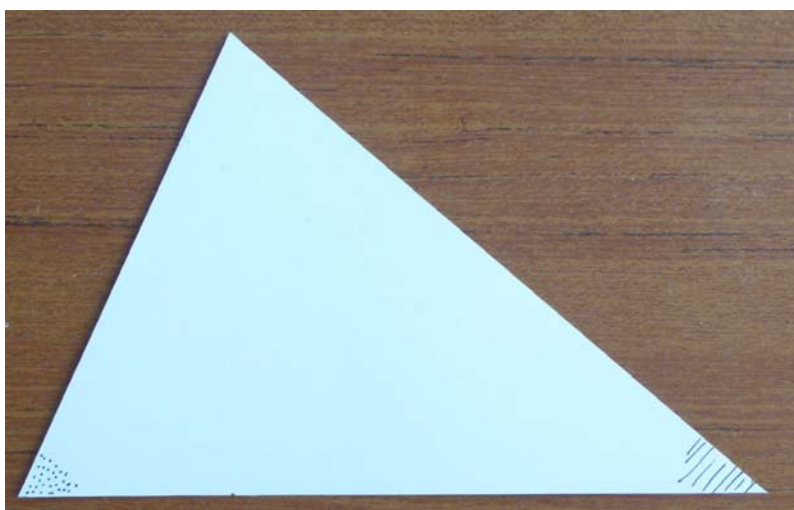


視覺的平面幾何

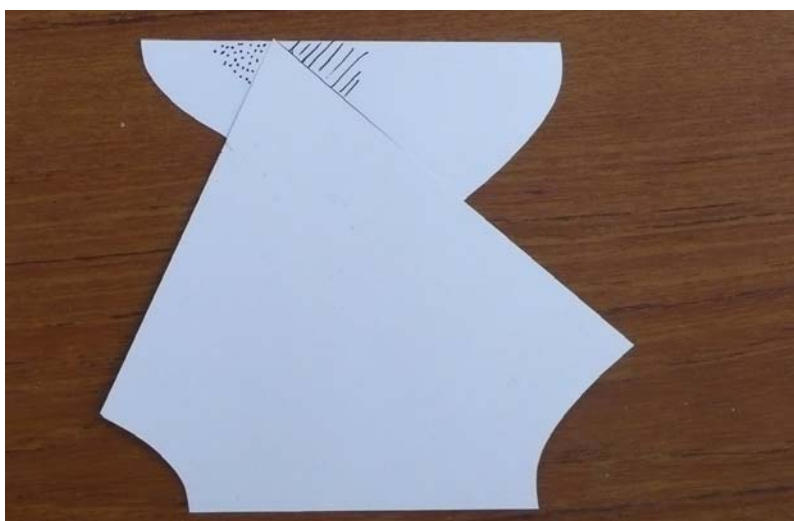
單維彰 · 101 年 4 月 12 日

本欄似乎每年要放讀者一次假，挑選一篇在網路流傳而內容淺易近人的消息，賦予數學教育的詮釋，與讀者分享。例如〈算術的潛規則〉(100 年 8 月)、〈財富月和 9〉(99 年 12 月)、〈數學標準答案〉(98 年 12 月) 和〈解決生活問題的數學公式〉(97 年 10 月) 皆屬此類。這一期要分享的不算是新消息，某些中學老師可能十幾年前就知道了，可是它最近又熱門了一次。讀者用「 $64=65$ 」搜尋即可。

但是，我的故事卻想要從國小數學教材中慣用的一個「證明」說起。以下是一個『三角形內角和是 180 度』的「剪紙證明」。先讓學生自己剪一個三角形，爲了方便把最長的邊放在下方，如右側的上圖；爲了辨識，我將較小的兩個內角畫上了記號。



然後，讓孩子們剪下兩個較小的角，拼湊到上方那個角的兩側，使得三角形原來的三個頂點聚在同一點，而其中兩個邊緊鄰而銜接起來。觀察拼在一起的三個角形成一條直線，如右側的下圖。



一個班級或許同時產生了廿多種不同的三角形，卻都有一致的結果(三個內角湊成一條直線)，應該足夠讓孩子們相信這是個普遍的現象，而獲致一個數學結論：**三角形內角和等於一個平角**。上述操作程序，張海潮教授戲稱之爲「剪紙幾何學」。

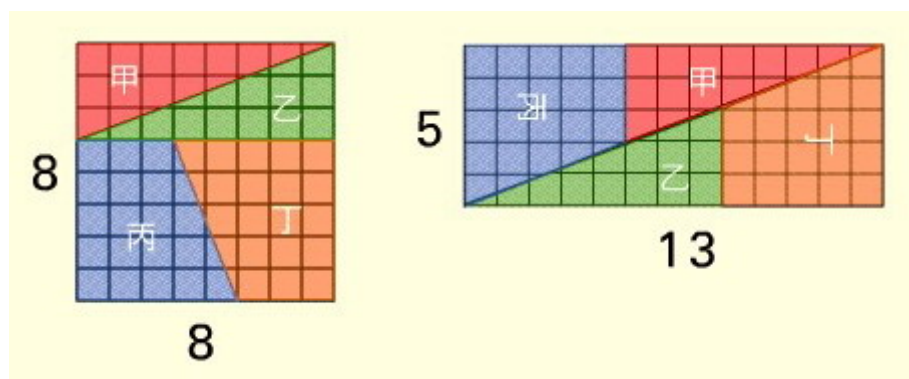
在小學或者八年級以下的數學學習中，剪紙幾何學無可厚非，它相當有趣(注意安全即可)，而且它的思維方式或者形成知識的程序，就科學教育而言也算是正確的：先觀察大量的例子，然後歸納。

但是，數學畢竟不是科學。訴諸於視覺的剪紙幾何學，其基本問題倒不在於歸納相對於演繹的推論方式(雖然這也是個問題)，而在於一個更根本的事實：除了某些關於正整數的論述以外，**數學的精確性在物質世界中是不存在的**。這就

是使得數學有別於科學的關鍵理由之一，也就是九年一貫課程綱要，必須將數學獨立一個領域而不能併入自然領域的原因。

前述剪紙證明的關鍵數學問題在於，那三個內角可以拼湊成『一條直線』的這個命題，是須要證明的。如果不經過數學論述而訴諸於視覺，會產生很多可能的謬誤，這就是「 $64=65$ 」派上用場的地方了。

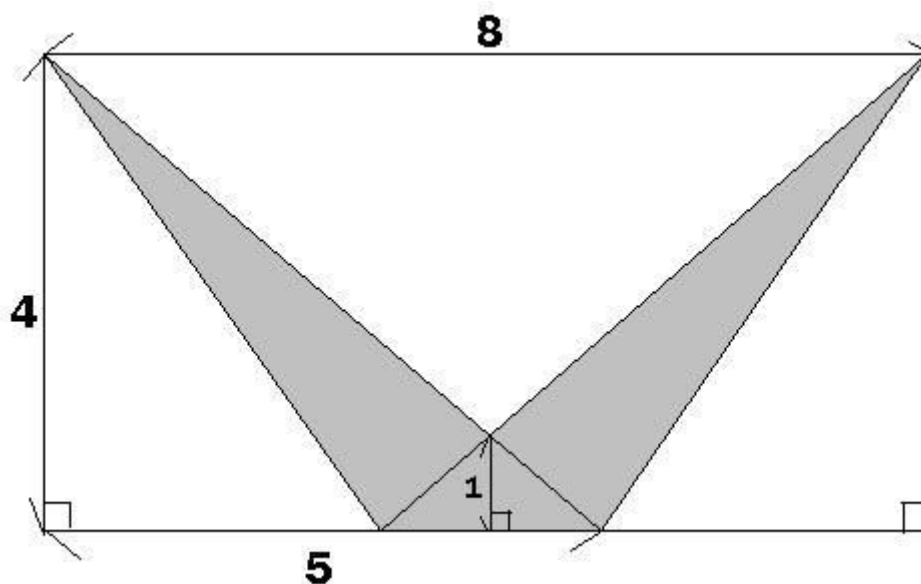
首先，如以下的左圖，將一個 8×8 的正方形分割成甲、乙、丙、丁四份。然後將這四份如右圖方式重組，變成了一個 5×13 的長方形。因為「面積」並沒有改變，所以左圖的面積 $8 \times 8 = 64$ 就應該等於右圖的面積 $5 \times 13 = 65$ ，亦即 $64=65$ 。



更有熱心人士將上述程序做成動畫，請看 YouTube 影片 www.youtube.com/watch?v=QTxQDjGQh-0。既然提到 YouTube，作者有個小小的「視覺錯覺」收集，請看 www.youtube.com/playlist?list=PL1DEC6D341482A500。看過這些錯覺藝術之後，可要對『眼見為憑』這句話多做保留啊。

當然，以上「 $64=65$ 」的視覺推論是錯誤的。它其實連「錯覺」都談不上，純粹只是視覺的不精確造成的。著名的數學老師「昌爸」在他的網路工作坊裡提供了一份圖解，請看 www.mathland.idv.tw/fun/6465.html。

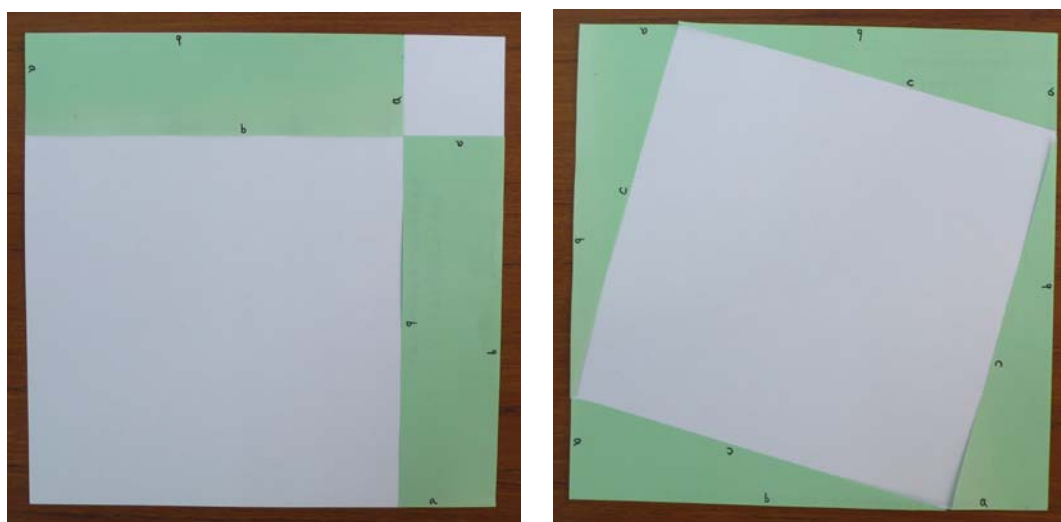
一個旨趣相若的例子如下圖。圖下方的兩個小三角形是全等的等腰直角三角形，而垂足是底邊的中點。



上圖的「梗」是：矩形內白色部分的面積為 24（三塊三角形），故灰色部分（兩個部分重疊的鈍角三角形）面積應為 $32 - 24 = 8$ 。但是以三角形面積公式計算灰色部分面積，卻得到 7：兩個鈍角三角形的面積減掉一份重疊的小三角形面積為 $(4 + 4) - 1 = 7$ 。而此圖的謬誤在於，那個灰色鈍角「三角形」的最長邊根本不是一條直線段，所以它根本不是「邊」，圖中所見的灰色部分，根本不是重疊的兩個鈍角「三角形」。

這些例子告訴我們：**不應該用視覺觀察獲致數學結論。**

至於「剪紙幾何學」，個人認為最經典的範例，莫過於劉徽那『出入相補』的畢氏定理（勾股定理）證明。令 a 、 b 為兩正數，假設 $a \leq b$ ，用它們為邊長做兩個（全等）的長方形，如下面之左圖放置在一張邊長為 $a + b$ 的正方形白紙上，則白色部分明顯為兩個邊長分別為 a 和 b 的正方形，故面積為 $a^2 + b^2$ 。



將長方形都沿對角線剪開，則形成四個全等的直角三角形，令其斜邊長為 c （也就是原本長方形的對角線長）。將這四個直角三角形按上面的右圖方式擺置在正方形白紙上，則可以推論內部白色部分是一個以 c 為邊長的正方形（小學生不必證明它，只要觀察即可），故其面積為 c^2 。因為左右兩種配置之白色部分顯然面積相等，所以得到畢氏定理的結論： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

前述『三角形內角和等於一個平角』和『畢氏定理』的結論都是正確的（還須強調「平面上」）。我們只是提醒，不該在數學課程中讓學生養成訴諸於視覺觀察的習慣。視覺觀察的歸納性推論，在小學階段是無可厚非的，但是進入中等教育之後，應指出視覺觀察的謬誤可能，並開始學習數學的演繹性推論。