平均律與對數律

單維彰・2010年12月12日

關於音樂與數學的科普作品很多，這篇短文沒有能力展現一個大歷史，只想揭示一個議題：在西方文明的演進中，音樂的律制從純律到十二平均律的演進，正好相當於數學在數的概念上從有理數到實數的演進，在測量上從精確分數到近似小數的演進，在技術上從代數到分析的演進。爲什麼這兩種智識文化的演進發生在同一段時期？原因可能是，當時在這兩種文化圈子裡的，是同一幫人。

我不確定所謂『禮樂射御書數』具體學習了哪些音樂和數學，也不知道中世紀歐洲教會學校 (cathedral schools) 四學科 (quadrivium：算術、幾何、音樂、天文) 具體學習了什麼音樂與數學。但是這至少說明了：曾經有一個時代，知識份子將音樂和數學視爲基本學養的一部分。那個時代，比起我們熟悉的近代，還頗長久的。讀著音樂學的歷史，我們見到許多熟悉的名字：從畢達哥拉斯（有許多學生一直不相信，這就是畢氏定理據以命名的那位古希臘人），伽利略、刻卜勒、笛卡耳，一直到牛頓。這一點共通性，到了現在，特別是在台灣這個地區的當代，簡直是遙遠得透著不可思議的古怪。

頻率與律制

音高是相對的。每個人都知道，只要你的音域夠廣，就可以從任何一個起音，清唱任何一首歌（所謂的轉調或升 key 或降 key）。一個經驗老到的伴奏樂隊，可以隨時配合歌者的音頻而調整他們的伴奏，使得伴奏和主唱的聲音是和諧的。

雖然音頻可以（理論上）連續變化，就像我們的喉嚨或者小提琴，可以在某個某個範圍內發出任何頻率的聲音，但並不是任意頻率配在一起都是和諧的。這就是爲什麼會有音律的制度：**律制** (Temperament)。律制規定了，相對於某個基準的音頻，有哪些頻率的聲音是可以（或者說應該）用來製作音樂的。

然而，在某種程度上，什麼樣的聲音叫做「和諧」，不完全是內建於基因的，而有很大一部分是後天養成的；就像什麼樣的男人叫做「帥」一樣，是社會（和傳播媒體）的產物。這就是爲什麼，音樂，可能僅次於語言，是最具有民族特色的文化產物。就算我們完全不懂，也能大體上明白地分辨印度音樂、阿拉伯音樂、中國音樂和西方音樂的不同。

總之，現在大部分人士在學校裡所受那聊勝於無的音樂教育，都是歐洲的主流音樂。所以，我們也只能用這一套術語來溝通本篇所要談論的概念。關於「和諧」，一個跨越民族的共識是：頻率爲 1:2 的兩種聲音是和諧的。兩倍頻率的音稱爲「高八度」的音。所以，如果一種律制在 $[c, 2c)$ 頻率範圍內制訂了幾種頻率的聲音，則 $[2c, 4c)$ 就自然規定了它們高八度的聲音。同理，$[c/2, c)$ 就規定了低八度的聲音。在頻率上，它們是指數關係：往上是 2 倍，4 倍，8 倍…，往下是 1/2 倍，1/4 倍，1/8 倍…；但是在聽覺上，它們是「平移」關係：這就只能

意會不能言傳了。頻率並不需要無止境的升高或下降，因爲人的耳朵大約只能聽到 20Hz 到 22,000Hz 之間的聲音。

所以，就像數學的「以簡馭繁」思想，音樂的律制可以只在「八度音」的範圍內討論，也就是在 $c \le x < 2c$ 的範圍內挑選幾個頻率出來制訂一組音階。音階的個數，少的至少有 5，多的多達 43。我們定義平均律爲相鄰兩個音階之頻率比值皆相同的律制。例如只挑選五個頻率：

$$c \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < 2c$$

則平均律要求

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \frac{x_5}{x_4} = k \text{ 。}$$

如果知道 x_1 和 x_3 而求 x_2，其解就是 x_1 和 x_3 的幾何平均 $\sqrt{x_1 x_3}$。那位著名的伽利略的父親，文森左 (Vincenzo Galilei, 1520--1591)，從古希臘數學典籍中發現了它的幾何解法。但是，如果給定 x_1 和 x_5 而要求中間的 x_2, x_3 和 x_4，可就不簡單了。因此，早期的律制都不是平均律。

數值實驗

一個單純的頻率爲 k 的聲波（每秒震動 8 個週期）可以用函數 $y = \sin 2k\pi x$ 來模擬，例如 Matlab 指令

```
x=linspace(0, 1, 301); k=8; plot(x, sin(2*k*pi*x), '*-')
```

可觀察頻率爲 8 的簡諧運動波。若以電腦軟體來模擬聲波，則只能產生數位訊號，再由音效卡還原成類比的聲波。例如以上指令所產生的圖片中，其實只有 301 個點，視覺上的「函數圖形」只是在相鄰兩點之間連上直線段的效果。如果在 $n \le x < n+1$ 之間等間隔取了 f 個樣本點，稱其取樣頻率爲 f；例如以上指令的取樣頻率是 300。

只要給 Matlab 一個數值介於 ± 1 之間的向量，再設定取樣頻率，它的 sound 指令就能透過音效卡轉換成類比電波，再經由擴大機和揚聲器發出聲波。例如

```
Load handel
x=(1:length(y))/Fs;
plot(x, y); axis([0, max(x), -1, 1])
```

可載入一個向量 y 和取樣頻率變數 Fs。以上指令讓我們觀察這段聲波的圖形，其中橫軸的單位是秒。而 sound(y,Fs) 就是播放這段數位訊號的結果。Matlab 的內定取樣頻率是 8192。

自製的指令 psound(c,s) 播放頻率爲 $s_1 c$, $s_2 c$, … 的簡單頻率聲波各一秒。單一頻率聲波很難聽，與樂器發出的聲音明顯不同，這是因爲少了樂器（人聲）必然伴隨產生的泛音 (overtune)，自製指令 overtune(c,v) 播放基礎頻率 c 以及它的前四個泛音頻率 2c, 3c, 4c, 5c 各以 v_1, v_2, …, v_5 之振幅合成後的聲波（將整個訊號的強度控制在 ± 1 之內）。讀者可以用它嘗試看看，合成了泛音之後的感

覺如何？

用指令 psound(c,1), psound(c,3/2) 可以聽到頻率 c 與 $3/2c$ 的合成聲音，這是因爲 Matlab 送出第一個聲波給音效卡之後，立刻就執行第二個指令，並不會等第一段聲波播放完畢。但是，這兩個指令畢竟還是有一點點的時間差。用自製指令 hsound(c,s) 可以將頻率 s_1c, s_2c, …的聲波合成爲一秒鐘的數位訊號，並自動將整個訊號的強度控制在 ±1 之內。

純律

早期的一種律制稱爲純律 (Just Intonation)，源自於畢達哥拉斯學派對於正整數近乎神秘的崇拜，用相鄰的整數比值「定義」和諧的聲音。例如，當 c 是 Do 的頻率，則純律以 c 的 3/2 倍作爲 Sol 的頻率，也就是基本的五度和諧。4/3 倍是 Fa，它是高八度 Do 向下五度的和諧音，也就是 2÷(3/2)=4/3。5/4 倍是 Mi，它是三度和諧。而 Sol 向上五度的和諧頻率是 (3/2)*(3/2)=9/4=2×(9/8)，降八度回來，規定 9/8 是 Re。而 Mi 的五度和諧頻率是 (5/4)*(3/2)=15/8，這是 Ti。文森左時代的歐洲知識份子，開始思考它們之所以和諧的物理原因，也開始用數學方法探究爲何它們缺乏內部一致性。例如 Re 的五度和 Fa 的三度都應該是 La，從前者定義，La 的頻率應該是 (9/8)×(3/2)=27/16，從後者定義卻是(4/3)×(5/4)=5/3。純律選用 5/3，因爲它的五度和諧頻率是高八度的 Mi：(5/3)×(3/2)=5/2=2×(5/4)。

從 La 這個小小的裂縫，再加上其他和諧音和半音觀念的出現，使得純律的神聖性受到了懷疑，就像那個時代的神學受到科學的懷疑一樣。後來，文森左終於勇敢地提出他的看法是：**整數比值的和諧音根本是神話**。天下沒有真正 1:2 或 2:3 的兩根弦，也就沒有真正 2 倍或 3/2 倍的頻率，一切都是近似而已。在微小的誤差內，人根本聽不出來差異。這就是我們今天以實數做測量的觀念：給定一個單位長，剪裁一條長度恰好是 2 的繩子，與剪裁長度恰好是 $\sqrt{2}$ 的繩子，同樣是不可能的。

十二平均律

解決前述平均律之連比問題的一般性數學概念，是對數。對數是納皮爾 (John Napier, 1550—1617) 的智慧產物；配合著對數，十進制小數和實數的概念也跟著成形。到了梅仙尼 (Marin Mersenne, 1588—1648) 的時代，十二平均律 (12-TET: Twelve-Tone Equal Temperament) 的概念已經出現。它把 $\log c$ 和 $\log 2c$ 等分 12 段，再取指數還原，而得到一段八度音之內的 12 個全音與半音。有些中文文獻將此種律制稱爲「等律」，使它有別於其他被稱爲「平均律」的調音規則，例如巴哈 (Johann S. Bach, 1685—1750) 的平均律；但是本文還是沿用比較習慣的「平均律」譯名。

梅仙尼不是數學史上的一哥級人物，以至於他的譯名非常混亂，包括莫仙尼、梅森林、梅神父等等，經常讓人以爲是不同的人。這位天主教神父是當時歐洲知識份子的軸心人物，在他建立的菁英通訊網內，包括了笛卡耳、伽利略和費瑪。 2^p-1 這種形式的質數以他命名，張鎮華教授和黃文璋教授各有一篇介紹這

種質數的科普經典之作 [1,2]。

鋼琴是完美對應十二平均律的樂器，在它的一段八度音之內，有黑白鍵共 12 個，相鄰兩個音的頻率比值都是 $2^{1/12}=\sqrt[12]{2}$。若 c 是 Do 的頻率，則升 Do 的頻率是 $2^{1/12}c$，Re 的頻率是 $2^{2/12}c$，依此類推。音高是相對的，任一個頻率都能當作基準。不過，現在的所謂 A440 國際標準規定：中央 La 的頻率是 440Hz。所以中央 C 的頻率滿足等式 $c\times 2^{9/12}=440$，大約是 261.6Hz。根據這個律制，La 的頻率應該是 Do 的 $2^{9/12}$ 倍，無理數 $2^{9/12}$=1.681… 和 5/3=1.666… 或 27/16=1.687… 的相對誤差都在「一分」以內，也就是 1% 以內，人耳應該可以接受這樣的誤差。同樣地，Re 的頻率是 Do 的 $2^{2/12}$=1.122… 倍，這個無理數和純律 9/8=1.125 的相對誤差也在一分以內。

順便一提，有些演奏家並不喜歡 A440 標準而偏愛將中央 A 調準至 442Hz；某些訓練有素或天資過人的耳朵，可以分辨 440Hz 和 442Hz 的不同。而對準一種固定頻率的程序，只在合奏時有其必要性。

音樂與律制

儘管十二平均律是目前世界上最強勢的律制，但它畢竟是某個文化在某段時期發展出來的一種律制，既不能詮釋全世界的音樂也未必是終極的結論。我想要邀請讀者一同欣賞的，並不是這個律制本身，而是十七世紀前後，西歐的知識份子社群，在全面討論科學與藝術問題的時候，所發展的共通思考方法與解決問題的哲學，我們可以簡約地稱之爲**科學哲學**。數學，是實踐科學哲學的具體方法。

延伸閱讀

[1] 張鎭華，完全數與莫仙尼質數，《科學月刊》1972 年 3 月號。

[2] 黃文璋，完全數與梅仙尼質數，《數學傳播》1997 年第三期。

[3] 劉柏宏、劉淑如，數學與音樂的對話，收錄於《當數學遇見文化》，三民書局，2009 年出版。

[4] 游森棚，從鋼琴調音談數學與音樂，《數學傳播》2009 年第一期。