

尺規作圖複製長度

所謂嚴格的尺規作圖就是只准使用圓規和無刻度直尺的作圖。而且不許用圓規的張角來複製長度。想知道尺規作圖怎樣複製長度嗎？

單維彰・2009年4月2日

有些教科書，要人張開圓規，將腳和筆分別對準一根直線段 AB 的兩端點，把腳移去 C 點，畫出一點 D ，則得到與 \overline{AB} 等長的 CD 線段。這就是所謂的『複製線段』。以今日製造圓規的技術，的確可以這樣複製線段。但是，這卻不是所謂的『尺規作圖』。尺規作圖是古希臘人定的規矩，你也可以將它視為一種智力上的遊戲規則。在實用上，當然不必固守古人的規矩。不過，如果要認真執行所謂的『尺規作圖』，當然就要認真地服從當初定下的遊戲規則。否則，就別說自己是在尺規作圖。

複製線段是一個極為基本的幾何操作，所以，在歐幾里得的《幾何原本》裡面，它是編號第 2 號的命題。而 2 號命題需要引用 1 號命題，所以我們從命題 1 說起。

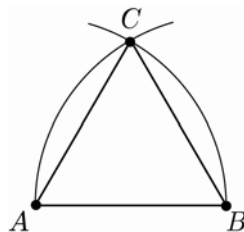
說來有趣，希臘古人不許如上述複製線段，但是准許用圓規對準一條線段的兩端點來畫圓。當我們說『以 A 為心， \overline{AB} 為徑畫圓』，其操作型定義就是說：將圓規的腳定在 A 點，筆對準 B 點，畫圓。這就是命題 1 的操作方式。

命題 1

給一個已知線段 AB ，做正三角形 ABC 。

[解]

以 A 為心， \overline{AB} 為徑畫圓。再以 B 為心， \overline{AB} 為徑畫圓。則兩圓在直線 AB 的一側有一個交點，令其為 C 。則因為 $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$ ，所以 $\triangle ABC$ 是一個正三角形。參閱下圖。

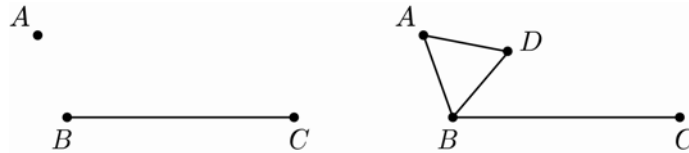


命題 2

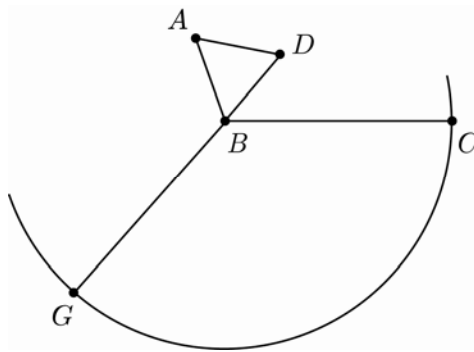
給一個已知線段 BC 和一個已知點 A ，做一點 L 使得 $\overline{AL} = \overline{BC}$ 。

[解]

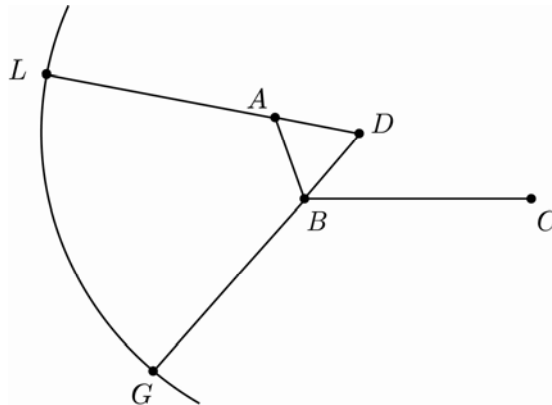
以下圖為例，假設給定的 BC 線段和 A 點如左。由命題 1 可做正三角形 ABD ，如右。



以 B 為心， \overline{BC} 為徑畫圓，此圓交 DB 之延長直線於 G 點。如下圖。則 $\overline{BG} = \overline{BC}$ 。



再以 D 為心， \overline{DG} 為徑畫圓，此圓交 DA 之延長直線於 L 點。如下圖。



則因為 $\overline{DL} = \overline{DG}$ ，但是 $\overline{DG} = \overline{DB} + \overline{BG} = \overline{DB} + \overline{BC}$ ，而 $\overline{DL} = \overline{DA} + \overline{AL} = \overline{DB} + \overline{AL}$ 。

所以可約去 \overline{DB} 而得到 $\overline{BC} = \overline{AL}$ 。

命題 2 並沒有限定複製的線段在哪一條直線上。如果 A 點在一條給定的直線上，而我們要在那條直線上找到一點 H ，使得 $\overline{AH} = \overline{BC}$ 。也就是說，我們要

在一條特定直線上複製 BC 線段。那只要在找到命題 2 的 L 點之後，以 A 為心， \overline{AL} 為徑畫圓，此圓與給定直線的兩個交點都可以是所求的 H 點。