

日本高中數學課本簡報

單維彰·102 年 6 月 13 日

本欄於今年 3 月指出，就課程綱要而言，日本的必修課程不包含向量課題。寒假裡，竹北高中數學科蕭老師赴日旅行途中，蒐集了一整套現行教科書，學期初寄送給我。在此特別感謝蕭老師，她的餽贈使我得以進一步根據教科書的實際內容，向讀者們做個簡報。

日本高中數學教科書共有七冊，蕭老師取得了數學基礎、(新)數學 I、II (東京書籍)、III (數研出版)，和(新)數學 A、B、C (實教出版)。其中《數學基礎》和 A、B、C 在 2002 年審定，而 I、II、III 在 2011 年審定；七冊都是在 2012 年(平成 24 年)印刷發行的。



小女曾在日本的語言學校學習九個月，具備日語檢定 N1 級的水準。我請她陪我一個下午，瀏覽了上述七本教科書。以下所言並不涉及其他版本，皆以蕭老師提供的版本為準。

就課綱來看，數學 I、II、III 是必修的，其他是選修，而每一冊書都該使用一年。但是就小女聽日本同學說，只有 I、II 才是共同必修，III 是分流之後的理工組必修。雖然這三冊書原則上應該分別用在高中的三年，但實際上高一就可能同時完成 I 和 II。選修課本不一定要整冊教完，所以授課時間也未必是一整年。

本欄作者並非日本數學教育的專家，也沒有機會實地考察，故本文僅就教科書內容而論，並不涉及現場。請讀者想像，日本有一億人口，是台灣的四倍多，因此在每一個數學學習性向的分佈段落裡，日本的學生數量都比台灣的多，而且日本教師自編教材的培訓與風氣皆盛，所以教學現場想必有更多因地制宜、因材施教的措施。本文不討論這些措施。

先說我們最關心的：向量。日文的「向量」是用片假名音譯的 **Vector**，出現在《數學 B》第二章（平面）和第三章（空間），給高二學生選修。第二章第一節先以 10 頁篇幅，8 例和 9 個練習的份量，以平面上的有向線段講解向量的相等、平行、係數積、加減運算、線性組合等意涵，並實際上說明了平面向量的線性獨立意涵（沒寫出專有名詞）。然後用 6 頁、5 例發展坐標平面上的向量運算與絕對值、再用 7 頁、3 例介紹內積和垂直。

上述「例」是指「一般學習」的具體範例，課本裡還有另一系列爲了深刻理解而設計的「例題」。在 2-1 中共有 16 例和 7 道例題，其中例題 1 以正六邊形的頂點和中心點討論平面向量的合成或相等關係，例題 2 求與 $(3, 4)$ 平行而長度爲 10 的向量，例題 3 給定三個向量 a 、 b 、 p 的坐標，要求用 a 和 b 的線性組合表示 p 。其後的 4 道例題都關於內積，如例題 7 求垂直於 $(-2, 1)$ 且長度爲 5 的向量。

第二章第二節就是（平面）向量的應用了，有 14 頁、6 例、5 例題、11 道練習。內容包括位置向量、（內外）分點公式、三角形的「心」，直線參數式與法線式、圓的直徑式。但是直徑式不含任何範例或練習。平面向量至此爲止。

限於篇幅，以下不再列舉課本內容。根據以上所列，讀者已經看得出來，日本教科書的內容與篇幅都比我們的輕快；此外，日本教科書的字體較小，排版簡明素雅，也令我喜愛。每一本書都聲明是用再生紙與大豆油或植物油印刷的。

綜合而言，日本的向量課題不包括（平面或空間的）點到直線距離，沒有直線與圓的應用，沒有向量「決定」的平行四邊形或平行六面體，也沒有行列式。空間中的直線參數式與比例式，和平面的法線觀念與平面方程式，都以附錄形式寫在第三章習題的後面 4 頁，沒有例題或練習。空間中的點到平面距離、平行線距離和歪斜線距離，都是沒有的。

日本稱矩陣爲「行列」，寫在選修的《數學 C》。雖然以兩頁篇幅定義了 m 行 n 列的矩陣，但是實質上的內容全都是二階方陣。因爲沒有講行列式，二階逆方陣的計算步驟中，以「判別式」代替了行列式。僅以一道練習題讓學生知道方陣乘法沒有交換律，並未在此多著墨。沒有克拉瑪公式也沒有高斯消去法，僅將二元一次聯立方程式與二階方陣連結，然後用平行或重疊的直線解了無唯一解的狀況。最後，課本講了平面上的線性變換、逆變換與合成變換。

圓錐曲線以「二次曲線」之標題出現在《數學 C》。他們很務實地先講橢圓、再講雙曲線，最後才講拋物線；因為對稱於 y 軸的拋物線已經學過了，而且它又是「略為退化」的情況，放在最後以便跟舊知識比較。課文裡並沒有透過圓錐將三種曲線連結起來，但是夾在書內的幾幅彩色頁，有一頁示意了圓錐與平面的三種截痕；我猜，這是留給教師自行發揮的地方。一個很聰明的作法是，前三節只講了以原點為中心的標準式，到了第四節一次講解中心點的平移，有效縮短了教學時程。然後，在第五節以聯立方程式的手法處理二次曲線與直線的關係；這個安排比起我們僅討論圓與直線關係的課程有意思。

必修《數學 I》的內容，除了「三角比」和「集合與論證」以外，幾乎是我們的國中數學總複習；可見日本的數學課程在前九年略慢於我國。所謂「三角比」就是在具體的直角三角形上討論某兩邊的比值，只定義了 \sin 、 \cos 、 \tan 三種，而且始終限定在銳角，直到最後一小節才討論鈍角的三角比，並無廣義角。我特別愛《數學 I》的前言，它簡直就是一篇「數學是一種語言」的短文。

在必修的《數學 II》裡，跟我們一樣用解聯立方程式的手法處理了圓與直線關係。在這之後，課本安排了直線不等式和圓不等式，並利用來練習在坐標平面上畫出聯立不等式的解區域。但是，並沒有看到平行直線系，也沒有發展線性規劃。

虛數也出現在《數學 II》裡，內容份量與 99 課綱的設計差不多。但是日本的多項式處理得很簡單，沒看到「有理根」的判定，沒有代數基本定理，也沒有插值多項式。幾乎所有實際要算的例題，都只有三次。

在《數學 II》出現的三角函數也只有 \sin 、 \cos 、 \tan 三種，這裡介紹了廣義角，也在全章的最後引入弧度量。我個人難以苟同的是，他們用度為單位畫了三角函數圖形；不論在歷史上或者實用上，都不宜這樣繪圖。我認為學生應被教導，凡是討論三角「函數」時，一律以弧度測量角。我猜想這是日本受限於課程時數與課本篇幅而採取的權宜措施。

同樣屬於《數學 II》的指數與對數函數也類似我們的課程，只是我國安排在高一上學期。日本同樣沒有在必修課程裡談到無理數 e ，但是當他們在選修《數學 C》講正規分佈的時候，還是寫出了分佈函數，直接告訴學生 e 是大約 2.71828 的無理數常數。

最後，讓我們談談排、組、機、統吧。這些課題全部屬於選修；唯一列入必修課程的，是《數學 I》的「數據分析」。此項安排再次表明：數據分析並不須具備機率基礎，也不等同於統計。其內容與 99 課綱在高一下學期的安排類似，但是二維數據僅觸及相關係數的意涵，並不討論標準化，也沒有迴歸直線。

排列組合是選修《數學 A》第一章的主題，其「組合」課題在區區 3 道例題之後，就開始發展二項式定理，而止於 $(a+b+c)^n$ 的展開式。「古典機率」在第二章，發展到獨立事件的重複實驗與期望值。《數學 B》包含一章「統計與計算機」，其內容與《數學 I》的「數據分析」重疊，但是複雜得多，而且正式教導試算表軟體的用法。《數學 C》則以一章發展隨機變數與機率分佈，以另一章處理抽樣

與統計推論。

讀到這裡，讀者不免懷疑，日本的數學內容怎會這麼少？他們難道不學習數學了嗎？當然不是的，他們學習「微積分」。在全體必修之《數學Ⅱ》的最後一章，就單刀直入地講解了微分和積分的符號、意義、基本公式和典型應用；毫不浪費時間在極限原理上。而整冊理工必修的《數學Ⅲ》，就是一本微積分入門。在這裡，多項式函數、有理函數、三角函數與指、對數函數都用上了；順帶一提，三角還是只有三種，而且自然對數出場了，所以講解了常數 e 。（但是數學 C 並不要求先修數學Ⅲ。）

我們可以這樣說：日本的高中數學課程是對準了微積分而設計的。在必修課程裡，他們為學生設想了一條從國中數學直達微積分的最短路徑。