

理論與定理

單維彰

有一天和語言中心的英語老師聚會，有人問到 theory 和 theorem 有何差異？就中英翻譯而言，只要回答 theory 是「理論」，而 theorem 是「定理」即可；感謝有人繼續問這兩個名詞有何不同，為何 theory 有個副詞 *theoretically*，但是 theorem 卻沒有所謂的 *theorematically*？使得這個話題並沒有很快結束。最後，又有人問，那麼數學定理就是「真理」囉？我在後面回應這個問題。

理論是大家比較熟悉的，凡是經過觀察有限幾個相關的現象，做成一般性的解釋或推論，就是一個理論。例如「氣壓下降就表示會下雨」和「他只有心情不好的時候才喝酒」都是理論。在這個意義之下，人人都知道理論是不準確的，有時候會不靈的。所以，當人們說「理論上」(*theoretically*) 的時候，多半意味著，以下的敘述可能是錯的，或者事實上不僅只如此。

而定理則完全是人的心智創造，用人自己創造的語言，定義了某些觀念，再以演繹性的論述「證明」其正確性。例如「偶數的平方也是偶數」和「令 a, b, c 為整數，如果 $a < b$ 則 $a + c < b + c$ 」都是定理。

若說理論都是歸納而得，顯然昧於事實。我們怎能相信，牛頓在他那個滿地泥濘、最平穩的交通工具還是鐵輪馬車的時代，可以只憑觀察而歸納出「慣性定律」(不受力的物體以等速運動)？可見理論也是或多或少的心智創

造物，有些人僅憑極少數而且誤差極大的觀察，就憑空創造出來一套規則或解釋，成為理論。越是被尊為「偉大」的理論，當然需要越不尋常的創造力；例如牛頓「力正比於速度的變化率」理論和愛因斯坦的「光速是絕對的，時間和距離反而是相對的」理論。所以理論和定理的差異，並不在於歸納與演繹的兩種思考方式，而是在於客體與主體之分。

當研究對象不是人類的創造，例如行星的軌跡、人的生老病死、物種的變異和滅絕、星體的紅位移等，我們除了觀察以外還能做什麼？這就是說，我們是客體。有些對象雖然是人類造成的，例如朝代的興替、時尚的流變、金融的蓬勃或崩潰，但牽涉的人實在太多，多到任何個人都只能身不由己地隨波逐流，既不可能控制也無力影響，於是也被認為是事件的客體。身為客體，不論有多大的智慧，多高的創造力，也只能獲得理論，不可能產生定理。

只有針對人類自己創造的概念或事物，也就是說，只有當人自己就是主體的時候，才能形成定理。這樣的例子並不算少，所有的藝術，包括建築、雕刻、音樂、繪畫，以及非常重要的——語言，都是人類的創造。但是，藝術涉及情感，情感受時尚和心靈的影響，而這兩個後者都不是人類本身的創造，所以很難產生定理。至於語言，在其邏輯和哲學的部分，的確有定理可言，但是其隨時代而意義變遷，以及隨著溝通而交互影響的部分，卻又由不得

人作主了；這就是語言學最迷人之處。至於文學（包括神話與傳說）、宗教與哲學這三種創造物，請容我有意地遺漏它們吧。

所以，現在只剩下兩種主要可以產生定理的人類創造物了：「數學」和「電腦」。有一段時期，也許現在還是，學者們揶揄「計算機科學（computer science）是一個「矛盾修飾法」（oxymoron），因為電腦明明是人的創造，完全聽命於人的規畫，按照電子閘道所形成的電路邏輯，它的行為是完全可掌握的，不需觀察歸納與實驗，何來科學之有？

當一個自然現象不符合理論，我們不可能責備大自然（mother nature）做錯了。既然不能怪她不守規矩，只好回來修改自己的理論；例如那矛盾於乙太理論的光速實驗，作廢的只能是乙太理論而不是光速絕對的現象。相對的，當一個電腦程式出錯的時候，我們（正常來說）不會怪罪製造硬體的公司，卻會咒罵程式設計師或者出產軟體的公司，便反應了我們對於電腦之內有定理的正確認知。

有一派科學哲學認為科學理論和數學定理的接納，都是一種社會協商的機制。這個論點始終不能獲得科學與數學圈內人的認同。任何一個理論或定理的驗證，的確都經由不同地區，經常也是不同文化，甚至還是不同時代的同儕，來共同確認，並經由圈內的通訊而流傳，乃至於被接受。但是，我們實在不認為這是像投票或時尚一樣的社會協商過程。

基於客體和主體的差異，理論的驗證靠的是「證據」（evidence），而定理則是靠「證明」（proof）。證據就是更多符合理論以及其推論的事實，經常以精巧設計並嚴格執行的實驗或採集結果提出。而定理所述的每個觀念都是人自己定義的，所以我們完全知道它的性質與意義，因此可以論述其正確性。這種稱為「證

明」的論述，成為一種特殊的「文體」。

所有的理論都是不能絕對肯定的，只要某天某人發現（並且被專業同儕確認）一個違背理論的證據，那個理論就錯了，即使不被揚棄，也至少得做修正。相對的，經過驗證而被專業同儕確認（通常也包括時間的考驗）的定理，是絕對正確的。當有人算出矛盾於定理的答案時，不會懷疑定理而是回頭檢查哪裡算錯了。語言中有說「理論上」的必要，就反應理論可能錯誤的認知。既然定理不會錯，就沒必要說「定理上」，只需說「根據定理」就行了。

按照前面的說法，看來定理是絕對正確的，這難道是說數學定理即是「真理」嗎？不是的。把數學比做「真理」是我最感到毛骨悚然的「恭維」了。

我不知道什麼是「真理」，但是想要說說「真理」是什麼。定理是有前提、有假設的，只有在符合前提和假設的條件之下，結論才是絕對正確的；就連這個「正確」都還是以其在數學定義的意義之下而言，數學命題並不指涉超出定義範圍的所有延伸或影射。例如「令 a, b, c 為整數，如果 $a < b$ 則 $a + c < b + c$ 」這個定理，只保證了當 a, b, c 都是整數，而且 $a < b$ 的情況下， $a + c < b + c$ 才是絕對正確的。如果你認為當 a, b, c 是分數時也正確，需要重新證明一遍。而且命題中的 $+$ 和 $<$ 也都有嚴格的數學定義，不容隨便引申和解釋。

相對地，真理是「不論如何，它一定而且永遠是對的」。我認為，再也沒有任何一種人類的發明，能像「真理」一樣製造那麼多的仇恨，折磨那麼多的心靈，塗炭那麼多的生命。因此，我（個人）實在不希望有人認為數學之中有任何的「真理」。

單維彰

任教中央大學數學系