

美國 AP 微積分課程的啟示

—高中生為什麼要學微積分？

單維彰 97 年 12 月 15 日

上個月，我們在本欄中檢視了美國高中生的微積分預修課程（也就是 AP 的微積分 AB 與 BC 課程）與檢定考試。現在，我希望提出一些值得我們探討的問題。

首先，美國每屆 310 萬名高中生當中，只有略低於 9% 的學生選考微積分 AP 檢定。台灣的公私立高中畢業生（不含高職部門）每屆大約 14 萬人 [1]，例如今年學科能力測驗的報考人數是 14 萬 2 千人。因為產業結構與中等教育定位的差異，台灣高中生對於預修微積分的需求率可能比較高，就算是兩倍的 18% 吧，那就是 2 萬 5 千人。

就比例來看，將大學程度的微積分內容正式放在高中課程綱要當中，應該是不恰當的。就算列為選修之數甲內容，以目前台灣超過 30% 的高三學生選修數甲來看，在比例上也是需要審慎評估的。所以，讓少數能力足夠的學生，有機會到大學去選修微積分，以抵免高中（和大學）的對應學分，是比較可行的方案，也是有些人的願景。但是，在上課時間和學分認定兩方面，都需要高中和大學兩個行政體系的配合，目前還有困難要克服。若是參照 AP 的作法，改由高中教師授課，則以每班 45 人計算，需要開 555 班。就算每位老師開兩班，也需要培訓至少 270 名可以負責微積分課程的高中教師，才能實行這個計畫。

其次，有點不倫不類地，若把微積分 AB 的考生和台灣指考科目數乙的考生視為升學目標類似的學生，而 BC 考生與數甲考生類似，近年數乙和數甲考生的人數比例大約維持在 1.8:1 附近 [2]。對照微積分 AB 考生大約是 BC 考生的三倍來看，台灣的升學科系結構與美國還是大有不同的。這或許顯示，台灣的數乙考科人數、以及它對應的大學主修學生人數，還有成長的空間。

最重要的，其實是一個理念層次的問題：『高中生為什麼要學習微積分？』難道微積分的威力能夠解決許多高中時期的數學考題？就台灣較早期的課程來說，這是成立的。包括多項式和三角函數疊合的極值問題，圓、橢圓和其他二次曲線的切線相關問題，方程式求近似根或多項式求近似值的問題，不定型式的極限問題，都能利用微分技術而簡化或加速處理過程。既然如此，我們更該反省的是，運用微分技術能夠比較輕鬆地解決問題，為什麼不等到微積分課程再學這些課題，而要求學生用「初等」方法繞一趟遠路？在授課時數受到嚴重拘束的這個時代，課程的設計應該更注重效率而割捨這些可以用更高技術處理的課題。是故，從 95 暫綱開始，高中課程就保留了微積分的前置經驗，卻移除了某些適合以微積分處理的問題。

如果高中數學剔除了適合以微積分處理的課題，為什麼高中生還是要學習微

積分？不僅美國透過 AP 課程提供微積分，英國體系（包括新加坡和香港）在大學預科提供微積分，日本的高中課程標準也是自高二起學習微積分。張海潮教授 [3] 說『至少有兩個答案』：

1. 微積分的發明在數學及相關問題上的突破，值得高中生學習。
2. 微積分的方法對高中階段能夠解決的問題有所幫助。

我希望提供第三個理由：

3. 因為大學專業課程的需要。

當我們五年級生讀大學的時候（那已經是四分之一個世紀以前的事了），大學一年級就是學微積分、普物、普化，其他理工學科的專業科目都從大二開始。過去這四分之一個世紀，科學與工程發生了那麼多的創新與變化，他們的大學基礎教育當然也跟著演變了。在緩慢而不被注意的演變之後，如今每一個學科都比以前更早也更大量地使用數學模型，其中最主要的模型就是微分與積分。除了傳統的物理、電機、機械以外，至少經濟與金融也是如此；許多其他學科則透過統計模型的需求而使用微積分。因為這樣的演變，許多學門的大學教育，已經等不及二年級才開始運用微積分，而在大一的入門課程中就有以微分方程或積分型式所描述的模型。

如果台灣的高等教育能夠自行設計課程，銜接我國的高中課程，不理會國際的課程發展趨勢，那也就沒問題了。但是，事實上台灣的高等教育習慣採用美國教科書，更有甚者，經常採用美國較高年級學生的教科書。這使得許多科系的大一入門專業課程就已經需要微積分，而共同必修的「正式」微積分課程，當然就顯得緩不濟急。

專業課程提早引用微積分的演變，並非美國所獨有。我們知道日本的高等教育早就「本土化」了，他們有完整的日文教材，自成一個體系，可以不必理會美國的發展。但是，日本的高中數學課程也提早引入了微積分。這是不是也給我們一個提示：這或許是學術界的發展所牽動的課程演變，而不是少數國家製造的風潮。那麼，微積分在課程設計中的位階，是否應該稍微提前一點以因應整個高等教育的需求？

順帶一提，根據陳宜良教授蒐集的一套現行日本高中教科書，數學 II（第二學年）的內容是：多項式（含分式與不等式），複數系，直線與圓，三角函數，指數與對數函數，微分法，和積分法。整本書只有 200 頁，在這些條目之下並無深廣的內容，都是最核心的題材。

從 95 暫綱到 99 課綱，我們的高中數學課程雖然在高三提供選修的微積分，都是非常淺的淺嘗即止，著重於微分是「瞬間」變化率而積分是變化總量，或者導數是切線斜率而定積分是曲線下面積這樣的基本概念，認識微分與積分互為反運算的性質，在技術上僅止於多項式的操作。如此的設計固然符合現實：(1) 數學授課時數的限制，與 (2) 師資培育需從長計議，卻也不失為合情合理的設計：在高中時代，建立微積分的基本認識，使得學生能夠銜接大一專業入門課程中提及的微分或積分模型，卻仍將正式而專業的微積分教學，留給大學一年級的共同

必修課程。

最近一兩年，台灣有一些大學（包括中央大學）提供「微積分先修課程」給推甄和申請管道入學的大一新生，讓這些在五月已經確定入學的新鮮人有機會提早在暑假期間完成第一學期的微積分課程；如果順利的話，可以在大學一年級的上學期就完成整個學年的微積分課程。這種課程設計的理由，除了爭取推甄和申請的學生以外，總該有些更高瞻遠矚的理由。中央大學的理由是，讓學生有更充裕的時間達成「五年雙學位」。然而，根據前面所述，筆者猜測這群先修的學生，在大一其他專業課程中，應該有較深的學習經驗，也比指考入學同學更能掌握專業課程中以微分或積分作為模型的課題。我想，應該有許多學者對這個猜想感興趣，而它的答案還有待研究。

最後一個小反省是：台灣的「傳統」只安排兩學期的微積分課程，未必對所有大學一體適用。既然美國有許多大學把微積分拆成三個學期來教，台灣的某些學校以及大學的管理規章，是否也該考慮不必墨守成規，將微積分改成三個學期的課程？否則，對某些學生而言，不是學得不夠就是學習的梯度太陡而難以達到教授的期望。

參考文獻

- [1] 教育部統計處網站，本文資料來自《高中職概況》表格
http://www.edu.tw/files/site_content/B0013/overview24.xls
- [2] 朱惠文，陳慧美《九十七年度指定科目考試試題分析---數學考科》大學入學考試中心，97年11月。
- [3] 張海潮《高中生為什麼要學微積分？》高中數學學科中心電子報第31期，97年10月（上網搜尋即可找到）。