

文化脈絡中的數學_期末報告 102403513 資管 3A 張孟蓁

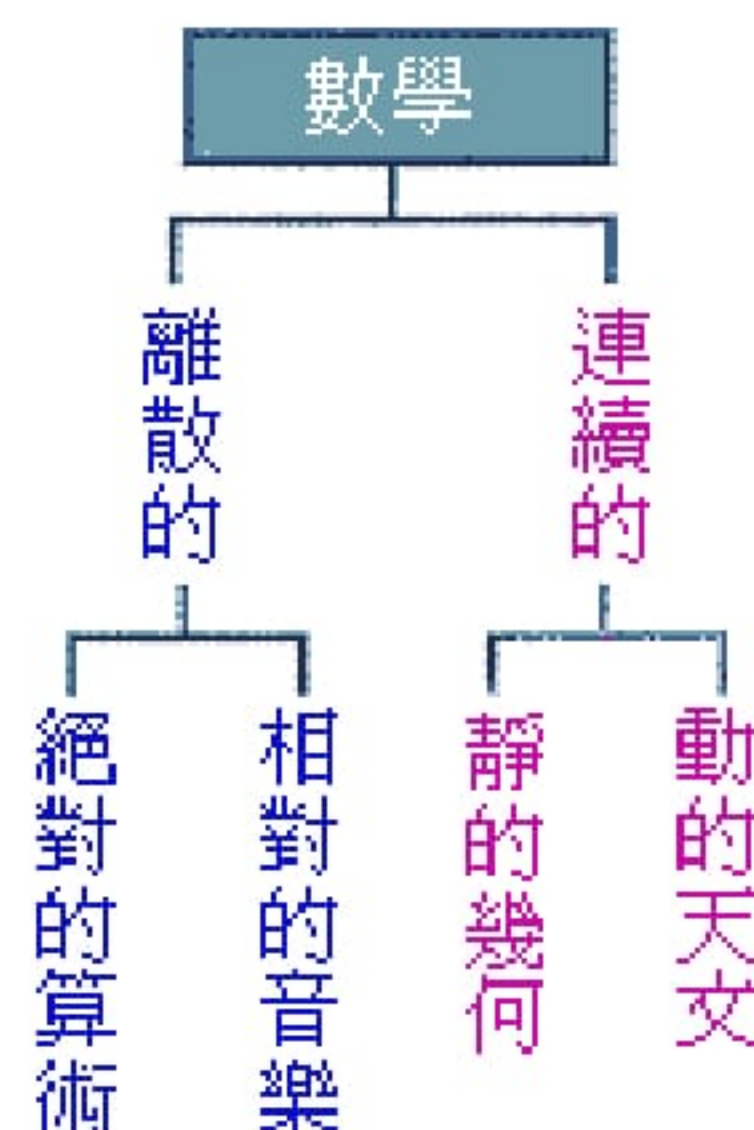
(1) 引言

根據研究，人類可以聽到的頻率範圍是 15Hz 到 20,000Hz 之間，貓和狗可以聽到 60,000Hz，而蝙蝠更可以聽到 80,000Hz。聲音是由物體振動而來，經過了數字的描述，便可以具體的了解人和動物聽覺上的差異。而哪些聲音聽起來是和諧好聽的呢？實際上一個音並無法構成音樂，必須由許許多多的音，經過「排列組合」才能構成音樂，而且裡面也必須存在著一定的「比例」關係才會好聽，由此可知數學與音樂是有些關聯存在的。

■ 由古希臘畢達哥拉斯時代來看

自古以來，西方的數學和音樂就是「一體」的，所以數學與音樂之間的關係不只是用「密切」來加以形容，它們是「不分家的」。古希臘一位天才橫溢的數學家畢達哥拉斯(Pythagoras, 540B.C, 約中國孔子的年代)，就曾經將數學作了以下的分類：

□ 圖一 畢達哥拉斯對於數學的分類



畢達哥拉斯多才多藝，在宗教、天文、數學和音樂方面都很有研究，還被稱為「樂器之父」。以下有一段關於他的故事：有一天畢氏經過一家打鐵店，被其中打鐵的聲音所吸引住了，因為鐵鎚打鐵的聲音不但有「節奏」，且相當「悅耳」；他感到驚奇，於是走到裡面去一探究竟。他發現裡面有四個人，分別拿了四個重量不同的鐵鎚，這四個鐵鎚重量的比恰好是 12 : 9 : 8 : 6。當兩個鐵鎚的重量比分別是 12 : 6、12 : 9 和 12 : 8 時，一起敲打所發出來的聲音聽起來相當和諧。他回去之後，進一步利用當時專為審度音律之用的樂器單絃琴(monochord)做了個實驗，結果有兩項重要發現：

- (1) 兩個聲音能夠聽起來和諧悅耳，跟兩絃的長呈簡單整數比有關；
- (2) 兩音絃長的比是 4 : 3、3 : 2、2 : 1 時是和諧的，它們的「音程」分別是四度、五度和八度。所以，對於畢氏而言，「音樂就是整數比」。

雖然，當時畢氏還無法利用頻率來實驗，僅能根據絃長來驗證音與音之間的比，不過，利用「五度音循環法」，由 1 出發，除了 F 音必須降低五度求得之外，其餘連續升高五度(即連續乘以 3/2)五次，再把超過八度的音降低八度(除以 2)，或低於八度音的升高八度(乘以 2)，就可以得到「畢氏音階」，如表一(蔡聰明，民 83)。

□ 表一 畢氏音階

□

不過，在畢氏音階裡面卻發現 E、A、B 三個音的比，並沒有呈簡單的整數比，因此後來有位天文學家 C. Ptolemy 就利用和絃的升降，將

這些音修改為 5/4、5/3、15/8，因而得到「純律音階」，如表二。

□ 表二 純律音階

C	D	E	F	G	A	B	C'
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

但是，隨著音樂的發展，雖說世界一流的小提琴家與歌唱家都按純律來演奏或演唱，但畢氏音階和純律音階在移調和轉調上，以及在不同的樂器一起演奏的和諧度上，均無法符合音樂家或作曲家的需求，於是德國風琴師 Werckmeister 在 1691 年，從發表的一篇文章「將鍵盤樂器調成平均律的數學」當中，引出了「十二平均律」，它使得樂曲轉調容易，但是聲音不純(例如中央 C 應該是 264Hz 變成了 261.6Hz)，且和弦並不那麼完美，十二平均律就是將 C 到 C' 之間等分割成十二個半音，所以，如果知道了 C 這個音的頻率，就可以透過連續乘上一個常數

$12\sqrt{2}$ 而得到 12 個半音。自從 1939 年國際間訂定標準音 A 的頻率為 440Hz 之後，其他音的頻率也大致底定(見表三)。

□ 表三 音階和頻率

單位:Hz

音高	中央 C	D	E	F	G	A	B	高音 C
純律	264	297	330	352	396	440	495	528
十二平均律	261.6	293.7	329.6	349.3	392.1	440	493.9	523.2

目前現代的鋼琴調音仍可以分為兩種：一種是利用調音器來調的，調音師「一個音一個音的敲」，然後與調音器所設定的頻率對照是否正確，所以是按照十二平均律來調音的。另一種是比較「高明」的老師傅利用他敏銳的「耳朵」來調音的，他是「一個和弦一個和弦的彈」由和弦發出的聲音的和諧度來判斷音是否準確，所以純律至今仍然有人使用。

■ 由形上學來看

由於數學具邏輯推理的性質，它能夠創造出優美的演繹模式，雖然我們不能用聽覺感知它的節奏，可是我們可以隨著理性的推理思考，用大腦去體會它的韻律，所以說「數學是推理的音樂」(歐陽絳，民 85)。以下我們舉兩個例子進一步說明數學與音樂的共通性——美。

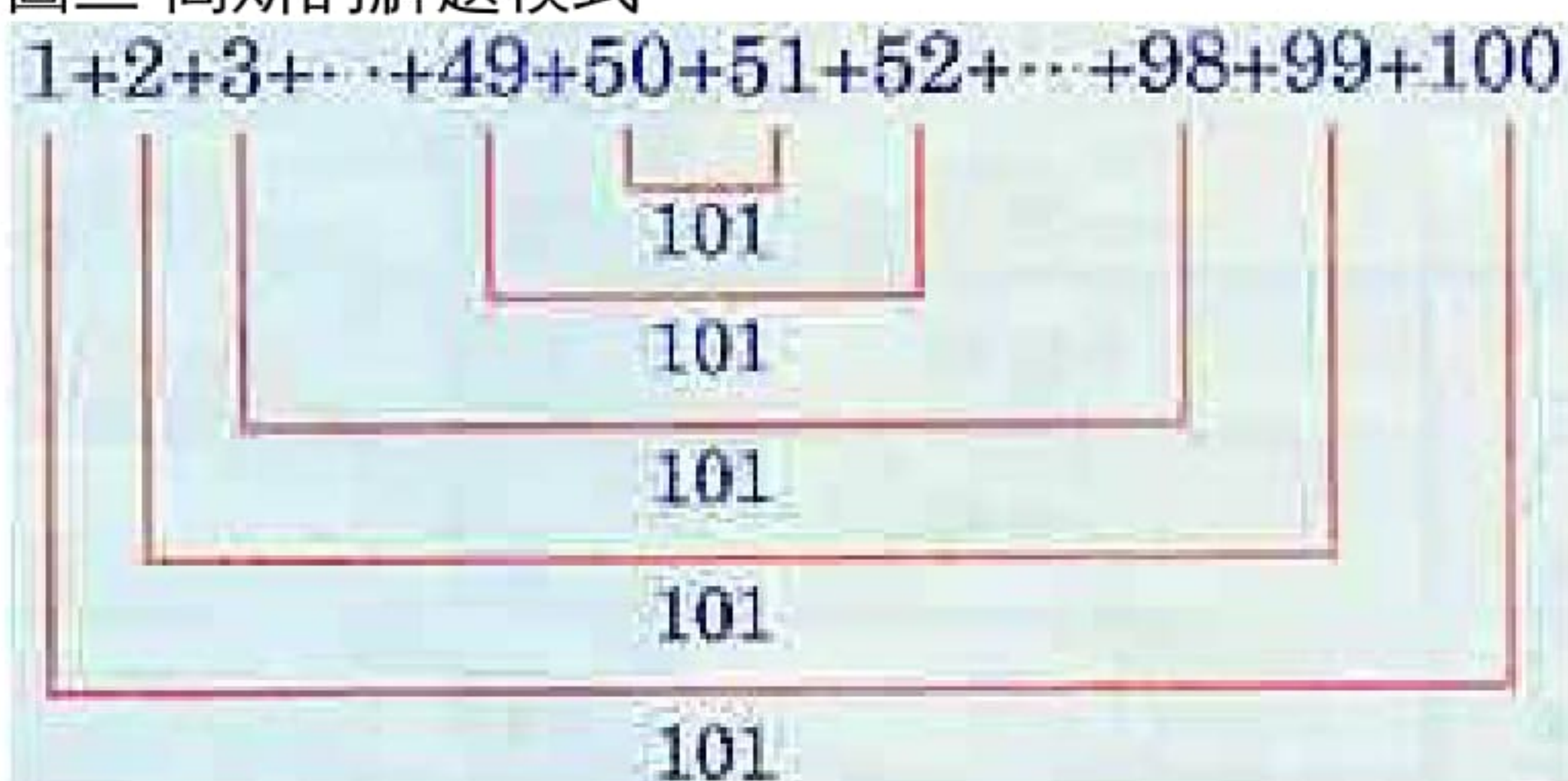
□ 圖二 視譜練習



《例一》圖二這首樂曲雖然只是寫給人們視譜練唱用的，但是從它的音符的形式來看，除了最後一小節之外，其餘都是「四個八分音符和兩個四分音符」有「規律」反覆的音群所構成，且都是使用所謂「模進」的方式來編寫，所以，我們只要唱前面兩個小節 Do, Re, Mi, Fa, Do, Fa，就可以「預測」接下來就是 Re, Mi, Fa, Sol, Re, Sol(前兩行)，後兩行音群下行的方式也是一樣的模式。這四行譜前兩行和後兩行則幾乎是「對稱」的關係，「規律」和「對稱」都是一種美的形式，在數學的領域中，無論代數、幾何或統計都經常可以看見。

《例二》 數學王子高斯在小學時代曾經解過這樣的題目： $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = ?$ 當全班同學都在埋頭苦算的時候，高斯卻輕而易舉的把答案交出來了，全班師生們同感訝異。他的算法是按照頭尾相加和是 101 的模式，連續不斷的配對(其實這就類似於音樂中的『模進』)，到最後 $50 + 51$ ，一共可以得到五十對的 101，所以將 101 乘以 50 就可以得到答案 5050 了(見圖三)。從這個例子，我們也可以看到在運算的過程當中，數字構成的關係那麼的和諧而有規律，這種由一定數量關係所構成的和諧就是一種數學美，而這種巧妙的解法本身也是一種美。

□ 圖三 高斯的解題模式



□

音樂是透過作曲家的思維模式，運用符號把它記錄下來，當它被傳達到聽眾的耳朵時，是那麼的和諧、有秩序、有規律，所以容易給人產生一種美感，進而心靈獲得啟發和陶冶。數學本身不僅是藝術，也是一種思維的藝術(歐陽絳，民 85)，對於人們心靈的美化也具有同樣的效果。古希臘畢氏學派就認為：數學和音樂都可以淨化人的靈魂。十九世紀數學家 J. J. Sylvester(1814-1897)指出，置身於數學領域中，不斷地探索和追尋，就能把人類的思維活動昇華到純淨而和諧的境界。當代數理邏輯家王浩也說，數學具有純淨的美(dry beauty)。

Sylvester(1814-1897)又指出：「音樂不就是感覺中的數學，而數學不就是推理中的音樂嗎？兩者的靈魂是完全一致的。」這段話更道出了數學與音樂另一種形而上的關係。因此，如果說：「音樂家可以感覺到數學，而數學家可以想像到音樂。」是可以讓人理解的。雖說音樂是夢幻，而數學是現實，但當人類智慧昇華到完美的境界時，音樂和數學就互相滲透而融為一體了。

(2) 將數學應用於音樂之中

數學家萊布尼茲(Leibniz, 1646-1716)說：「音樂是一種隱藏的算術練習，透過潛意識的心靈跟數目字在打交道」。而實際上，「樂理」的確是一種可以用數學的方法來計算的具體知識。

在音樂的領域當中，運用數學來處理相關的問題的例子非常多，例如：畢達哥拉斯發現絃長的簡單整數比(算術的比例論)，進而推算出畢氏音階、傅里葉(B. J. B. Joseph Fourier, 1786-1830)針對週期性的聲音進行研究，發現任何聲音都可以用簡單的正弦函數($a\sin bx$)各項的和來表示。以下將舉幾個的例子說明數學在音樂中被運用的情形：

在音樂當中，我們把記錄聲音的符號稱為「音符」；把記錄暫停的符號稱為「休止符」。下表是音符與休止符的種類和名稱。

□ 表四 音符與休止符的種類和名稱

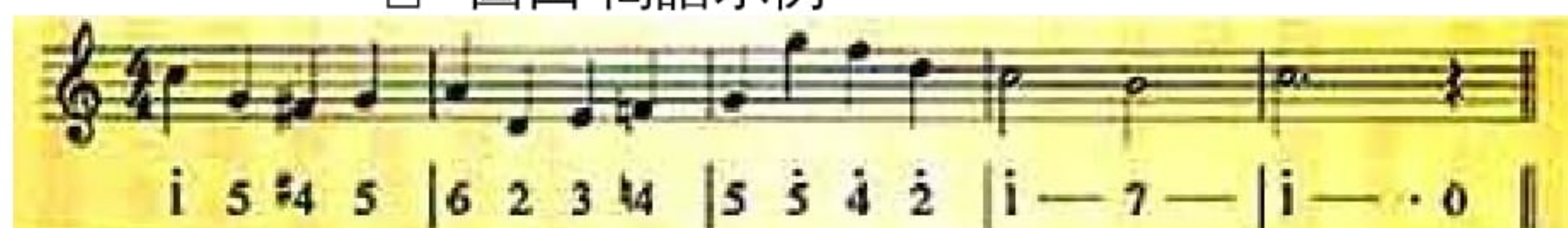
音 符		休 止 符	
	全音符		全体止符
	二分音符		二分休止符
	四分音符		四分休止符
	八分音符		八分休止符
	十六分音符		十六分休止符
	三十二分音符		三十二分休止符

有了音符和休止符之後，任何的旋律便可以用它們來記載。而任何一段簡單的旋律的構成，不外乎是音高、音的長度和演奏的速度。我們可以透過音高、音的長度和演奏的速度來了解其中的數學。

■ 音高

聲音振動的頻率快表示聲音高，反之，則聲音低。當聲音用符號來記錄之後(就是音符)，將它「掛在」五線譜上就可以從它的位置看到「音高」。

□ 圖四 簡譜示例

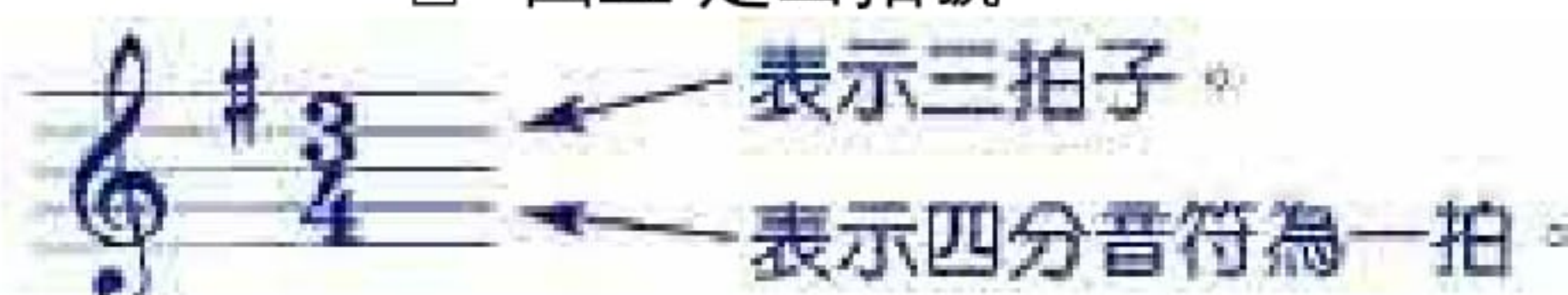


光從音符在五線譜上的高低位置，看不出來與數學有何關聯。但在五線譜底下，我們可以看到一群數字 1,2,3,4,...(見圖四)，這就是所謂的「簡譜」，是不是就和數學扯上關係了呢？有許多學習音樂的人並不太習慣看五線譜上面的音符，而比較偏好看這群數字所構成的「簡譜」，目前常用「簡譜」來記錄樂譜的有國樂、爵士樂等。

■ 音的長度

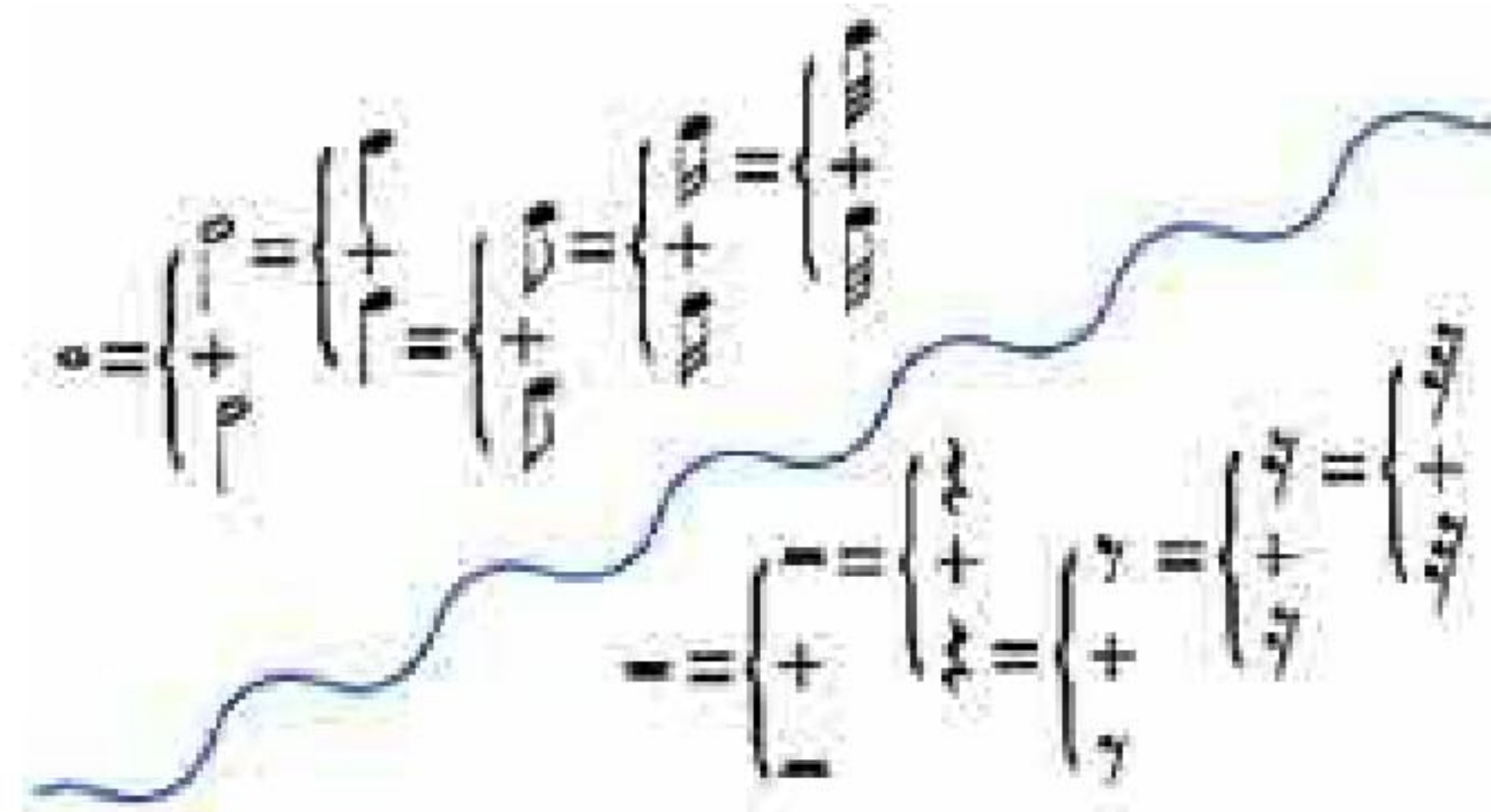
聲音的長短也可以用音符記錄起來。由上表一所記載的各種不同的音符就可以清楚地"看出"聲音的長短。例如：我們先訂出拍號：

□ 圖五 定出拍號



再來看表四，若以四分音符定為 1 拍的話，二分音符就是它的「兩倍」，是 2 拍，全音符是它的「四倍」，是 4 拍；而八分音符則是它的「一半」，是 1/2 拍，十六分音符的音長是它的「四分之一」，是 1/4 拍，三十二分音符則是 1/8 拍，其中是不是就有簡單的「倍數」和「分數」的概念了呢？而休止符除了沒有音高之外，其暫停時間的長短和演奏的速度和音符是一致的。表五將歸納出音符、休止符表示長短的關係：

□ 表五 音符、休止符表示長短的關係



由表五我們也不難看出，一個全音符「等於」一個四分音符「加」一個四分音符之間的數量關係。音符或休止符之間的長短關係常常是運用數學來計算的。

■ 演奏速度

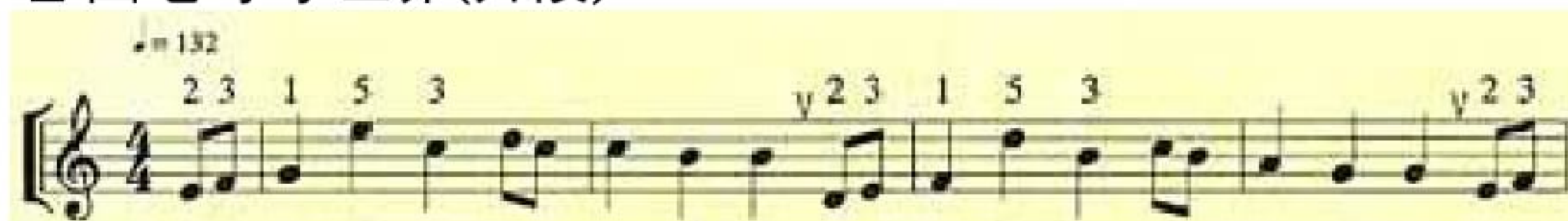
樂曲演奏時所要表達的意境，除了和「調性」有關之外，也和演奏的「速度」有密切的關連。例如：演奏國歌，必須是莊嚴而隆重的氣氛，「中板」是較適合的，「快板」就怪怪的了；而歡樂歌，使用「緩板」就歡樂不起來了。其中，所謂的「快板」、「中板」、「緩板」都是音樂裡表示速度的術語。

德國有位發明家，名叫梅智(J. N. Maelzel)。他曾經為貝多芬製作助聽器，也是梅智拍節機的發明者。這種機器其實也是利用簡單的鐘擺原理設計的，不過擺動一次即算一拍。梅智拍節機的發明嘉惠了許多初學音樂的人，在控制樂曲進行的速度方面幫助極大，而在樂譜裡面，我們也常常看見這樣的記錄形式：

□ 圖六 演奏速度示例

圖六中，(1)表示在一分鐘裡面，必須唱奏 60 個四分音符，就是 60 拍；(2)表示在一分鐘裡面，必須唱奏 120 個二分音符，即 120 拍；(3)表示在一分鐘裡面，必須唱奏 60 到 66 個附點四分音符；(4)表示在一分鐘裡面，必須唱奏『大約』100 個四分音符。在樂曲當中，有了這些「速度」概念以後，不必實際演奏，我們就可以輕易「計算」出一首樂從頭到尾演奏一遍所需的時間。例如：

□ 圖七 小小世界(片段)



圖七這首「小小世界」的樂曲(片段)，它的速度是每分鐘演奏 132 拍，全曲總共是 $4 \times 16 = 64$ 拍，所以， $64 \div 132 \approx 0.48$
 $0.48 \times 60 \approx 29$ (秒)，演奏完畢大約是半分鐘。如果利用這種方式，把許多樂曲的演奏時間事先都算出來，就可以應用於安排音樂表演節目或用於錄音時，曲目的編排等。

其實音樂中的速度，也就是音樂裡的「節奏」，對音樂學習者而言是很重要的，音樂「節奏感」很好的人，他/她在音樂的表現上必然不差，而同樣的，他/她的「速度感」也會不錯，速度在數學裡是一種「量感」，也是重要的數學概念，所以，我們也相信音樂「節奏感」很好的人，對於學習數學有關速度這部分的概念，應該是有所助益的。

(3) 心得

因為我本身是熱舞社，對音樂的節拍、速度特別有感覺。常常我們聽到一些音樂，會有不同的感受，會想用不同的 grooving 來表現。這學期剛好修到這門課，就想說音樂會不會跟數學有關係呢？什麼樣剛剛好的節奏比例，耳朵跟大腦會覺得最舒服？

在上了整學期的課，發掘數學不只是黑板上生硬的數字符號，而是維持這個現有文明及秩序的重要關鍵。數學存在於我們生活的每一部份，所有科學的最基礎也是數學。上老師的課真的很好玩~~終於能看到數學的不同面向，不再是可怕的考試科目了。很幸運能修到老師的課，這學期收穫滿滿!!!!