

乘法與記憶

單維彰·97年5月9日 (Rev.101.04.17)

前陣子在一場會議之後，兩位家有稚子的媽媽同事問我，九九乘法表到底要不要背？我以為這已經是個過去的問題了。後來我被告知，還是有許多「憂心忡忡」的母親煩惱著這個問題。簡短地說，我的看法是：**如果不背乘法表，就根本不必學習乘法了**。因為（自然數的）乘法本身並不是一個計算方法， 4×3 只是 $4+4+4$ 的簡寫而已，正如 4^3 只是 $4 \times 4 \times 4$ 的簡寫。如果有其他的「方法」可以便捷地計算 $4+4+4+4+4+4+4$ ，那就可以不必記憶 $4 \times 7 = 28$ 。但是，除了記憶 $4 \times 7 = 28$ 以外，我個人實在不明白還有什麼其他方法，可以便捷地計算 $4+4+4+4+4+4+4$ ？而如果每次遇到 4×7 ，都要改用 $4+4+4+4+4+4+4$ 來完成，那我們還要學乘法做什麼？爲了讓這種「簡寫」在計算過程中有實務的用處，我們必須記憶乘法表。

但是，有人接著問，只要理解了乘法的意義，乘法可以用計算器來做，正如次方也可以用計算器來做，爲什麼要浪費腦袋來記憶可以用機器計算的東西呢？這的確是三、五年前我們經常聽到的說法，我也以為這個討論已經塵埃落定了。我的簡短回應是，記憶就像金錢：**記憶不是萬能，沒有記憶卻是萬萬不能**。記憶是一個人真正的資產，是我們除了肉身以外，唯一真正能夠擁有的東西。它當然是寶貴而需要謹慎投資的。乘法表絕對是能夠讓（現代社會中的）人一生受用的記憶。事實上，當我爲了執行一個研究案而參考英國數學課程標準的時候，發現文件中要求 10—15 歲之間的學子，還要記憶 20 以下的平方數以及 10 以下的立方數；我自己在小學五年級的時候，也被老師要求背誦了這些數，直到今天還是覺得方便實用。我個人還要求自己的孩子記憶 2 的 1 到 10 次方。

乘法當然可以用計算器完成，就像複雜的加減計算也可以讓計算器代勞。哪樣的計算該能心算（或簡短地筆算）？哪樣應該用機器？我請大家想像一個可以類比的情況：就好比讀英文，也可以說不必記憶太多字，反正電子字典的查詢那麼方便。但是，請想像你正在讀英文版的哈利波特，如果每一句話都有十個字不認識，理論上也可以一個字一個字地查啊。有任何人相信可以這樣讀一本英文書的嗎？文字的閱讀不僅是字與詞的認識，更重要的是概念的 formed。如果不能流暢地閱讀，一字一踉蹌地窒礙難行，有閱讀經驗的人都會同意吧：這樣很難形成概念。

因此，我們必須具備基本的文法、基本的字形變化以及最基本的幾千個字彙，才能流暢地閱讀英文文件或小說，從中獲得概念或樂趣。相對地，我們必須具備基本的心算能力，記憶最基本的運算規則與等式，才能流暢地閱讀數學文件，也

才能流暢地以數學思考來解決問題。哪樣的計算值得心算？這個問題當然因人因時而異。我提議一個簡單的準則：在你打開計算器或電腦軟體、輸入指令、看到答案的時間之內，能夠心算完成的計算，就值得心算。

所以，記憶不見得是爲了加速計算，在親友的聚會裡表演神速的心算。**記憶的主要目的是為了思考的流暢**。流暢的思考有助於概念的形成與理解，當然也有助於產生創意。前一段時期，台灣的國小數學教育以建構式的哲學領路，成功地讓學生與家長們相信，數學是一門重理解的學科。這是好的。但是可能產生過於輕忽記憶的副作用。參閱本欄 95 年 4 月《TIMSS 的啓示》。

有一則小故事，可以幫助記憶 12^3 。神奇的印度數學天才拉瑪努江 (Ramanujan, 1887—1920) 在英國水土不服，住進醫院。他的老師哈地 (G. H. Hardy, 1877—1947) 去探望他，可能沒什麼話好說，天氣也聊完了，就說他剛才搭計程車過來，那個車牌號碼是個看起來蠻無聊的數，1729。拉瑪努江立即說，這個數很有特色，它是能夠寫成兩組不同立方和的最小正整數。哪兩組？就算沒有記憶，也不難計算 $9^3=81\times 9=729$ ，再加 10^3 就是 1729。另一組是 $12^3=1728$ 再加一 (1 的立方還是 1)。讀者不妨上網搜尋拉瑪努江，看看他的生平故事，對這個人多點同情，就會覺得這個故事更爲親切，自然就能記得 12^3 就是 1729—1 了。事實上，心理學者說，心算神速的人，都是能夠記憶大量計算結果的人。

記憶一些數，不只是在學校裡有用，只要隨時提高警覺，在生活中也經常有用。但是生活中的計算常是估算，不必非常精確。可是估算很難命題，或者是我們的數學考試沒有評量估算的傳統，總之估算的能力，因爲不考，所以在整個數學教育中缺席了。這是非常令人惋惜的。此爲另一個課題。要讓學校裡學的各種算術能力活用在生活中，除了記憶一些數，並且具備簡單的心算能力以外，還得培養估算的習慣和能力才行。以下是我自己遇到的例子，都發生在我開車和孩子們聊天的時候。

有一次我們需要知道半徑一英吋的圓面積大約有多少平方公分。我記得一英吋是 2.54 公分，所以面積是 $2.54^2\times\pi$ 。我記得 π 大約是 $22/7$ (也就是 $3+1/7$ ，大約 3.142857)。而 2.54 大約是 $2.5=5/2$ ，所以估算成 $25\times 11/(2\times 7)$ 。但是 $7^2=49$ 再乘以 2 就幾乎是 100。所以它大約是 $(25\times 11\times 7)/100$ 。而 $25/100$ 就是 $1/4$ ，所以所求爲 $77/4$ ，故估算的結果是 19.25。我知道自己的估算比實際值小了一點 (用 2.5 代替 2.54，用除以 100 代替除以 98)，所以憑感覺提高一點，就說答案大約是 20 平方公分。【代數能力稍強的讀者可以理解圓面積等於其外接正方形面積的 $\frac{\pi}{4}$ 倍，亦即 $\frac{\pi}{4}\times 5.08^2\approx\frac{3}{4}\times 25=18.75$ ；因爲估算值略小於真值，也可以憑經驗提高到 20。真值大約是 20.27。】

又有一次，爲了計算體重指數 BMI，需要做 $45/1.58^2$ 。先把 1.58 換成近似的 1.6，因爲記得 $16^2=256$ ，所以大約是 $45/2.56$ 。再把 2.56 換成近似的 $5/2$ ，約分得到 BMI 大約是 18。反正這個數據距離危險指標 23 很遠，我們不在乎它的誤差。【真值大約是 18.03。】

自然數的乘法不只是同數連加的簡寫而已，它也幫助思考。自然數的最基本用處，就是點數：計算有幾個人？幾把椅子？幾張怪獸卡？之類的。讀者一定記得，在高中的某個時期學了排列組合，那是一套讓我們可以不必一一點數所有物件，而能快速決定共有幾個物件的數學方法。高中時代的排列組合是一種高竿的點數方法，但是這種「加速」的點數策略，從小學二年級就開始學習了：那就是乘法。例如，知道教室裡有六排座位，每排五人，則不必一一點數，就知道全部有 $5 \times 6 = 30$ 人。

自然數的乘法性質還是所有其他「人類創造的數」的基本模型。西方人說自然數是上帝創造的數；自然數的加減乘除計算，只是標準化與精簡化我們語言中處理數的那些動詞，例如添上、扣掉、不足、剩下等；自然數的計算是依附在日常語言中自然產生的。相對地，負整數、分數（有理數）和實數，都是人類的創造。既然是人的創造，它們的計算規則就是由人規定的。那些在日後被命名而且抽象化的計算規則，例如交換律與分配律，全部來自於自然數的具體經驗。所以，學習乘法還有第三層意義：爲了將來處理整數、分數、小數和無理數的計算做準備。當然，到了後來還有複數、向量與矩陣。然而，這所有的計算，全部基於自然數的計算。

綜合而言，我希望「憂心忡忡」的媽媽們，可以站在一種有自信的高度來看待孩童的數學學習。理解、記憶、啓發和經常計算所累積的經驗和直覺，都是同樣地重要。也許，父母親的最大挑戰，是在生活中保持創意，隨時發現一些小問題，來啓發學童對於計算的興趣與估算的能力。

最後讓我補述一件事。自然數，乃至與所有的語言、文字，嚴格說來當然都是人類「創造」的。爲什麼西方人要說『上帝創造自然數』呢？我認爲可以借用陳之藩的名句來做個類比：『要謝的人太多了，不如謝天吧。』因爲世界上超過六千種經過記錄的各種族語言，都有指稱自然數的字詞，而人類語言能力的發源已經實不可考，不知道這個普遍的能力從哪裡來的？不如就說是上帝創造的吧。