授課教師：單維彰

授課日期：2007 年 10 月 04 日

授課範圍：國中第一冊 2-4 數線(P.118-P.126)

筆記製作：數四 A 93201020 王派峰

2-4 數線

◎ 坐標的平移

由於在前面的例題中，我們已經認識到數線中小數、分數及整數的概念，所以進入負數的世界後，數線上的負小數、負分數也就相繼出現。對於國中生而言，大部分的問題主要都還是環繞在整數的領域，較未叫學生標定複雜的小數或分數。然而這個技能卻會在三年中陸陸續續地被使用，像是之後的平面坐標，事實上就是兩個數線的應用，而這裡所學的經驗在之後也會更加的強化學習。

◎ 坐標的排序

將 $A(-3)$、$B(-2.5)$、$C(-3.5)$、$D(1)$ 四個點由右至左依序排出，但是卻不是用視覺的想法去引導學生。事實上這可以結合前面的題型，要求學生將其在數線上標定出來，再根據數線上越右邊的數字其值越大來去說明。數字的大小關係是我們規定出來的，從小時候我們就一直在記憶1，2，3，…，不論到後來的十位數字還是百位數字，都是按照相同的模式去判斷，而這個觀念應用在數線上，就可以由左右的關係去比較數字的大小。

數線將整數、小數及分數的標定有了一個完整的整合，同時將數字的大小關係做了相當了釐清。但是對於「負數」這個新元素來說，它並非一個自然的東西，它是由人所創造出來的，故該如何比較大小呢？其實這必須重新去「定義」出來，就是靠著過去我們知道正數在數線上的越右邊會越大的規則去擴展出來的。而這些概念都是為了讓整個數線上的架構能夠與過去的理論契合，而不會產生數線右方有一個規則，而左方又出現另外一個規則。

有了這樣的觀點後，我們就可以確切的把這四個點在數線上標定出來，利用越往右數越大的概念去比較這四個數的大小。而先有這種視覺上具體的觀念再把整個數學架構符號化更有助於學生的學習；像是課本中先講絕對值的大小，再利用相反數去比較大小，就讓整個概念變的相當麻煩且複雜。所以我們可以利用幾何的想法去和代數的結果去做對應，使這個數學的基礎原理能夠明白且完整的詮釋。

補充： 負數是創造出來的東西，我們定義它負負得正、有乘法的交換率及結合率等性質。這是因為它跟正整數形成了一個較大的集合，而為了使這個集合保有原正整數的性質，所以必須下如此的定義來擴張整個集合的合理性。這種想法也一直推廣到實數系統，但卻無法應用到複數系統，這乃因為數線只有一個維度，對實數系統已經到

達極致的效果了。

建議　有許多概念是因為我們已經學會了、學的夠深了，然而對於那些初學者而言，卻是一個新的東西。我們不能認為他們能夠「憑感覺」了解這一切！

◎ 距離與絕對值

定義：數線上 A 、 B 兩點間的段落稱為 AB 線段，經常用 $\overline{AB}$ 表示；它也代表 A 點到 B 點的距離，如課本圖 2-11 所示。

定義：任意一點到原點的距離就是該點坐標的絕對值，即 $A(a)$ 到原點的距離為 $|a|$ 。

※ $A(a)$ *表示點 A 在數線上的坐標為* a

建議　老師們應該利用版書將這堂課重要的一些數學名詞清楚地定義下來，讓學生能夠確實明白你要闡述的東西，才不會導致往後的溝通產生問題。而對於自己所講述的內容來說，不要認為你已經向學生們提過，他們仍有可能是一知半解。故如果往後的課堂上又再次提及時，不妨在黑板上開個小視窗讓學生複習並了解你在使用什麼樣的性質。

◎ 判斷點在數線上的位置

點 $A(a)$ 在原點的左邊，且絕對值比1小，由直觀的想法我們可以知道 A 是負數，且它跟原點的絕對值會比 -1 跟原點的絕對值來的小，所以 $A(a)$ 在 $B(-1)$ 的右邊。如果用太代數的方式說明，似乎太拘泥了！我們可以劃一數線並且在上面找到原點和 -1 ，因為 A 在原點左邊而且其絕對值比1小，也就是說從原點往左跨不到1。如此一來我們就馬上可以發現 $A(a)$ 在 $B(-1)$ 的右邊。

◎ 計算兩點的距離

針對「計算 $A(15)$ 和 $B(21)$ 的距離」這個問題來說，課本所舉的這個說例並不是那麼樣的恰當。原因在於在數線上標定15和21這兩點實在太累了，而且跟0、1相距太遠，失去了對數線的距離感。既然如此，何不將問題改成3和9的距離，如此一來也只需要在數線上刻上9個點，直接就可以用肉眼看出它們的距離，這樣子的做法也更為具體。而此時我們也能夠得到結論：兩個正數的距離乃大數減去小數。

而後又談到 $C(3)$ 和 $D(-5)$ 的距離，我們其實還是可以將課本圖 2-13 的刻度標上去，利用數的結果可以得到其距離為8 。同時也就推論出兩數的距離為大數減小數，然而我們應用絕對值的概念就可以知道：不論大數減小數還是小數減大數，只要灌上絕對值，就是代表這

兩數的距離。進而得到以下的定義：

定義：如果 $A(a)$ 和 $B(b)$ 是數線上的兩點，則 $\overline{AB}=|a-b|$。

而在談到這個概念的時候，我們其實也可以返回來說明 $|a|=|a-0|$，就是 a 到原點的距離。如此一來跟 $|a-b|$ 為 a 和 b 的距離就能夠相呼應，也能夠讓整個數學架構產生連慣性及一制性。

建議　當要說明一個核心的概念時，可以使用較簡單的例子去做講解。當認識這個例子的意義時，就可以利用它去推演出一個代數說明。

◎ 絕對值應用

考慮 $|a|=3$，a 的值為何？由課本的說法來看，實在是過於文字化。對於初學這個概念的學生來說，我們可以用幾何的概念去講解——先在數線上標出一些簡易刻度，找到與原點相距為3的兩個點，應該會發現左右各有一個，之後再用代數的方式去做說明。這樣對學生來說，會有比較完整的了解與認識，而且可以帶出一些較難的題目讓學生應用。例如：與 -4 距離為5的點有哪些？這樣的三步驟說明——先在數線上實際操作演練、再用文字去敘述整個題目的概念性、最後用代數的方式將其數據化，都有助於學生的學習。

◎ 中點坐標

若要求 A、B 兩點的中點坐標，則在數線中找到一點 C 使得 $\overline{AC}=\overline{BC}$，那麼 C 點即為 A、B 兩點的中點，這也是分點公式的特例。而針對隨堂練習中——求5和 -5 的中點坐標，我們事實上並不需要利用課本給的方式去解題，因為5和 -5 是相反數，因此會對稱於原點，所以中點坐標即為原點。

建議　這題其實是非常直觀的一個想法，若要用太嚴肅的代數式子去運算反正讓孩子失去學習的樂趣；老師們如果沒有自己的想法而照著這樣的思考邏輯去教導學生，真的是滿悲哀的，對半數以上的學生來說更是可憐！

◎ 自我評量分析

1. 在第2題(4)中，其實並不一定要學生寫出 $|2-(-6)|=8$ 這個概念，因為我們可以在數線上直接看出2跟 -6 的距離就是8。
2. 而第5題是一個較複雜的問題，然而在數線上卻可以很輕鬆就看出 A、B 的距離。但

如果要用數字運算，就必須用 $\left|(-100)-\left(-99\frac{7}{8}\right)\right|$ 去做計算。