

## 艾雪和他的創作（上、下）

單維彰·99 年 12 月 21 日

去年此時，在科學月刊慶祝四十周年的開幕會上，展示了一幅用四十年科學月刊的封面製作的大型海報。在四百多格的小畫面中，民國 85 年 6 月（第 318 期）的那一格像飛梭似地躍出平面，跳到我的面前。那一期的封面，簡潔地放了艾雪（M. C. Escher）命名為極限圓盤 4 號（Circle Limit IV, 1960）的木刻版畫。選這幅畫當作封面的原因，看來是呼應蔡聰明教授在當期發表的文章〈圓與  $\pi$ 〉，但是也顯然受到「化學界的畢卡索」來台訪問的潛在性啓發：當期的焦點報導是〈羅德霍夫曼教授〉，他是 1981 年諾貝爾化學獎得主，也是位詩人和畫家。



這一幅由黑蝙蝠和白天使交錯環繞而成的極限圓盤，呈現了「天圓地方」而「陰陽交替」的宇宙意象。在技術上，艾雪運用了兩次投影：他先在平面上鋪滿了無窮多個一樣大小的黑蝙蝠和白天使，將平面映射到一個半球上（想像在平面上方懸掛一只半球形的鏡面），再將球面上的圖像正射影成平面上的版畫。

艾雪真的是用上述數學程序「算」出他的版畫嗎？我相信不是的；他是藝術家，不是電腦工程師。那麼，是數學的投影知識「啓發」了他的創作嗎？我也猜想不是的；倒不如說，他經由繪圖的進路認識了數學的結構。在艾雪那獨特的天分中，數學和圖畫，成為藝術的一體之兩面。

艾雪生於 1898 年 6 月 17 日，卒於 1972 年 3 月 27 日—剛好就在本欄作者過十歲生日的那一天；除了青年時期的 19 年壯遊以外，他的一生都在荷蘭度過。艾雪通常被認為是一位藝術家或畫家，而事實上他的第一次個人畫展，是數學家為他舉辦的；那時候的主要賓客也都是數學家。直到現在，還是有數學界的人把他歸類為數學家，也繼續有人在數學界的學術研討會上討論他的創作。至少，在網路上找到的最完整的艾雪傳記，也是數學界為他寫的 [1]，而且將他歸類為數學家。這樣說應該不至於太過分：如果不是數學界發現了他、推崇他、宣揚他，他那些獨特而難以理解的創作，很可能就像梵谷的作品一樣，必須等到過世之後才會被人肯定。

就學歷而言，艾雪連一張正式的大專文憑都沒有，而且他的中學成績很差，幾乎所有科目都當掉了，所以不能讀大學。他的父親是一位土木工程師，把他送去建築與室內設計專科學校，希望他成為一名建築師。他在第一所學校也是差不多能當的都當了，轉到第二所學校之後遇到恩師，發現他的繪圖天份，建議他改學藝術而不是建築。他只考慮了一個星期就決定通知父親說他要改行了，從此跟著老師學木刻和版畫。

既然如此，他為什麼受數學界推崇？因為他憑著直覺重新發現了數學的種種結構。他甚至還真的讀過一些頂尖數學家的最新論文，雖然他自稱看不懂，但是他其實已經領悟其中的微妙結構，並且將其精髓用版畫形式呈現出來了。雖然他的呈現方式不是方程式，也不是定理和證明，而是圖畫，但是有數學家認為，他的作品在精神和意義上『就是數學沒錯』。

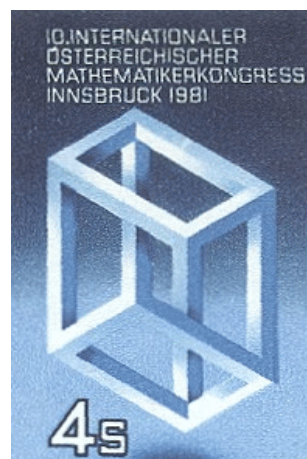
如果只選一張作品來代表艾雪，想必是自轉水車 (Waterfall, 1961) 吧。這幅版畫描繪一座荷蘭常見的水車，他嚴謹地應用了透視原理，卻以逆向的邏輯推理突破了現實的透視，造就這一幅『正確但不可能』的圖畫。在藝術領域，這種形式的創作稱為「錯視藝術」或「錯覺藝術」。就數學來說，就是邏輯的遊戲。邏輯常被視為數學的一部分，其實並非如此。利用透視的「反」技巧與邏輯的「反」推理，艾雪創造了一系列的錯覺藝術。

數學家是多麼地喜愛艾雪的錯覺藝術：他利用透視矛盾創造出視覺上可喜的矛盾藝術，就如同數學家利用邏輯矛盾創造出理性上可喜的定理（例如『二的平方根不是有理數』）。以至於 1981 年在奧地利因斯布魯克 (Innsbruck) 舉行的國際數學大會，仿艾雪的技法設計了一個簡潔俐落的不可可能立方當作大會的標誌。

艾雪在「數學」上達到頂峰的作品，應屬畫廊 (Print Gallery)，完成於 1956 年。這一幅版畫有兩方面的意義 在內容方面，這是他為自己舉辦的「回顧展」，畫廊內的畫作，除了「這一幅」以外，全是他自己的舊作；而「這一幅」也在畫廊裡，就是圖中年輕人正在看的那一幅（我感覺那個年輕人是艾雪的少年版自畫像）。在數學方面，他希望這幅畫具有「尺度的週期性」：當畫面逐漸放大到原本的尺度，則一切重複。

我們經常有機會經歷尺度的週期性。只要站在互相平行的兩面鏡子中間，就會看到無窮循環的尺度週期性；例如，當電梯的兩側都是鏡面，我們就會看到無窮循環的影像。所以，生活於 20 世紀的艾雪和其他藝術家，早就熟悉了這種週期性，也曾經有別人用它來創作視覺藝術品。艾雪並不滿足於單純的直線型尺度週期性，他為這幅作品增加了一個「機關」，就好像數學老師經常喜歡在考題中增加一些「機關」那樣。艾雪設想畫廊這幅畫要一邊旋轉、一邊放大，使得畫面在旋轉了「一圈」之後，恰好重複原來那一幅畫。

但是，艾雪畢竟全憑直覺，而且藝術家志在創作而不在精確，所以他幾乎正確地繪製了這幅畫的第一段「週期」，就好像正弦函數 ( $\sin x$ ) 曲線  $0$  至  $2\pi$  之間的那一段，而將其後無窮段的週期留在中央的空白，簽名結案。至於艾雪為



何想到「扭曲的空間、旋轉的尺度週期性」這樣的主意？據他自己說，是被愛因斯坦的「彎曲宇宙」理論所啓發。第一流的藝術家也欣賞科學的創意，並賦予自己的詮釋；艾雪也有一幅名為相對論 (Relativity, 1953) 的版畫。

直到大約 2001 年，在柏克萊數學系任教的另一位荷蘭人 Lenstra, Jr. 教授重新開啓了艾雪的計畫。Lenstra 發現艾雪想要完成的變形效果，可以經由一個複變函數達到。他先將艾雪手製的版畫掃描成數位檔案，然後用他設計的複變函數之反函數，將版畫先「還原」成正常的透視效果。還原之後，可發現艾雪遺漏或畫不準確之處；於是把這幅畫送回荷蘭，請那邊仍然精於此術的藝術家補完這幅畫。然後將補完的畫再度數位化，這就完成了直線型尺度週期性圖畫。將這幅圖做上述複變函數的映射之後，就是艾雪原來想要完成的作品了；它具有螺旋型的尺度週期性。

既然 Lenstra 的計畫已經將版畫數位化，何不乾脆做成動畫，實現艾雪的想像？當然，柏克萊的計算機系學生很容易就幫了這個忙。因為《科學月刊》還沒有電子版本，讀者請看文後的網址 [6, 7]。關於畫廊的「後製作」故事細節，請看參考資料 [3, 4, 5]。

艾雪令數學家驚豔的另一類類作品是連續漸變。如今在電腦動畫時代，這種技術稱為 Morphing，已經有軟體可以代勞大部分的技術細節，而數學家在更早以前便在拓樸課題中思索這種現象。艾雪沒有看過 morphing 動畫，也沒有學過拓樸學，憑著想像力和創造力而成就了這些作品。最具有代表性的漸變圖，當推日以繼夜 (Day and Night, 1938)，這幅作品的圖案左右對稱，顏色相反，同時具備了奇對稱和偶對稱的雙重特質。艾雪深愛此道，一生各時期都有這類創作，最晚的一幅生之幻構 3 號 (Metamorphosis III) 作於 1967 年 (69 歲)，共有九幅，最左邊和最右邊可以接上，所以應該圍成一圈展示，觀賞者可以繞著這幅畫一直看而無始無終。就像三角函數一樣，它具有橫向的週期性。



也許艾雪從平面漸變的想法，進一步發展出平面與立體之間的漸變。其實，不論是平面還是立體圖畫，都是畫在平面上的。所謂的「立體」其實是「透視」的效果，而繪畫者理應人人熟練透視的技巧和邏輯，但艾雪似乎是第一位玩弄透視的技巧和邏輯，使它成為作品主題的畫家。

在立體—平面漸變的系列作品中，我最喜歡爬蟲 (Reptiles, 1943)。平面的爬蟲像一幅拼圖（後來它真的被用來製造拼圖遊戲），而書桌上的裝飾品，包括一個正十二面體。那爬蟲從平面的地上爬出來，歷經幼年、少年、進取向上的青年、意氣風發的成年，然後開始衰老、頹散。最後，塵歸塵、土歸土，它又回到了平面。



或許艾雪對於平面漸變的設計興趣是有跡可循的。他在 1922 年離開家鄉到義大利去流浪（從翡冷翠開始），四處遊覽、飲酒、作畫，沒多久便娶了位義大利姑娘為妻，定居下來。艾雪在羅馬居住到 37 歲。那段期間，他欣賞中古教堂

的拼磚設計，感到極高的興趣，就開始嘗試這種創作，一生樂此不疲，總共作了 60 多幅，其中不乏遊戲之作。這類作品的第一幅，八王頭 (Eight Heads)，作於他剛抵達羅馬的 1922 年。



所謂拼磚設計就是要在正方形上畫出同時具有上下週期性和左右週期性，也就是「二維週期性」的圖形。這種設計又稱為 Regular Plane Division。這當然是一種很實用的工藝，今天我們在 Windows 的桌面上貼桌布，或者在網頁貼背景圖片，都要講究二維的週期性，否則就不好看。

1935 年，也就是艾雪離開羅馬的那一年，或許是為了留念，他創作了一幅聖彼得大教堂 (St. Peters)，也就是梵諦岡的大天主堂。畫家從十字架正上方的圓頂內側維修廊道往下看，詳細而精確地複製了當時的樣貌。在這一幅圖上，我們見識到地面的拼磚。當我有機會站在同一地點往下看，發現那畫面的寬度、光影、景深和比例的正確性，都不是我的照相機能夠複製的。沒有一支那麼廣角的鏡頭，可以像畫家那樣保持曲率和比例的正確性，同時捕捉如此清晰的景深和如此強烈的對比。



在艾雪的寫生作品中，我也很喜歡他在山城 Scanno 巷道中的一瞥。這幅畫刻好的半個世紀之後，有熱心人士找到同一地點，拍攝了一張黑白照片作為比對。發現除了新增幾條電線、變換幾台盆栽以外，五十年前後的景象與氣氛是完全一樣的：這個巷道彷彿被艾雪凝固在時間的河裡。

印在《科學月刊》318 期封面上的極限圓盤 4 號，是球形鏡面的描繪。其實艾雪開始練習繪製球面的技術。在他離開羅馬的那一年 (1935) 所做的手與反射的球 (Hand with Reflecting Sphere) 裡面，放著他的自畫像 (37 歲)；雖然艾雪不像梵谷那麼愛畫自己，他的確也為自己留下了影像。



離開羅馬之後，艾雪暫時躲避戰亂於瑞士和比利時，最後在 1941 年回到荷蘭。我們可以理解，在戰爭期間，大多數的藝術家都沒有創作。

藝術家總是喜歡創造「美」的作品，不一定要爭奇鬥豔，更未必要有數學結構。住在荷蘭鄉間的艾雪，做過一些沒有特殊的意義或目的，單純就是想要表達藝術家對於自然界簡單的美所感受的喜悅和尊敬。我最喜歡的是小水潭 (Puddle, 1952)。一個下午，藝術家到村裡沽酒。正好下了一場午後雷陣雨，他乾脆坐在酒館裡喝一杯。雨停之後，提著酒壺搖搖晃晃地沿著泥濘小路回家。濕涼香甜的空氣鑽進鼻孔，針葉上新沾的水珠點滴滑落，兩位鄉民迎面而來打了招呼，零星幾輛腳踏車碾著軟泥擦身而過。艾雪看著地上的水潭、鞋印和胎痕，潭水把頭頂上的松針捕捉下來，還順手偷摘了剛昇



起的滿月。多麼令人嚮往的、生活中的一個尋常的午後。

### 延伸閱讀

- [1] 蘇格蘭 St. Andrews 大學之數學家傳記網頁：Maurits Cornelius Escher  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Escher.html>
- [2] M.C. Escher, The Official Website <http://www.mcescher.com/> by M.C. Escher Foundation and Cordon Art B.V.
- [3] 荷蘭Leiden大學的Escher and the Droste effect網頁  
<http://escherdroste.math.leidenuniv.nl>
- [4] S. Robinson, "[\*M.C. Escher: More mathematics than meets the eye\*](#)" SIAM News **35,8** (Oct 2002), p.1,8,9.
- [5] de Smit and Lenstra Jr., "[\*The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery\*](#)" AMS Notices **50, 4**(Apr 2003), pp.446--451.
- [6] 直線型尺度週期性的畫廊動畫 [http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/liberal/CMW/Escher/print\\_gallery\\_linear.avi](http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/liberal/CMW/Escher/print_gallery_linear.avi)
- [7] 螺旋型尺度週期性的畫廊動畫 [http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/liberal/CMW/Escher/print\\_gallery\\_angular.avi](http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/liberal/CMW/Escher/print_gallery_angular.avi)