

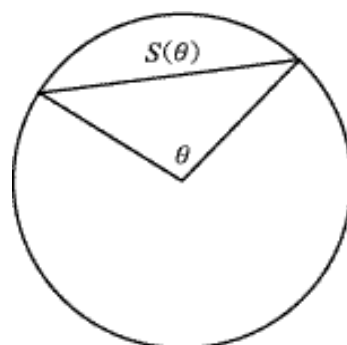
正弦的英文字源

單維彰·100年9月17日

我們在中學到所謂的「三角函數」，其中最主要的是正弦 (sine) 和餘弦 (co-sine)。它們的函數符號已經被標準化了，彷彿有了「註冊商標」一樣，分別固定使用 $\sin x$ 和 $\cos x$ ，而不必像其他「無名氏」函數一律用 $f(x)$ 。 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的讀音來自於它們的英文名字： $\text{sain } x$ 和 $\text{kou-sain } x$ 。這個短篇想要說一個故事，簡述從「弦」、「半弦」到「正弦」的觀念演變，以及正弦的名字從希臘，經阿拉伯、拉丁文到英文的文字演變。

如果誤以為正弦函數的符號 \sin 是它的英文名字，誤會可就大了。英文本來有 sin 這個字，讀 $/\text{sin}/$ ，是（宗教、道德方面的）罪惡的意思。可是，正弦的 sin 其實是 sine 的縮寫（雖然並沒有縮掉很多），讀 $/\text{sain}/$ 。而這個英文字，是從拉丁文 sinus 簡化而來。而 sinus 又是什麼意思呢？稍後就講這一段故事。

古典的希臘數學所討論的是「弦」(chord) 函數，也就是對應單位圓之圓心角 θ 的弦長；我們姑且將它記作 $S(\theta)$ ，如右圖。



有些書籍資料，說希臘數學家或天文學家托勒密 (Claudius Ptolemy, 西元 85—165) 製作了「正弦函數表」。其實他做的是「解析度」為半度的「弦表」，也就是 $S(0.5^\circ)$, $S(1^\circ)$, $S(1.5^\circ)$, $S(2^\circ)$, ..., $S(180^\circ)$ 的近似值。至於此弦表的「精確度」就不容易說明，因為當時用的是六十進位的分數 (Sexagesimal System)，也就是沿用至今天角度之分數的 1 度 60 分，1 分 60 秒的等分制度；大致而言，此弦表可以說精確至小數點下四位。

高中生學習的正弦公式：包括和角、差角、倍角、半角，都有「弦」函數的對應版本。而「弦」的三倍角公式 $S(3\theta) = 3S(\theta) - S(\theta)^3$ 更是史上最早出現須要求解的三次方程式形式之一。比如說，因為 $S(180^\circ) = 2$ （單位圓的直徑為 2），若 $S(60^\circ) = x$ ，則 x 滿足三次方程式 $3x - x^3 = 2$ ，顯然 $x=1$ 是一個解，事實上它是二重根，另一個解 $x = -2$ 不合（弦長不可能是負數），可見 $S(60^\circ) = 1$ ；事實上我們早該知道答案，因為 $S(60^\circ)$ 是以半徑為邊的正三角形邊長。但是，用這個方法計算 $S(20^\circ)$ 就是個挑戰的問題了： $S(20^\circ)$ 應該是 $3x - x^3 = 1$ 在 0 與 1 之間的一個解。

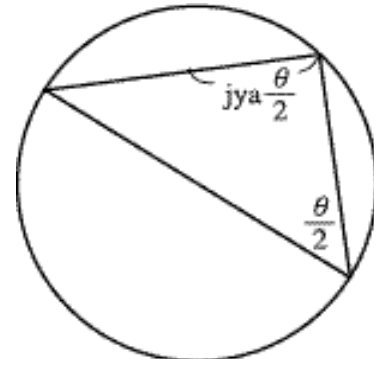
印度人在西元第五世紀發展出「半弦」的觀念，先計算半個圓心角（也就是對同弧的圓周角）所對應的半根弦，而其兩倍就是弦長了。所以，我們今天說的「正弦」其實是印度人的「半弦」。

我們不會寫印度文字，用英文字母拼其近似的音，就是 jya-ardha ，而經常簡記作 jya 。印度的數學家發明了比托勒密更高明的估計半弦值的方法，並且製作

半弦表，主要是供天文觀測使用。用今天的符號寫，就是

$$S(\theta) = 2 \text{jya}\left(\frac{\theta}{2}\right)。$$

如果我們令圓周角的其中一邊是圓的直徑，則弦和兩個邊形成直角三角形，如右圖。這就是我們將圓上的問題轉換成直角三角形問題的來源了。



就如同「阿拉伯數字」一樣，印度的「半弦」也傳到了阿拉伯。我們也不會寫阿拉伯文字，用英文字母來對應，阿拉伯翻譯了印度的 *jya*，變成他們的 *jiba*。阿拉伯人比印度人更進一步，發現了 $\tan \theta$ 的用途，於是除了計算並製作半弦表以外，也製作了正切表。

在歐洲所謂的「十字軍東征」之後，西方學者透過掠奪回去的書籍逐漸從阿拉伯人那裡學到了令他們「耳目一新」的數學。而當時的阿拉伯文明，其實遠高於所謂的西方。當時的阿拉伯，融會貫通了希臘和印度的數學和科學知識，並以阿拉伯文記述在書籍上；而當時的歐洲才剛開始要從「黑暗時期」走向曙光。

西方的學者，當時可以說都是僧侶或者靠著修道院生活和工作的人。他們有少數人學會了阿拉伯文，就負起將阿拉伯書籍翻譯成拉丁文的責任；當時的歐洲共同語文是拉丁文，也就是羅馬帝國的官方語文。

因為 *jiba* 並不是阿拉伯生活或文學中的用字，抄寫的人可能並不認識這個字。而且，就像我們把 *sine* 縮寫成 *sin*，*jiba* 又經常被縮寫成 *jb*。所以，可能有某位負責謄寫的寫字僧把 *jiba* 誤寫成 *jaib*，或者有某位負責翻譯的僧侶把 *jb* 誤會成 *jaib*。總之，願他們的靈魂安息。

而 *jaib* 就是一個阿拉伯字了，意思是「山凹」。修道院的僧侶或許不知道書的內容是在計算「半弦」，也可能不明白「半弦」和「山凹」有何關係？總之，這位修道院高閣內的僧侶，出於我們或許可以想像的原因，用了 *sinus* 這個字來翻譯 *jaib*。*Sinus* 這個拉丁字有幾個意思，當時最可能被引用的意思，是女性上半身某處所形成的「山凹」；想必讀者一定知道，就是「乳溝」的意思（後來又俗稱為「事業線」）。*Sinus* 的拉丁文發音類似「希努斯」。

現在我們知道，其實 *sin* 的本義來自印度文的「半弦」，而它的拼音來自拉丁文的「乳溝」。至於 *cos* 就是 *complementary sine* 的縮寫，它就是「餘角的半弦」的意思。為了將 *sin* 和 *cos* 相對而稱，中文就把一個稱為正弦，而另一個稱為餘弦了。

關於這段數學史，推薦閱讀《溫柔數學史》，博雅書屋出版。關於十四世紀那個時代的修道院、藏書閣、寫字僧以及他們的生活環境，推薦閱讀一部頗注重考據的小說《玫瑰的名字》，皇冠出版。