

## 美國 AP 微積分課程與評量

單維彰 97 年 12 月 15 日

上個月，本欄介紹了美國高中生的大學預修課程（也就是 AP 課程）的哲學理念與課程、評量的設計。這個月，我們深入檢視其中兩門微積分課程的內容及考試狀況。而下個月，我將提出（個人認為）美國的微積分預修課程對我國中等數學教育的啓示。

AP 設計了兩門微積分課程：微積分 AB 和 BC，都是在高中執行一整個學年的課程。它們是大學預修課程，基本上都應該被視為大一課程，而不是高中課程。副標題 AB 和 BC 表示它們把預修微積分的內容分成 A, B 和 C 三個部分。粗略地說，三部分的內容如下 [1]：

**A** 是基本函數的統整，包括有理函數、指數、對數、三角和反三角函數。

**B** 是單變數微分學與積分學的核心內容。

**C** 包含參數方程式和極坐標函數，但主要是無窮幕級數的相關課題。

可見微積分 AB 比較初級，而兩門課是有交集的，也就是所謂的 B 部分；它也是課程的主要部分。因為 AP 測驗都在五月舉行，那時候學年尚未結束，所以美國的高中教師也有「趕進度」的壓力。他們會在 AP 測驗以前趕課或加課，而在測驗以後放假或自由出席。總之，這些課程通常以 150 節課講授，每節課從 50 到 75 分鐘不等（課堂的時間長度是地方自治的範圍）[2]。常見的安排是每天都有一節課，相當於授課 30 週，每週 5 鐘點。

微積分 BC 假設選修的學生已經在其他課程中準備好了 A 部分，所以不教。但是微積分 BC 的檢定考試（AP 測驗之微積分 BC 考科）卻包含微積分 AB，不像我們的指考「數甲」和「數乙」被定位為分流的測驗。在微積分 BC 的考題當中，約有 60% 屬於微積分 AB 程度，所以在微積分 BC 的成績報表中，有一個微積分 AB 的「子成績」，並建議各大學將此成績視為微積分 AB 的考試成績。所以，不論是課程內容還是評量內容，微積分 AB 都是包含於 BC 的，學生不必「跨考」，只要挑選其中之一即可。

但是，即使 C 部分也不到台灣理工科系的一學年微積分內容；對於「傳統」的理工微積分課程而言，C 部分大約在第一學期或者第二學期的第一個月完成。這是因為，台灣經常選用的「磚頭」型微積分課本，在美國的大學經常被拆成三個學期的課：微積分 I、II 和 III（包括筆者留學的賓州州立大學）。多變數函數的偏微分、兩變數和三變數的重積分、曲線和曲面上的積分、以及向量微積分，通常屬於微積分 III，只有某些主修（例如數學、物理、機械、電機、土木等）要求第三學期的微積分。

所以，微積分 AB 可能可以在大學抵 3—4 學分的微積分課程，而微積分 BC 也許可以抵 4—6 學分。對於人文藝術的主修學生而言（例如歷史、哲學、音樂

等)，AB 就已經滿足了大學的微積分需要。有一部份管理類科以及理科的學生（例如企管、農業、生物、化學等），也是只要 AB 程度就夠了，頂多在 AB 以外再補一學期的微積分或相關課程。至於其他的理、工、金融財務科系，可能要求在 AB 以外再修兩個學期，或者在 BC 以外再修第三學期的微積分。

根據以上的解釋，可以看出來微積分 AB 的市場比 BC 大得多，這也反映在報考微積分 AB 和 BC 的人數比例上。我們不知道微積分 AB 的選修人數，只知道每年參加微積分 AB 之 AP 檢定考的人數：2005 年約 18 萬人，2006 年約 19 萬人，2007 年約 20 萬人，2008 年約 21 萬 5 千人；詳見表一之第二列。大多數考生是高三學生（也就是 12 年級，約 15 萬人），但是高二考生也超過 3 萬人。我們看到近年來微積分 AB 的考生人數穩定成長，但是 BC 的考生人數卻大約總是維持在 AB 考生人數的三分之一；詳見表二。因為 BC 包含 AB，應該沒有或很少人「跨考」，所以兩科的考生人數總和可以視為所有選考微積分的人數，而這些學生起碼在高中選修了一年的微積分預修課程；見表一之第三列。

自 2005 年以來，美國每年大約有 310 萬名高中畢業生（近年美國的高中畢業生人數在遞增中，預估 2018 年將有 330 萬名）[3]。對照表一第二列，每屆只有略低於 9% 的高中生選考微積分 AP 檢定。

兩種微積分考試都進行 3 小時 15 分鐘，分成兩節。第一節 105 分鐘考選擇題（皆為五選一），前段 55 分鐘的 28 題禁止使用計算器，後段 50 分鐘的 17 題可以使用計算器，某些題目非用計算器不可。第二節 90 分鐘考非選題，前段 45 分鐘考三道需要使用計算器的題目，後段 45 分鐘考另外三道禁止使用計算器的題目。考生在後段時間可以繼續寫前面三題，但是不准使用計算器。雖然選擇題有 45 題，非選只有 6 題，但這兩部分的成績各佔總分的一半。

AP 考試可以使用具備畫圖功能和求數值解、做數值微分或積分的計算器，甚至准許可記憶程序的功能，但禁止可用鍵盤或手寫版輸入程式的計算器。隨著科技的進步，AP 微積分課程的內容和准許使用計算器的範圍，最近經常更新。

美國的這個 28 萬人的數學考試，可以一次考半天，也可以將科技工具（繪圖式計算器）融入考試。我們的指考是個不到 10 萬人的考試，卻始終堅持較短的時間和不准使用工具。較短的時間等於較少的題目，較少的題目導致較大的壓力。堅持這個傳統的理由，究竟是文化的？還是經濟的？還是社會的？我甚至不知道到哪裡去討論這個問題，所以順便記在這裡。

表一・美國 AP 檢定考試微積分考科之報考人數

年度	2005	2006	2007	2008
AB	180,661	190,954	204,546	215,086
總數	234,018	248,273	267,160	281,871

表二・美國 AP 檢定考試微積分 AB：微積分 BC 之考生人數

年度	2005	2006	2007	2008
比例	3.4:1	3.3:1	3.3:1	3.2:1

### 參考文獻

- [1] 美國大學委員會公布的 AP 微積分課程與評量指引，”AP Calculus Course Description,” College Board, 2009 學年版. 文件檔案可由網路下載，網址是 [http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/ap08\\_calculus\\_coursedes.pdf](http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/ap08_calculus_coursedes.pdf)
- [2] 美國大學委員會公布的 AP 微積分教師手冊，”AP Calculus Course Teacher’s Guide,” College Board, 2007. 文件檔案可由網路下載，網址是 [http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/repository/ap07\\_calculus\\_teachersguide\\_2.pdf](http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/repository/ap07_calculus_teachersguide_2.pdf)
- [3] 美國教育部的國家教育統計中心網站，本文資料來自 <http://nces.ed.gov/programs/projections/projections2017/>