從平行線到三角形的內角和

單維彰 2010 年 11 月 2 日

《幾何原本》第一卷之**定義 27**，也就是最後一個定義：

> **平行直線**是在同平面內向兩個方向無限延長，不論在哪個方向都不相交的直線。

公設 5，也就是最後一條公設，被稱爲**平行公設**：

> 同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角之和小於兩個直角，則這二直線經無限延長後，在這一側相交。

《幾何原本》並沒有定義平角和周角，只定義了**直角**（定義 10）：平面上兩相交直線所造成的四個角皆相等時，每個角都是直角。所以「兩個直角」就是一個平角。學生不該總是講 90 度角或 180 度角，因爲「度」是測量單位，不是角的概念。

另外，《幾何原本》未必「極度」嚴謹，還是有許多訴諸於語言本意和直覺認識之處。這是所有基礎語言教材同樣面臨的問題：語言中必然有無法用更基礎之觀念解釋的觀念。例如：**意義**、**美**；而數學是一種語言。例如，在命題 27 中觸及**錯角**，在平行公設中觸及**內角**，都沒有事前定義。

《幾何原本》直到命題 27 才開始觸及平行公設。**命題 27**：

> 如果一直線和兩直線相交所成的錯角相等，則這二直線互相平行。

這個命題須要平行公設以及三角形任一外角大於兩個遠內角（命題 16）。其實外角等於兩個遠內角的和，但是現在還不能證明。後人因此發現：平行公設其實等價於『三角形內角和等於一個平角』之性質。

命題 28：

> 如果一直線和兩直線相交所成的同位角相等，或者同側內角的和等於兩個直角，則這二直線互相平行。

這個命題須要對頂角相等（命題 15），或應用等量公理，就可引述命題 27 而成立。

命題 29：

> 一直線和兩條平行直線相交，則所成的內錯角相等，同位角相等，同側內角的和等於兩個直角。

這顯然是命題 27 和 28 的逆命題。造成了兩平行線與三種交角的等價性質。證明須要反證法的邏輯、等量公理和平行公設。

命題 30：

> 一些直線平行於同一直線，則它們也互相平行。

結合命題 27, 28, 29，並引用等量的遞移律。

命題 31：

過一已知點，做一直線平行於已知直線。

這是一個**作圖題**，有如命題 1 和命題 2。我們也可以說它是一個「建構性的證明題」。過程須要「複製角」的程序（命題 23），再用命題 27 或 28 皆可。

後來的書籍中，經常用另一個敘述取代平行公設：『在平面上，過線外一點，有唯一一條平行直線』。這是命題 31 和（原本）平行公設的引伸；此二敘述等價。

命題 32：

三角形任一外角是兩個遠內角的和；而三個內角的和是兩個直角。

用命題 31 做一條輔助線，再用同位角、內錯角（命題 29），就一舉處理了命題 32 中關於三角形的兩大事實。