

# 美國各州共同數學課程標準

單維彰

大家都知道《三國演義》是這樣開場的：「話說天下大勢，分久必合，合久必分。」讓人沒想到的是，這一句話也應驗在教育領域。在美國，教育向來是州政府的職權，而各州傳統上都有獨立的課程綱要與評量標準。但是現在，美國不但在 2010 年提出了一套稱為 CCSS (Common Core States Standards) 的文件《各州共同核心標準》，並且將從 2014 年起實施各州一致的評量。

依據美國憲法，聯邦政府不能干預各州的教育。所以，美國總統及教育部長都澄清自己樂觀其成的立場，宣稱這是各州自發的行動。但是這種政治語言的澄清只是說明「此地無銀三百兩」而已，聯邦政府運用各種威逼利誘的手段，要求各州就範。我們之所以說「各州」而不敢說「全國」，就是因為目前還有四個州抵抗，不肯加入：阿拉斯加、德州、內布拉斯加、維吉尼亞。

本欄在一年前 (101 年 9 月) 就提到了 CCSS 文件。當時說過，它的副標題很務實，甚至務實得看起來像廣告：College and Career Readiness (為大學與職場做好準備)。這個副標題，很能讓我們了解這套課程標準的設計宗旨。CCSS 將核心課程分成兩個領域，第一個領域就是他們的「國文」，分別針對聽說

讀寫設定能力標準，並在內容上設計一定比例的知識性文本 (non-fiction)；其文件標題包山包海：English Language Art and Literacy in History/Social Studies, Science, and Technical Subjects。第二個領域的文件標題就只有一個字：Mathematics (數學)。

關於美國 CCSS 的全方位探究，我國駐美代表處教育組張佳琳副組長有一篇精彩的報導。我們這篇短文簡要報導 K~8 年級的數學共同標準；所謂 K 就是幼稚園大班 (進小學前一年)，1~5 年級是 (美國的) 小學階段，6~8 年級是國中階段。高中階段 (9~12 年級) 的數學課程以後再說。

CCSS 數學標準具體展現了比爾蓋茲的三字真言：Fewer, Clearer, Higher (少一點，清楚一點，高一點)；前兩個字或許可以翻譯成「精要」。除了這三項要領，文件的序言更宣稱它具備 Coherence；我們不該含糊地將 coherence 翻譯成一個名詞，它有雙重意涵：既要各部分清楚而合邏輯地互相關連，也要在整體上呈現一致的目標或性質。我認為 CCSS 數學標準認真考慮了上述四項設計要領的每一項。

以「機率統計」為例，在國中小階段，僅列於 6、7、8 年級而且著重於「統計思維」，

至於「不確定性」的機率概念是以一種「數學模型」的方式導入。這套課程認為數據分析應優先於機率的觀念與操作。在幼稚園和一年級，固然都有將物件或事件分類並計算總量的教學活動，但它們被列在「測量與資料」內容向度，而非統計。我猜，他們如此細分內容向度的名稱，是「必也正名乎」的作法：強調統計要教的是它的思維方式，而機率要教的是不確定性。這兩者，都從小學抽離，使得小學教師只須單純地教導分類、計數、整理與呈現資料即可。

統計思維從六年級正式開始，此時的內容基本上就是一維數據分析，包括數線上的散佈圖，直方圖，以及認識資料的集中或分散情形。七年級開始了基本的隨機抽樣活動，並試著從樣本推論母體的性質；並沒有正式介紹信心水準。然後，根據兩個群體的同類數據，例如兩個年級學生的身高，經由觀察數據或散佈圖來比較兩群之間的異同。最後，藉由數據的次數比值引出機率模型，並發展基本的古典機率。八年級學習二維數據分析，包括坐標平面上的散佈圖，回歸直線的意涵與應用，在具有線性關係的散佈圖上非正規地找到最適直線，並了解其斜率與截距的意義，非正規地推論兩組數據的相關性。

在「幾何」內容方面，CCSS 數學課程的設計總是讓平面與空間的觀念與操作比肩共進。除了在三、四年級偏重平面圖形而沒有對應的空間觀念以外，從 K 到八年級的每一年都同時有平面和空間的幾何課題。以八年級為例，CCSS 規畫了三角形內角和、外角和，以及畢氏定理，還有（直）圓柱、圓錐和球的體積，並強調能夠用來解決實際的問題。

在「度量衡與時間」方面，CCSS 的內容相當簡要。一年級發展測量長度的觀念，能對

整點與半點的時間報時。二年級學著用標準的單位（英吋、英尺、碼、公分、公尺）測量長度，特別要做同一個物件被兩種單位測量的活動，要能以五分鐘的間隔報時，並有上、下午的說法。三年級學習重量和容量，但是僅針對少數常用的單位，能以一分鐘的間隔報時，並學習同量級內的加減計算。四年級學習跨量級的計算（包括英尺和英吋、盎司和英鎊、毫升和公升、公里公尺和公分、時分秒），並用以解決情境問題。五年級把前述能力擴展到分數和小數，度量衡與時間的課程到此為止。

數線的認識從二年級開始，不但要在數線上標示 0, 1, 2, ……，還要能在數線上表示 100 以內兩個全數的和、差。然後，在三年級就開始學習分數，先在數線上標示單位分數  $1/b$ ，然後推及  $a/b$ ，其中  $a$  和  $b$  都是正整數。既然已經把分數標示在數線上，立刻就學了分數的比大小。至於等值分數、以通分比較分數的大小，以及分數的簡單加減計算（容易通分的）和分數乘以正整數，都在四年級。而五年級則延續學習更為一般的分數加、減、乘計算，以及除數是正整數或單位分數的除法計算。五年級介紹了直角坐標平面，但只有第一象限，而且僅限於認識點與坐標的對應。到了六年級才學習完整的（正）分數除法運算，並統整認識負整數、負分數、以及坐標平面的四個象限。真正的負數計算，包括  $a + (-b) = a - b$  與  $a - (-b) = a + b$ ，到了七年級才學。而八年級引進了平方根、立方根、科學記號；此時無可避免地要談有理數與無理數，CCSS 建議以直接的計算經驗，推論有理數的十進制數值可能是無窮循環小數，同時就教學生如何將無窮循環小數的有理數轉換成分數形式。

小學低年級的核心數學必然是十進制數

字的位值觀念及搭配位值的四則算法，CCSS 文件對此有細緻的安排。舉其要者，他們把「唱數」和「計算」拆開來處理；例如，在幼稚園要能從任一個全數開始向上數到一百（幼稚園就學習 0），但在計數上，只要求數出廿以內的物件，能寫出 0 到 20 之間的數字，用廿以內的二位數認識位值，能以不只一種方法拆開十以內的數，並能湊十。發展到二年級，已經可以兩兩數（奇偶觀念）、五五數（5 的乘法）、十十數和百百數至千以內的數，但是在計算上仍只強調百以內的加減，並在廿以內發展乘法觀念。值得注意的是，CCSS 要求學生在二年級結束前，能背誦九九加法表，熟練地心算廿以內的加減。三年級同時進乘法和除法，乘法僅限一位數乘以一位數，或者乘數為十的倍數，而除法則以乘除互逆呈現；CCSS 要求學生在三年級前，能背誦九九乘法表。前面提過，在三年級學習除法之後，就學習單位分數了。

以上簡略的檢視，大家都會發現，數學課程要求認識大數，卻不必計算大數。這顯然是因為美國的學校使用計算器。事實上，2014 年起實施的各州共同評量，將是線上測驗，學生將能在受測時使用一定的計算輔助工具。為了實施線上測驗，課程標準衍生了對於學校資訊設備與網路頻寬的硬體標準，教科書與軟體公司也有很多事情要忙；這可能就是比爾蓋茲經常被提起的原因了。

科技工具不只給學生當作計算工具，也用來輔助教學。例如，在八年級教導「全等」觀念時，課程標準指定用電腦工具展現平移、旋轉、鏡射等剛性映射，藉以了解全等；然後，用 zoom in 和 zoom out 了解相似。

讀到這裡，有沒有如芒在背的感覺？美國這樣一個講究個人差異與多元價值的國家，

真的能實施全國性的課程嗎？從加州經猶他和愛荷華到麻州的全國孩童與青少年，真的能夠一致跟上意圖這麼「High」的課程嗎？最根本的問題是，美國對於亞洲的崛起，真的感到這麼強烈的危機嗎？這份文件對年輕人釋放的訊息是：「好日子快要過完了」，但是從它受到教育界、學術界、企業界、甚至國防部的讚頌背書看來（當然也有反對聲音），他們是玩真的：文件裡說這份標準是「我們意欲信守的承諾」（promises we intend to keep）。

教育學者都知道，美國的數學教育曾經完全走錯了方向，徹底失敗。美國人針對他們自己的問題，反省之後提出更弦之策，是他們的國內事務，跟我們未必相干。只可惜，地球是「平的」，像美國這樣史無前例的大動作教育興革，世界各國不可能無動於衷。事實上，英國和德國的最新課綱都已經受到美國這份標準的影響。美國學者不一定最有智慧，他們的方法不一定能解決我們的問題，但是美國仍是資源最豐富的國家，這一份 CCSS 數學標準可能是以空前的智力、財力、與行政力創造的結果，絕對值得我們認真考察。🌐

## 參考資料

1. Common Core States Standards: Mathematics, <http://www.corestandards.org/Math>
2. 張佳琳，〈美國國家課程時代的來臨：各州共同核心標準之探究〉，《教育研究與發展期刊》9 卷第 2 期 1-32，2013 年 6 月。

單維彰

任教中央大學數學系