高中數學的反省與回顧

單維彰 2011 年 10 月 29 日

本文所指的是（台灣的）高中數學課程內容。作者自民國 92 年起，接觸九年一貫和高級中學的數學課程綱要制訂、課程設計、教材審查及編寫、教師研習、考題評析及審定等服務性及政策性研究工作，累積了一些認識及意見。這些意見應該足夠寫一本專書，但目前先舉出適合「文化脈絡」通識課程的幾項。

正整數 vs 實數

上帝創造正整數，其他數是人的發明。
（西方數學家的一般信念）

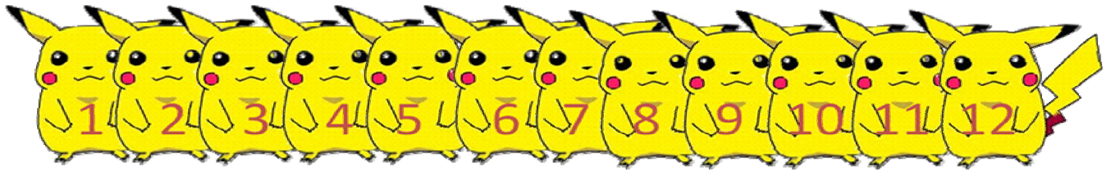
或許是因爲正整數來自於人類語言，而語言的來源已不可考，就說是上帝創造的吧。正整數的加、減（大數減小數）、乘、除（商和餘）、加減互逆、乘除互逆、除法原理，以及結合律、交換律、（乘法對加法的）分配律，都直接對應於語言，只是將日常語言改成「正規」術語而已。正整數的計算規律都有具體的意義。

人按照「正整數」的形象創造了實數，直覺地讓實數「繼承」了正整數的運算性質（「物件導向程式設計」則繼承了這個概念）。但是，無理數的乘法交換律其實「沒有道理」；例如 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 其實並不能對應正整數的乘法經驗。人們自古直覺地操作它，並用來推論 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$。直到十九世紀中葉，才有人 (Weierstrass)「發現」這個邏輯漏洞，幸好可以補上。

人創造正整數以外的數「種」，用來滿足解決更抽象之問題的需要。負數將數的觀念「向量化」：所謂負數就是（在一條直線上）方向相反的正數，例如我們稱 3 和 –3 互爲相反數。而所謂「負負得正」不過就是兩次向後轉回到原來的方向。人們在不明的意識中，直覺地將直線上的點視爲向量化的數；這個極具抽象意義的「數線」在文明中緩慢而無痛地成形。但是平面和空間中的點之向量化，則是分別在十九世紀的前半與後半，才被急速地催生。

希臘人並無負數觀念。有人以爲希臘人不知無理數，其實不然；畢達哥拉斯的時代或許不知道無理數，但是歐幾里得的時代是知道的。希臘人沒有測量和誤差的觀念，他們認爲正數就是一條線段長，它是「實際的」存在。伽利略時代的西歐才由測量的觀念重新認識實數，而正整數以外的實數變成了「觀念的」存在而非「實際的」存在。正整數的 2 和實數的 2 都寫成 2，但是實數的 2 其實是 2.0000…的意思。試想，給定一個單位長，剪一條長度是 2 的繩子，與剪一條長度是 $\sqrt{2}$ 的繩子，兩者同樣困難（實際上都不可能）。在數線上的 2 是實數的 2；數線上除了 0 和 1 以外的點，都是觀念上的存在而非實際上的存在。

因爲正整數的本質是離散的（其實「離散」被定義成與正整數的子集合可一一對應者），並不應該用數線當作模型。正整數模型應該是一列同型的物件，例如



或者

離散的數並無誤差：整數的計算絕無誤差（將絕對值很大的整數改成概數時產生的誤差，並非整數計算造成的）。而測量意義之下的實數就一定有誤差。高中數學僅有一個課題是離散的（所涉的計算均爲全數），就是排列組合；在高中數學的任何其他課題中，均應瞭解所討論的「數」皆爲實數：必有誤差（除了 0 和 1 以外）而且僅止於觀念性的存在。高中數學所須的正整數知識已經夠用：質因數分解和除法原理，可以不必再深入討論正整數的數學性質（那些是〈數論〉課題）。但是，高中數學所涵蓋的正整數的應用，卻在課程設計上還有很大的改善空間。

排列組合

『數學系都在學什麼啊？』
『大概就是學「屬屬看」吧。』
（偷聽到兩名中學生的對話）

還有什麼問題，比「數ㄕㄨˇ數ㄕㄨˇ看」更適合數學的「本意」呢？數學提供許多「不必一個一個點就能算出總數」的快速數ㄕㄨˇ法。這個技術從小二就開始了。例如『小朋友排成三列，每列有六人，請問一共有幾位小朋友？』。沒錯，乘法就是一個快速數法，而這一個例題就是「乘法原理」的最初原型。

乘法本是觀念，可以用來幫助思考與理解，並以符號的形式來簡化溝通的過程，但是它本身並不能用來簡化或加速計算。必須經過計算工具（例如 calculator 或 computer）的協助，或者查表，才能簡化或加速計算；這才能使得一個觀念或符號變成實用的工具。同樣的情況發生在許多其他地方，例如次方 7^2 、對數 $\log 3$ 、正弦 $\sin 72^\circ$ 、反正切 $\arctan 4$ ，全都是幫助思考及簡化記錄的觀念，一定要靠輔助工具或查表，才變成實用的工具。可見，九九乘法表和指對數表、三角函數表，在意義上全部都是一樣的；只是因爲九九乘法表很小，又經常須要使用，所以值得人人背誦。太大的表格當然不能背誦，但是根據經驗，記得其中一小部份經常是值得的；例如很多人能背誦 $\log 2$ ，$\log 3$ ，$\log 7$（的概數），還能背誦 1—20 的平方數以及 1—12 的立方數。

小學五年級也許會遇上另一個應用乘法原理的思考方法，例如『姊姊有四件洋裝，三雙涼鞋，請問她有幾種洋裝和涼鞋的搭配穿著方式？』。這也是一種快速的數法。這一系列非常實用的數學主題，可惜就此斷裂，直到高中二年級下學期（99 學年以前）忽爾乍現，好像 Cheshire cat 那樣閃一下便又消失了。而且，高中生學到這裡

時，通常忘了整個脈絡，而教師也忙於拋出一個接著一個的題型，學生猶如看魔術表演似的，只見撲克牌、玫瑰花、白鴿從老師的手裡飛散出來，但是仍然難以掌握此一主題的思考方法；甚爲可惜。

排列組合的思考方法大可以從（九年一貫）的統計課程中分出一些時間，將此方法循序漸進地組成一系列的課程，從小學二年級貫穿到高中數學。而思考的方法，不外乎在數學模型上分辨屬「乘法」或「加法」(併聯或串聯？或還是且？)，獨立還是相依（次方或者階乘)，次序要緊還是不要緊（排列或者組合)。而排列組合一如數學的其他主題，應該由數學模型入手，再擴及幾種標準形式的應用；而不是如現在大多數的教材，總是由題型入手。以下舉一組例子，這組例子應該位在高中數學排列組合主題之最高點。

- $n+m=5$的正整數解有幾組？
  - ✧ 分 5 顆糖給兩人，每人都有
  - ✧ 從蔬菜和肉品共挑 5 份，每種都要有
- $n+m=5$的非負整數解有幾組？
  - ✧ 分 5 顆糖給兩人，有人可全拿
  - ✧ 從蔬菜和肉品共挑 5 份，可全挑一種
- $n+m\le 5$的非負整數解有幾組？
  - ✧ 分至多 5 顆糖給兩人，有人可全拿
  - ✧ 從蔬菜和肉品至多可挑 5 份，可全挑一種

多項式

多項式是擴充了實數的一種數學研究對象
（于靖教授）
多項式之於其他函數，就像有限小數之於實數

當 n 是正整數，a_n 、a_{n-1} 、$\ldots$ 、a_1 、a_0 爲實數而且 $a_n\neq 0$ ，則

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

稱爲 x 的 n 次多項式。其中的 x 既不是未知數也不是變數，它就是一個「可以像實數一樣運算的符號」，稱爲「元」。令 P 是一個多項式，$P=0$ 是多項式等式 (polynomial equation)，我國傳統稱之爲方程式，此時的「元」具備了未知數的意義。而 $f(x)=P$ 或者令 y 依照 P 之規則隨 x 改變，使得 $y=P$ 成了多項式函數 (polynomial function)，此時的「元」具備了變數的意義。

零固然是一個多項式，但是它的次數卻不是零。這並不是一個重要的性質，只是爲了避開語言上的尷尬而已。因爲零次多項式，依定義爲 a_0x^0 ，其中 a_0 爲實數且 $a_0\neq 0$ ，所以零次多項式必爲非零的實數。

多項式不應與方程式、函數混爲一談，應認清它本身是一種數學物件，從國中起學習了多項式的加、減、乘、除。多項式的除法就像正整數的除法，根本上只有「除

法原理」一件事而已。若 m, n, q, r 是正整數或 0（但 n 不得爲 0），則

$$m \div n = q \cdots r \quad \text{等價於} \quad m = qn + r \quad （其中 0 \le r < n）$$

就是正整數的除法原理，它有具體的意義。若 P, N, Q, R 是多項式，其中 N 不得爲 0，則

$$P \div N = Q \cdots R \quad \text{等價於} \quad P = QN + R \quad （其中 R 是 0 或者比 N 低次的多項式）$$

就是多項式的除法原理。而因式與餘式定理，都是當 $N = (x-a)$ 爲一次式的特例。而當 $N = (x-a)$，多項式的除法有一特殊算法，稱爲「綜合除法」。同樣的課題在西方稱爲 Horner’s Algorithm；直接了當地說它是多項式求值的「演算法」（計算 $P(a)$ 的快速算法），以免學生誤以爲那是另一種除法。Horner’s Algorithm 就像輾轉相除法一樣，是高中數學的演算法典範：它們是「快速」算法，而且可以寫成正規的演算法形式。

雖然多項式包含了實數，多項式本身的運算性質卻像正整數，而不像實數：多項式的乘法沒有反元素，x 的「倒數」$1/x$ 不再是多項式，就好像 2 的倒數 1/2 不再是整數。多項式像正整數一樣有因式分解，所以也有公因式、公倍式、最高公因式、最低公倍式，乃至於輾轉相除法之觀念與算法，但是唯有當規定一次以上因式的首項係數必爲 1 的條件下，才有唯一的分解。例如 $4x^2 - 4 = 4(x-1)(x+1)$，若不做以上限制則有無窮多種分解，如 $4x^2 - 4 = (2x-2)(2x+2) = (4x-4)(x+1)$ 等等。而「代數基本定理」其實就是說：實係數多項式的「質因式」必爲一次式或二次式。但是，高中數學並不真正須要代數基本定理，不講也罷。代數基本定理是高中數學裡唯一不能在學生已經具備的認知程度上解釋或啓發的定理，究其根本原因，乃是此定理並非「多項式」也非「代數」的性質，它其實是「複數」的性質。

然而，就「準備大學課程」的目的而言，理工性向的學生，或有學習代數基本定理的理由：爲〈線性代數〉做準備。入門的線性代數課程，總會包含一個定理：任一 n 階方陣必有 n 個複數的特徵值。這個定理是代數基本定理的直接應用，而一般的線性代數課本並不會證明此定理。一般人固然並不須要知道代數基本定理的證明，也能理解而接受它的陳述；反正這個定理也不是一個「建構性」定理，它不能用來求得多項式的所有虛根，所以只要理解它的陳述即可。絕大多數的理工科學生，在大學裡不會再有機會在一門正規的複變函數論課程中習得代數基本定理的證明。對於部分動機較強且數學領悟力強的學生，高中課程的複數平面（複數的極式、棣美弗公式）教材中，的確可以引導學生認識代數基本定理的證明。而此證明，可能也是高中課程中，最深入認識「數學分析」之思考方法的一個課題了。

多項式與正整數的結構相似性，被用來當作抽象代數之 ring 或 integral domain 的具體範例，也是十九世紀時發展抽象代數學的動機之一，在數學內部有重要的意義。但是，此意義僅有數學專業（以及極少數的工程專業）的重要性，實在不宜放在高中數學裡。但是，多項式也是另一種抽象數學的具體範例，這種數學就與大多數科學、工程和管理領域的學生有關了，那就是〈線性代數〉。

線性代數原本只是觀念，一如指數、對數和三角。上半個世紀電子計算機的發展，使得線性代數變成實用的工具，並迅速地蔓延到非常多的領域，使得它變成（目前）僅次於微積分的重要共同數學學科；有些意見主張線性代數的重要性，在 21 世紀將

會逐漸超越微積分。

從平面向量和空間向量，我們之知道向量僅有加減、係數積、內積和外積四種運算。外積僅限於空間向量（它有特殊的物理意義），不具有一般性。內積不是向量空間內計算，因爲內積之後不再是向量。從這裡獲得抽象化的向量空間觀念：

- 有一些彼此僅能像正整數一樣做加減的東西，稱爲「向量」
- 另有一個像實數的集合，稱爲「純量」
- 向量和純量可以做「係數積」

滿足以上觀念的集合和算法，就組成了一個抽象的「向量空間」。平面向量和空間向量都是具體的例子，而多項式是一個最初步的抽象範例。試想，多項式可以像正整數一樣做加減，多項式乘以實數就是係數積，所以多項式就是某種向量空間（又稱爲線性空間）。

高中數學在多項式的「代數性質」上著力太多，對大部分學生將來的學習沒有幫助。高中數學卻在多項式的「向量性質」上著墨太少，使得大部分學生缺乏銜接大學〈線性代數〉的預備知識。舉例來說，（應用的）線性代數無法以下幾個主題：

1. 給定基底，向量空間內的每個元素都可以寫成基底的線性組合；它們的係數就可以寫成「向量」形式。

   例如令Π_3是次數不超過 3 的多項式向量空間，$v_1 = x^3$, $v_2 = x^2$, $v_3 = x$, $v_4 = 1$是一組基底，那麼$P = x^3 - 3x^2 + x - 1 \in \Pi_3$ ，因爲$P = v_1 - 3v_2 + v_1 - v_4$所以$P$在此基底之下寫成 (行) 向量 $[1, -3, 1, -1]^T$ 。

2. 任何線性映射都可以寫成矩陣形式。例如微分是線性的，令$D: \Pi_3 \to \Pi_3$是Π_3上的微分，則在上述基底之下，D 可以用以下矩陣表達：

   $$[D]_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ，注意$[D]_v$的第 j 行就是Dv_j的結果

   使得$P' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x^2 - 6x + 1$ 。

3. 變換基底使得同一個元素的坐標係數改變了。例如$w_1 = (x-1)(x-2)(x-3)$, $w_2 = (x-1)(x-2)$, $w_3 = x - 1$, $w_4 = 1$也是Π_3的一組基底，連續應用綜合除法就能算出新基底的線性組合：

   $P = q_1(x-1) + P(1) = (x^2 - 2x - 1)(x-1) + (-2)$,

   $q_1 = q_2(x-2) + q_1(2) = x(x-2) + (-1)$,
   $q_2 = q_3(x-3) + q_2(3) = 1 \cdot (x-3) + 3$,
   合併起來就是

$$P = q_3(x-3)(x-2)(x-1) + q_2(3)(x-2)(x-1) + q_1(2)(x-1) + P(1)$$
$$= 1w_1 + 3w_2 - 1w_3 - 2w_4,$$

因此，在 w 基底之下，P 的坐標係數改成 $[1,3,-1,-2]^T$。

從 v 基底換成 w 基底的映射 $T_{v\to w}$ 也是線性的，所以可以寫成矩陣。因爲

$T_{w\to v}w_1 = (x-3)(x-2)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = v_1 - 6v_2 + 11v_3 - 6v_4$，

$T_{w\to v}w_2 = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2 = v_2 - 3v_3 + 2v_4$，

$T_{w\to v}w_3 = x - 1 = v_3 - v_4$，

$T_{w\to v}w_4 = 1 = v_4$，

可見 $[T_{v\to w}] = [T_{w\to v}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。我們不妨驗算 $T_{v\to w}P$ 的坐標係數是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}。$$

4. 變換基底也使得同一個線性映射的矩陣表達改變了。但是，同一個線性映射在不同基底之下的表達矩陣皆相似！從基底變換可以導出相似矩陣的定義，而相似矩陣之間有些「不變量」，研究這些不變量就進入了線性代數的純數學範疇：例如行列式是不變的，特徵値是不變的，Jordan 分解式是不變的。在所有相似矩陣中，找到在計算上「最適當」的一個，就成爲應用數學的最重要課題之一。

以上四點幾乎就是基礎〈線性代數〉的課程大綱，雖然我的步驟做得很快，但是從上述 1、2、3 點看得出來，高中數學的行列式主題，的確可以爲大學基礎課程之一的〈線性代數〉做更有效的銜接。

但是數學的函數何其多，僅研究多項式會不會太狹隘了？那就考慮這個問題：實數何其多，只計算有限小數會不會太狹隘了？例如 $\sqrt{2}$，$\log 3$，$\sin 23^\circ$ 都是實數，但是我們實際上用到它們的小數點下無窮多位嗎？當然沒有。不是不願意，而是實際上的不可行。同理，在學過了微積分的「泰勒級數」以及工程數學或類似課程的「微分方程級數解」之後，就會明白，何其多的函數，例如 $\sqrt{x}$，$\log x$，$\sin x$，實際應用的時候都改用多項式來「逼近」它們。我們用數學函數來思考、推論，卻用多項式來計算它們的概數。

數學函數作為模型

函數的教學目標，是讓學生具備「函數感」
（陳宜良教授）

高中數學的函數教學有時過於含糊，例如線性規劃課題中的「目標函數」究竟是哪一種函數，一般教材並不交代；有時候又過於強調其計算觀：凡是有一套算法（公式），代入一個數能夠算出一個數，就叫函數了。所以，無論 sin 還是 log，即使還沒有討論它們的變化關係、圖形特徵，就直接稱它們函數了。在計算機程式語言之領域中，的確持函數的計算觀點，這樣的教法也算合理。

比較令人氣餒的是，過於強調抽象定義的函數教學。那種將函數視爲兩個集合（定義域與對應域）之間的一組特殊對應關係的函數定義，是純數學（集合論）的觀點，雖然精鍊而美麗，卻不適合高中數學。

對於絕大多數將來在科學（自然與社會）、工程、管理領域的工作者來說，數學函數作爲一種工具，主要的用途是設計成描述兩量變化關係的「模型」。所謂模型的字面意義就是具備某些「重要特徵」的假東西。大家都很熟悉火車、飛機、跑車或大型搬運機的模型，那些是實體模型。大家也都熟悉捷運、火車、客運的路線圖，這些是抽象模型。以路線圖爲例，抽象模型表現的「重要特徵」是一站與另一站的相連性與前後關係；它們之間的（時間與空間）距離並非最重要的，可有可無；它們之間的方位關係更不重要，可能無法辨識。

當一個量隨著另一個量改變的時候，所謂的數學模型的就是以一個函數來描述那變化關係。模型都是假的，而且僅保留「重要特徵」，其計算與推論的結果，撇開誤差不說，當然也僅能提供參考。但是，僅僅是參考，就已經在實用上具備高度的價值；這是數學作爲工具時的主要樣貌。

最初等的一種變化關係，就是時間與位置的關係：位置隨時間改變，也就是通稱的「運動」。小學五年級用等速運動的時間—位移表格，首次引入函數觀念。國中二年級以線型函數再闡述一次，國中三年級則初步介紹二次多項式函數。可惜這一個學習的脈絡，在高中數學課程中不一定銜接得很好。

就運動模型而言，如果橫軸 x 代表時間，縱軸 y 代表位置，因爲運動過程中的每一剎那都必有對應的位置（不能消失），且僅有一個位置（不能分身），函數的兩個「抽象定義」就顯得再具體不過了。而在此意義下檢視函數圖形，應該將靜態的圖形看成動態的變化過程。如此，微積分所學的斜率 vs 速度、曲率 vs 加速度才有意義。

我可以展示一個 Java 小工具，讓人任意拖曳控制點製造一個（不超過三次）的多項式函數圖形，然後觀察函數圖形所對應的運動意義。這個工具的特色之一，是由圖決定多項式的係數，而不是由多項式的係數決定圖。如此設計的理由，是科學家和工程師從研究對象取得的數據，自然以（描點或散佈）圖形呈現，而不會自動地寫出多項式係數。數學課程過份鎖定單一方向的思考模式：給定多項式繪其圖形，而不是從圖形決定多項式，實有昧於現實且阻礙發展數學觀念之虞。

利用這個 Java 小工具，教師很容易透過展示，讓學生認識到函數圖形的性質與

（一維）運動的關係，諸如以下所列。

(1) 線型函數就是等速運動。
(2) 遞增的函數表示向「前」的運動；遞減的函數表示向「後」的運動。
(3) 線型函數的斜率之正負號表示運動的方向（正、負是一維的向量），其絕對值表示運動的速率；簡言之，線型函數的斜率表示運動的速度。
(4) 開口向下的二次函數表示一個垂直上拋之後又落下的運動；運動的速度遞減，停頓一瞬之後往下落，而下降的速度遞增（速度是負數且絕對值越來越大）。
(5) 開口向下的二次函數圖形稱爲凹向下，表示運動的速度遞減，又說加速度爲負；開口向上的二次函數圖形稱爲凹向上，表示運動的速度遞增，又說加速度爲正。
(6) 三次函數的凹凸性推廣了二次函數的表現。一般而言，「像」一個開口向下之二次函數的部分，也稱爲凹向下，表示加速度爲負。
(7) 由三次多項式函數的觀察，察覺遞增且凹向上的函數，表示速度越來越快（加速度爲正）的向前運動，遞增且凹向下的函數，表示速度越來越慢（加速度爲負）的向前運動。
(8) 三次（或更高次）多項式函數的「反曲點」，就是運動從越來越快轉變成越來越慢（或反之）的那個時間點；在那一瞬，加速度爲 0。

我相信，上述的函數圖形與運動之直覺連結，比高中數學課程裡大部分關於函數圖形的課題都簡單，學生很容易理解（尤其是使用了適當的教具之後）並產生鮮明的印象。透過此印象鮮明的連結，函數的學習，不論是將來用它來設計數學模型，或者用來理解微積分相關之思考方法，都會有更實用的效果。

結語

數學課程設計所面臨的問題，不是數學命題，而是社會議題。命題有客觀的正確性，而議題包括了客觀的利害與主觀的得失。任何課程難免須要與時俱進；想像中，諸如〈生活科技〉這類的課程，內容較容易更新；而諸如〈數學〉這類的課程，內容較爲穩定。或許在知識內容上果真如此，但是，在教學方法、重點取捨、輔助工具上，還是有許多與時俱進的可能性。在過去的半個世紀，我國的課程綱要以大約十年一修的原則維持著與時俱進的步調。對照於科技工具所帶領的社會需求及行爲模式改變，這樣的步調應該是不令人感到放心的。計算機硬體、軟體及網路所帶來的全面性的改變，還沒有真正在數學教育的內涵中做出反應。雖然，民國 72 年版的高中數學課程揭開了「重視離散數學」的序幕，民國 84 年起宣稱重視運用科技工具的能力，民國 95 年版的綱要加入了推論統計，但是落實在教師在職成長以及學生學習成效上的表現，都還是嚴重落後的。