馬賽克、繩索圖形和編織。

而塑形研究所的最新計劃可能是難以理解的奇怪—完全由鉤針編織建造出珊瑚礁。這個計畫利用了由珊瑚礁生物完美形塑的數學現象模型，以及如鉤針編織這樣的重複任務間美好的一致性—但得到的結果卻也**完全符合雙曲空間模型**。我們很容易沉迷於這個萬花筒般，毛線形塑的珊瑚礁之美，但這個珊瑚礁計畫有雙重目的：「引起大眾對世界各地珊瑚礁危機的注意，它們因為海洋鹽水水面變化、過度捕撈、和無數的威脅而死亡；另外也展示出一個之前幾乎不可能圖示出的數學性質。藉由形塑這些物理空間中的複雜方程式，這種技術可以幫助數學家看到圖形模式和有所突破。」



裡面的觀點確實是很有趣。藉由鉤針編織，編織不同種類的數學定理。而珊瑚的鉤針編織；這**雙曲空間**的發現開創了數學領域，就是所謂的非歐幾里德幾何；這實際上屬於數學領域中廣義相對論的基礎。事實上，它向我們顯示關於宇宙的形狀。因此，這就是鉤針編織—女性工藝品銜接於，歐幾里德和廣義相對論間的直接關聯。

而雙曲空間—非歐幾里德幾何和廣義相對論又和 **Escher** 有什麼關聯呢？

Escher 的上幅圖〈上圖〉其實呈現得是雙曲空間。每條魚的大小事實上是一樣的，同時圓周邊界是在距圓盤中心無窮遠的地方。上圖是真實雙曲空間的投影，為了將無窮大的空間放進有限的圓圈中內，把遠處的魚壓縮了。而如果不這樣壓縮，這個雙曲空間將彎曲的很厲害。其中每一個小區域〈如右圖〉會略像有皺摺的馬鞍形狀。



非歐幾里德幾何和歐幾里德幾何和我們這堂文明脈絡的數學可都是息息相關的。在第六講的時候有詳細介紹到歐幾里德這個人、及他的著作。在第三講「手絹中的宇宙」，有稍微介紹**拓撲(topology)**、**莫比烏斯帶(Möbius strip)**、**克萊因瓶(Klein bottle)**。

而有了以上幾點得相關知識，又令人不得不聯想到—**流形(Manifold)**，是局部具有歐幾里德空間性質的空間。流形可以視為近看起來象歐幾里德空間或其他相對簡單的空間的物體。例如，人們曾經以為地球是平坦的，因為我們相對於地球很小，這是一個可以理解的假象。所以，一個理想的數學上的球足夠小的區域也像一個平面，這使它成為一個流形。但是球和平面有很不相同的整體結構：如果你在球面上沿一個固定方向走，你最終回到起點，而在一個平面上，你可以一直走下去。流形可以是一個抽象空間。流形的技術使得我們能夠獨立考慮這些對象。從某種意義上來說，我們可以有一個不依賴於任何其他空間的球。

有很多不同種類的流形。最簡單的是**拓撲流形**，它們局部看來像歐幾里德空間。其他的變種包含了它們在使用中所需要的額外的結構。例如，一個**微分流形**不僅支持拓撲，而且要支持微積分。黎曼流形的思想導致了廣義相對論的數學基礎，使得人們能夠用曲率來描述時空。

然而我們考慮一個**拓撲流形**，通常考慮三個例子：(1) **莫比烏斯帶**，它是有邊界的流形。(2) **克萊因瓶**，它在三維空間必須自交。以及(3)**實射影平面**，它很自然的出現在幾何學中。

後記：

這堂文明脈絡的數學，讓我學習到關於數學脈絡的知識，明白自然和物理、數學和美學環環相扣的一面，以及彼此深深相依的那種感動。所以報告內容可能較為繁雜，但是希望藉由這篇報告將我這學期，學習的脈絡清楚展現。是一份報告，也是對自己一個交代。

參考資料：[OOPS](#)、[Margaret Wertheim 的英語網上資料](#)、[科學人](#)、[維基](#)