微積分之意義與價值

單維彰・中央大學數學系

民國百年4月25日@逢甲大學首演

一個哲學（自然哲學）

- 一個量不但可以和另一個量成正比
  - 等速運動的位移與時間關係
- 一個量可以跟它自己的變化率成正比
  - 高溫物體的降溫速率正比於它和環境的溫差（牛頓冷卻定律）
  - $\dot{T} = -k(T - T_0)$

第二個哲學

- 「力」的作用現象，是速度的改變
- 「力」正比於速度的變化率，或位移的二次變化率
  - $F = ma = m\ddot{x}$
- 重寫虎克定律（彈簧的恢復力正比於變形的長度）
  - $\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$

第三個哲學

- 兩物不必相觸也可以有「力」的作用
- 萬有引力 $\ddot{\mathbf{r}} = -GM\dfrac{1}{r^3}\mathbf{r}$
- 自由落體 $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g$

極坐標系出名門

- 圓錐曲線的極坐標方程式（焦點之一爲原點）

$$r = \frac{c}{1 + e\cos\theta}$$

- 當離心率 $e<1$ 時是橢圓

微積分—哲學的實踐方法

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

Mathematical Principles of Natural Philosophy

自然哲學的數學原理

1687年7月5日

微分：從特例發現通則 (1/2)

- 令 $f(x)$ 是多項式函數，餘式定理

$$f(x)=q(x)(x-a)+f(a)$$

- 所以 $f(x)-f(a)$ 必被 $x-a$「整除」

  其商爲 $q(x)$

- $a\le x\le b$ 的平均速度是從 *a* 到 *b* 的割線斜率

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=q(b)$$

微分：從特例發現通則 (2/2)

- 在這「一瞬」的速度定義爲

$$q(a) = f\,'(a)$$

- 其他函數也都用這個辦法：

先定義 $q(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

再「設法」計算 $f\,'(a) = q(a)$

（試試看 $f(x) = \sqrt{x}$ 或者 $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ ）

積分：「一個合理的假設」(1/2)

- 令 $x = x(t)$ 是在 $a \le t \le b$ 的位置

  （給定參考坐標）

- 如果速度是 c（等速運動）
- 則總位移是「曲線下面積」$c(b-a)$

積分：「一個合理的假設」(2/2)

- 如果在每「一滴滴」時間*dt*內以等速度 $\dot{x}$ 運動，則一小段位移是： $\dot{x}\,dt$
- 對每一個從 *a* 至 *b* 的 *t*，把全部的小位移 $\dot{x}\,dt$ 加起來，記作 $\int_a^b \dot{x}\,dt$
- 也應該是「曲線下面積」。（轉而定義了「面積」。）

微積分基本定理 (1/2)

- 「位移」當然等於「結束時的位置」和「開始時的位置」之差

$$\int_a^b \dot{x}\,dt = x(b) - x(a)$$

- 永遠將參考坐標的原點設定在開始時的位置，則「每個」結束時的位置就是 x 在「那個」時間的位置　$\int_a^t \dot{x}\,d\tau = x(t)$

微積分基本定理 (2/2)

- 所以，積分（反微分）就可以用來求解「與自己的變化率成正比」的等式（微分方程）
- $\dot{T} = -k(T - T_0)$ ➔成比例下降的指數函數
- $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ ➔簡諧運動的三角函數
- $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g$ ➔自由落體和自由拋射物的所有問題
- $\ddot{\mathrm{r}} = -GM\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$ ➔「算出」地球繞日的橢圓軌

微積分—諸神遠去，人性覺醒

天體的運行　　慧星的軌跡
乃至潮水的漲落
皆因其近乎神聖的心靈
而首次展現

微積分—計算方法 (1/2)

- 經由對『無窮』的理解與掌握發展而成的一套超級計算方法

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + \binom{r}{n} x^n + \ldots, \ |x| < 1$$

微積分—計算方法 (2/2)

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 + \ldots$$

歐拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

平面的秘密 (1/2)

平面 點P

直角坐標 點 $P(x, y)$

複數平面 點 $x + yi = re^{i\theta}$

平面向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

平面的秘密 (2/2)

- 令$e^{i\alpha}=a+bi$ 和 $e^{i\beta}=c+di$爲單位圓上的複數，則

$$\frac{a+bi}{c+di}=(ac+bd)-(ad-bc)i=e^{i(\alpha-\beta)}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$$

揭開了向量的原型，坐標不再只是被動地記錄點的位置，釋放了坐標本身的威力

（$\triangle ABC$ 的面積是 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$）

就像物理學家解開了原子的秘密一樣

威力巨大而影響深遠

微積分200年 (A)

- 1643年

  牛頓誕生，鄭成功驅逐荷蘭人統治台灣，明崇禎景山自縊

- 從「台海戰史」化約而看國力：
- 西班牙人 < 荷蘭人 < 鄭成功 < 明朝官兵 < 清朝官兵

微積分200年 (B)

- 1843年

  漢彌爾頓在金雀橋上刻下$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$

  英國國會通過對中國宣戰，發動「鴉片戰爭」，割據香港

- 200年間，何致如此？

  （歐拉公式就發生在這200年的半途。）

微積分—腦力的釋放

- 將可以從事智力勞動的人口比例，
  從 10% 躍進提升到 40%
- 讓國民教育開始有意義

電子計算機—腦力的再次釋放

– 將可以從事智力勞動的人口比例，
從 40% 躍進提升到 60%

– 讓終身學習開始有意義

What’s (probably ... likely ... very likely) Next?

矩陣計算 ← 線性代數 ← 向量

The End