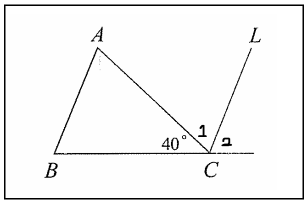
第三章 三角形的基本性質

942201010 數碩三 蔡銘璟

2-3 自我評量

3.如右圖，L 是 $\triangle$ABC 中 $\angle$C 外角的角平分線，

已知 L// $\overline{AB}$ ，$\angle$C=40^0 ，求 $\angle$A、$\angle$B。



老師講解:嚴格來講這邊有一點點漏洞，前面我們說的平行線是直線，現在這裡是 $\overline{AB}$ 線段平行於 L 直線，$\overline{AB}$ 是一個有限的線段，L 是條直線。

$\angle 1+\angle 2+40^0=180^0$ ，L 是角平分線，所以 $\angle 1=\angle 2=70^0$ ，$\angle$B=$\angle$2(同位角相等)，$\angle$A 又等於 $\angle$1，所以 $\triangle$ABC 是等腰三角形，$\angle A=\angle B=70^0$ 。

3-1 全等的概念

三角形的全等性質

3-1 講全等概念，小學就有平面圖形全等概念，兩個圖形用剪刀剪下，完全重疊在一起就是全等。這邊要特別探討三角形全等，p.74 講到全等，書上說用透明紙將 $\triangle$ ABC 描繪出來，然後移到另一個 $\triangle$ DEF 上，如果完全疊合就叫全等，全等符號「≅」，他就有對應邊、對應角這些觀念，兩個全等三角形，對應邊相等，對應角也相等，就是全等意義。在判斷兩個三角形是否全等不一定要使用疊合，可以用觀察、圓規、推理。譬如圖 3-3 兩個圖形角不一樣多，當然不會全等。圖 3-4 接下來要討論怎麼樣的兩個三角形，他們會全等。

SAS 全等

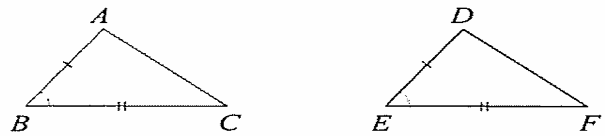


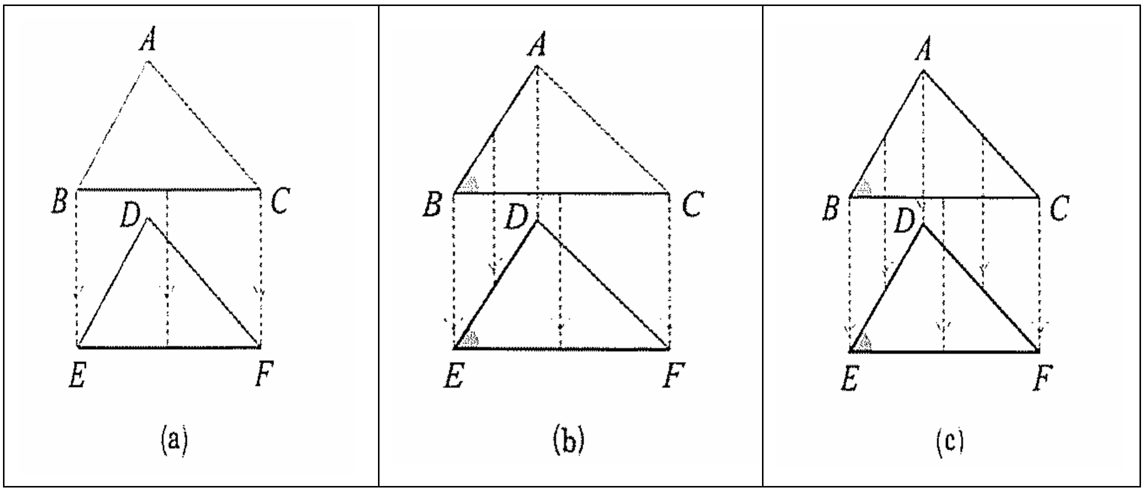
圖3-7

S 指的是 side，A 是 angel，SAS 指的兩個邊夾一個角，跟 SSA 是不一樣的意思，所以字母順序是有意義的，不能隨便亂調。

看圖 3-7，如果現在只知道 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ，$\overline{BC}=\overline{EF}$ ，兩個邊中間夾的那個角也相等，

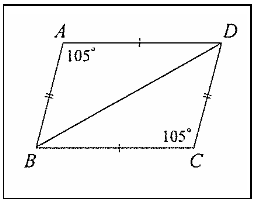
現在要說明這兩個三角形為何全等。

圖 3-8 用推理來給我們看，如果我們把$\overline{BC}$和$\overline{EF}$兩個線段重疊在一起，因為他兩個長度相等，所以可以好好疊合，$\angle$B 和$\angle$E 又一樣，所以 A 和 D 會在同一個方向上，又因為$\overline{AB}=\overline{DE}$，所以他們會重疊，C 和 F 是重疊的兩個點，現在 A 和 D 又是重疊的兩個點，所以$\overline{AC}$和$\overline{DF}$會重疊。兩三角形就完全疊住了，就這是 SAS 全等性質。



例題 2.如右圖,已知四邊形 ABCD 中， $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，

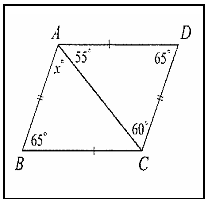
$\angle$A=$\angle$C=105^0，試說明$\triangle ABD\cong\triangle CDB$。



<u>老師講解</u>:就是用 SAS，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，中間夾的角$105^0$又相等，所以全等。

隨堂練習.如右圖，已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，

各角如圖示，試說明$\triangle ABC\cong\triangle CDA$，並求出 x 的值

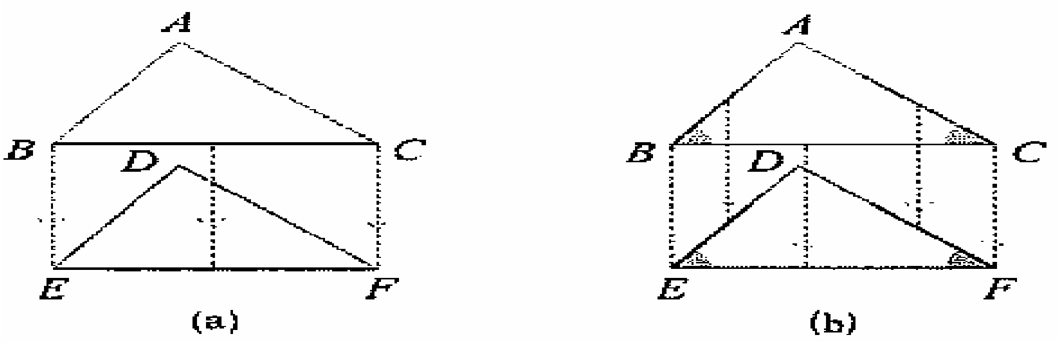


<u>老師講解</u>:說明全等，疊在一起的順序很重要，一個是 ABC，一個是 CDA，所持理由呢?當然還是 SAS，因為$\overline{BC}=\overline{AD}$，$\angle B=\angle D$，$\overline{AB}=\overline{CD}$

ASA 全等

把圖形拉下來,，先說$\overline{BC}$和$\overline{EF}$會重疊，$\angle B$和$\angle E$一樣，$\angle C$和$\angle F$一樣，所以

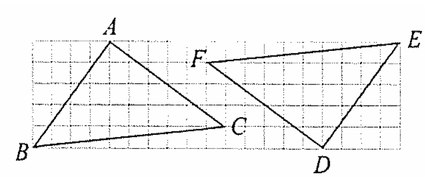
$\overrightarrow{BA}$會對齊$\overrightarrow{ED}$，而且$\overrightarrow{CA}$會對齊$\overrightarrow{FD}$，那 A 和 D 會重疊，就得到 ASA 全等的性質。



例題 4

如右圖，有兩三角形 △ABC 與 △DEF，
圖中的格寬爲 1。若已知 $\angle D = \angle A$， E=∠B，

且 $\overline{DE} = \sqrt{41}$ ，試說明 △ABC ≅ △DEF



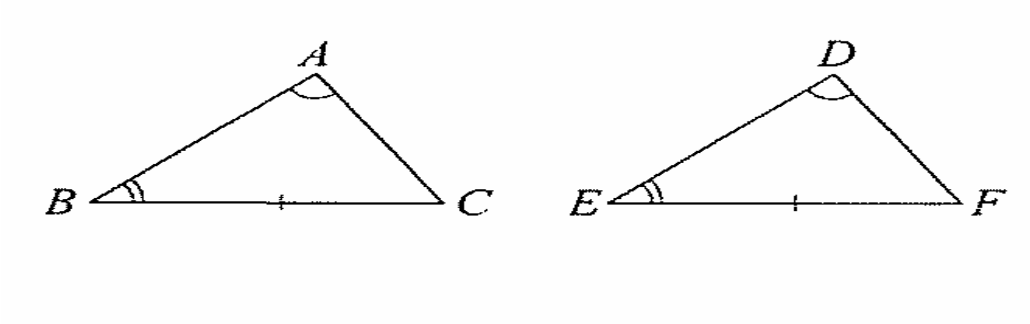
<u>老師講解</u>:由題意知，$\angle D = \angle A$ ，∠E=∠B，

方格子每格假設都一樣，$\overline{AB}$ 用數格子的方式得到 $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$，所以得到 ASA 全等。

AAS 全等

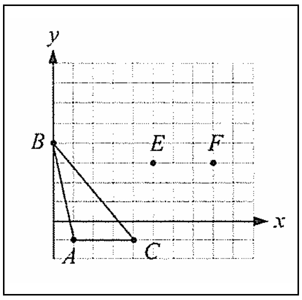
剛剛是說兩邊夾一角或兩角夾一邊的時候這兩三角形相等，現在是兩角跟一個邊，但是如果知道兩角相等，那第三角就會相等，就是180^0扣掉那兩個角，

所以 P.83 的圖，∠C 和∠F 會相等，利用這性質及 ASA 全等性質可以得到 AAS 全等性質



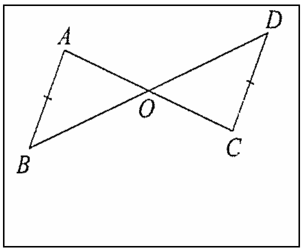
自我評量

2.如右圖，在座標平面上找出 D 點，使得 △ABC 與 △EDF 全等，且∠F=∠C。寫出 D 點的座標。



<u>老師講解</u>:B 點在 A 點的左邊 1 格上面 5 格,A 和 C 距離 3 格,E 和 F 距離也是 3 格,所以 在 E 的左邊一格上面 5 格畫一個點 D，還有在 E 左邊一格下面 5 格畫一個點 D，這兩個點都是。

3.如右圖，已知 $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}$，試說明 $\triangle ABO$ 全等於 $\triangle CDO$

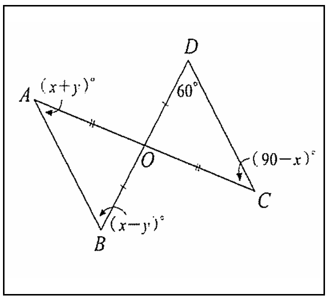


<u>老師講解</u>:AAS 或 ASA 都行

AAS: ∠A 和∠C 是，∠O 兩側是對頂角，$\overline{AB}=\overline{CD}$

ASA: ∠A 和∠C 是內錯角，∠B 和∠D 是內錯角，$\overline{AB}=\overline{CD}$

4.如右圖，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$，求 x、y



<u>老師講解</u>:兩三角形的∠O 是一樣的，對頂角相等，然後兩側的邊 $\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$，所以是 SAS 全等。既然全等∠D 所對應的∠B，所以 x – y = 60，∠C 對應的是∠A，所以 x + y =90 – x，代換得到 x=50、y= -10。

進階評量.三角形周長爲 12，且其邊長皆爲正整數，問適合此形狀且條件相異(不全等)三角形共有幾個?

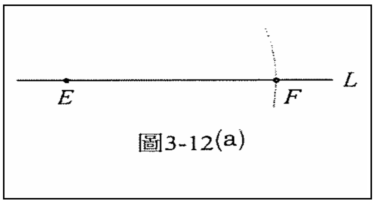
<u>老師講解</u>:除了三邊長加起來 12 以外，還要符合一件事情:任兩邊之和大於第三邊，任兩邊之差小於第三邊，譬如 1,1,10 不可以，所以這問題還頗難。最後的答案只有 3 種可能 3,4,5，4,4,4，5,5,2。只有 3 種可能，倒是不錯的問題，讓學生耗掉一些時間。

3-2 SSS 全等與尺規作圖

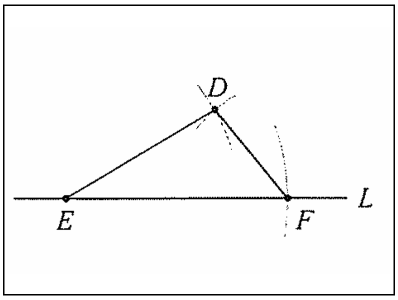
SSS 全等

給定 $\triangle$ABC，做一另一個三角形，使這兩個三角形三個邊相等，做法是這樣

1. 畫一條直線 L，用圓規複製 $\overline{BC}$ 長度來到 L 上面畫 出 E 和 F 點，使得 $\overline{EF}$ 長度= $\overline{BC}$ 長度

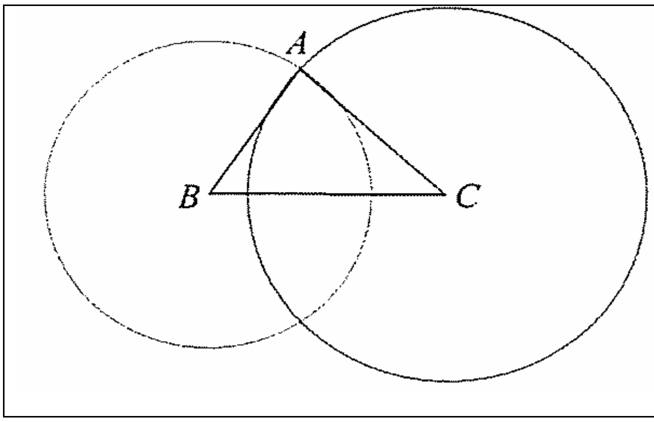


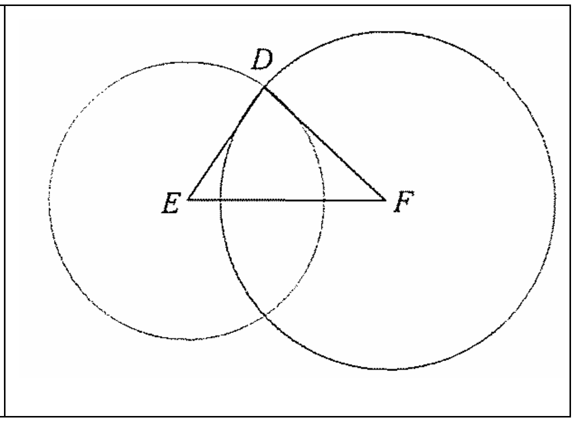
2. 然後複製 $\overline{AB}$ 長，因爲現在 B 點對應 E 點，以 E 爲圓心，$\overline{AB}$ 長爲半徑，隨便畫一個弧，然後複製 $\overline{AC}$ 的長度，以 F 爲圓心，$\overline{AC}$ 爲半徑畫一個圓弧，這兩個弧交於 D



根據剛才畫圖的方法，$\overline{DE}=\overline{AB}$，$\overline{DF}=\overline{AC}$，所以 $\triangle$ABC 與 $\triangle$DEF 對應邊都相等。問題是 $\triangle$ABC 和 $\triangle$DEF 有全等嗎?

以 B 和 E 爲圓心，$\overline{AB}$ 爲半徑畫一個圓，以 C 和 F 爲圓心，$\overline{AC}$ 爲半徑，當我們把 B 和 E 疊在一起的時候，因爲 $\overline{BC}$ 和 $\overline{EF}$ 一樣長，所以至少可以把 $\overline{BC}$ 和 $\overline{EF}$ 重疊起來，所以 B 和 E 兩點重疊，C 和 F 兩點重疊，兩個圓也重疊了。兩個圓心固定，兩個圓固定，這兩個圓交的兩個點也會固定，這兩個交點一個是 A 一個是 D，因爲固定了，所以 A 和 D 會重疊，因此由 A 和 D 所拉的線段也會重疊，這是 SSS 全等。





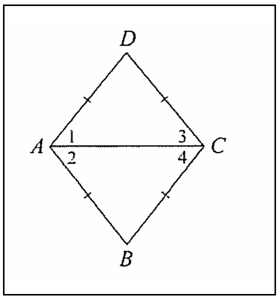
菱形

一個四邊等長的四邊形稱爲菱形。因爲正方形四邊形等長，所以正方形是菱形的一種。

利用 SSS 全等性質，我們要討論菱形的一個重要性質，如例題 2 所示。

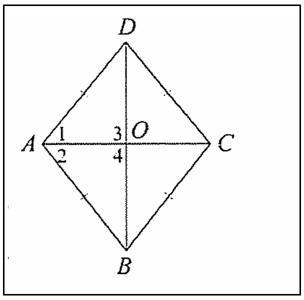
例題 2.

如右圖，四邊形 ABCD 爲菱形，$\overline{AC}$ 爲對角線。試說明 $\triangle$ADC ≅ $\triangle$ABC，以及∠1=∠2，∠3=∠4。



<u>老師講解</u>:菱形的四個邊都相等，對角線是同一條線，屬於兩個三角形，所以是 SSS 全等。因爲 $\triangle$ADC 和 $\triangle$ABC 全等，所以∠1=∠2，∠3=∠4。

如果在多畫一條對角線，兩條對角線交於 O 點，



因爲 $\overline{AD}=\overline{AB}$ ，$\overline{AO}$ 是共邊，這裡不能用 SSS 全等性質，要利用 $\overline{AC}$ 是角平分線，∠1=∠2，用 SAS 得到左邊兩三角形全等。右邊兩個三角形也一樣道理，所以這 4 塊三角形都全等，既然全等，那麼圍繞 O 點的四個角都相等，4 個角加起來 360^0 ，所以每個角 90^0 ，所以知道菱形的兩條對角線會垂直，又因爲剛剛都全等，兩個股邊都一樣長，所以互相爲中垂線，得到以下結論:

菱形的兩對角線互相垂直平分，而且分別平分菱形的兩組對角

RHS 全等

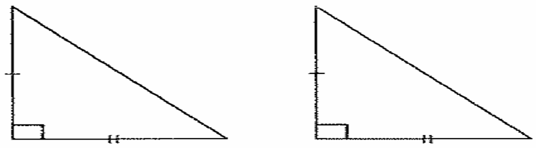


圖3-15

R 這個字指的是 right angle(直角)，H 指的是 hypotenuse(三角形之斜邊)，S 代表一股，不管是橫的或直的。

因爲知道兩個邊，用畢氏定理就知道另一個邊，且因爲都是直角，兩個股中間夾一個直角，用 SAS 來證明全等，所以 RHS 只不過是在進一步的運用。P.90 給了一個小小的結論:

若兩直角三角形的斜邊及一股分別對應相等，則此兩直角三角形全等