

3-1 以符號列式

3-1 是以符號列式，這的確是學生從小學到初中最重要的一個轉變，他們要學會用符號來列式子，而用符號列式子在第一章就已經開始，從 1-1 的標題「以符號代表數與指數率」便可看出。那「以符號代表數」是什麼呢？譬如說 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，結合率寫成 $(a+b)+c = a+(b+c)$ 這裡的 a 、 b 、 c 並非代表變數或未知數，而是代表任意數，而在這一節裡一個實際的應用就是用符號來代表數，譬如說 $a > 0$ ，這個 a 代表任意的一個正數； m 、 n 代表自然數，這裡的 m 、 n 也是代表任何大於零的正整數。翻回 12 頁，這裡說 $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ 就是一個以符號代表數的應用。這裡用符號所表示的數，並不是唯一的數字，而是無限多種可能的任意數。

這可能是從小學到初中的第一個衝擊，在小學時可能用甲、乙、□或()來代表某個未知數，而國中就要習慣用 x 、 y 、 z 。那為何小學不大大方方的用 x 、 y 、 z 呢？那是因為教育學者覺得小學生比較不適用這樣的方式，所以到了國中就忽然這樣做了。因此在第一章第一節就已經開始，這邊第三章第一節又再重來一遍。『以符號列式』看起來好像是以符號代表數的形式重來，但精神卻不大一樣，例如 1-1 所提到的 $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ ， a 所代表的是任何可能的正數而 m 、 n 代表自然數，但它並沒有未知數的列式，而只是代表任意數那樣的符號，現在在第三章所介紹的符號就和前者有不同的意義，那就是符號代表未知數，未知數的概念小學生已經有學過，只是當時他們是以□或()來代表，當時他們叫做『填空列式』或『填充列式』，這個空的小刮號要算出答案來，這便是我們說的未知數，只不過它們是用很具體的空格來表示，現在我們所教得未知數只是把這些□或()改成英文字母 x 、 y 、 z ，所以這一節並不是新的觀念，而是承接小學時所學的經驗。

3-1 這一節的教學重點：「我們開始要由數理量的具體操作，進入抽象的代數式運算」。這裡的具體操作就是直接對數字作加減乘除的運算，那你一定會想（學生應該不會想那麼多），之前說的 $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ 這難道不適抽象的代數式運算嗎？為什麼教師手冊說從這一節開始，開始要由數理量的具體操作，進入抽象的代數式運算呢？作學生的應該不會問這個問題，但也許做老師的會有這樣的疑問，我想這要去瞭解編教科書或編寫教學綱要的人他的想法：這本書共分成三章，這邊已經是尾巴了，學生們也經過了第二次段考，所以在這章才說要正式開始進入抽象的代數運算。回到剛剛的問題，在 1-1 學生們在認知上並不會把 a 、 m 、 n 當作未知數，而是把它們當成任意數，就像把 a 當成 3， m 當成 2， n 當成 3，進而得到 $3^2 \times 3^3 = 3^{(2+3)}$ ，這樣的關係他們把它當作是一個用符號寫出來的公式。學生在操作它的時候，會把 a 想像成一個數，或者說看到一個數（譬如說 3）的時候就像這個 a ，所以說 $3^2 \times 3^3 = 3^{(2+3)}$ 就像 $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ ，因此學生們

紀錄日期：2007年10月18日

授課範圍：部編版國中教材第一冊 3-1 以符號列式

只是把它當作是一個公式，當中的符號則當作有某些條件的任意數字，例如 a 可代表 3，但不能代表 -3， m 、 n 可代表 4，但不能是分數和負數。

事實上這本書在 2-5 就偷偷地寫成 a 可以代表負數，它並沒有很明確的交代這件事，因此身為教師的責任就是要把這些課本沒交代的東西告知學生。還有就是在學生的認知裡， $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ 不是『等式』，而是把它當成一個『公式』，就像一個圓的半徑是 k ，它的面積是 πk^2 ，這裡的 k 要大於零，它是一個公式而沒有等量的關係，但若硬要加個等式，例如令 A 等於圓面積等於 $\pi \cdot r^2$ ，這是一個公式，並沒有告訴你不知道 r ，要去求 r 的解，他們還沒有這個想法，就是把左邊換到右邊，右邊換到左邊。

3-1 開始要用等式，這種等式在學生小學時就已經見過，小學學的很簡單，都已經把 \square 或 $()$ 畫出來了，而在這裡要改成用 x 、 y 、 z ，然後就變成要解一個等式，所以左邊就要等於右邊，而且在這個式子當中有一個數字是不知道的（我們稱之為未知數）。根據這個等式，我們要像打獵一樣，根據線索來找到這個不知道的數字。既然是等式要求解，所以要用到「移項」、「等量公理」，其實這兩個是殊途同歸，我們可以用等量公理來看怎樣去求解方程式，也可以用移項的方式來看，在過程當中免不了要用結合率及分配率，或是左右消去。在這裡我們探討的是一元一次，消去就很簡單，就是對係數作消去。

在這裡還真的有要用符號來跟具體的數要做加減甚至乘除，所以有符號 x （以符號代表數的符號）跟具體的數字（例如 3、4、-1.5）做交互作用，就是要加減乘除在一起，或是更高階的計算（例如：加法、乘法的結合率、分配率等），因此從這邊就解釋了教師手冊中這章的開始所講的『開始要由數理量的具體操作，進入抽象的代數式運算』。

當我們有機會在教初中一年級的時候，這邊要非常注意，因為我們已經太熟練了符號代表數、符號代表便數、符號代表未知數還有符號代表參數，這四種數我們都太熟悉了，因此在教學的時候要按照學生的認知來教，不要太快也不要一次太多。其實第一個符號代表參數就是符號代表數，它們是一樣的，比如說 $x^2 + y^2 = r^2$ ， $r > 0$ ，但若要大一的學生對 x 作

偏微分，得到 $2x + \frac{dy^2}{dx} = \frac{dr^2}{dx} = 0$ ，在這裡我們知道 $\frac{dy^2}{dx}$ 可寫成 y' ，而不清楚

的人就可能會把 $\frac{dr^2}{dx}$ 寫成 r' ，但我們都清楚這裡的 r 不用寫成 r' ， r' 只是一

個固定的、代表特定的數字，這就是參數和變數不一樣的地方。我們在學過微積分後才知道，但回想一下在高中的時候這個地方很不熟悉，再想想大一證明 ε 、 $\delta > 0$ 時， ε 、 δ 代表任意大於零的數，但在證明過程中， ε 、 δ 有時卻變成變數，就是要寫出 ε 、 δ 的關係，所以在這個情況下你就漸漸的熟悉了一個符號，在剛開始的時候可能會認 ε 是參數，但到後來就變成變數。所以我們在面對這一章節時我們都很熟悉也很清楚，但在教學時

學生是不熟練的，所以不要一口氣全部教給學生。就像之前和高三導生約談時，他們講到在上高微課時，有些老師會跳來跳去，這只是這個老師沒有按照你的思路來教，他本人並不覺得自己跳來跳去，這就是教學者的思路沒有按照學習者的思路，這個學習者可能不懂或不懂裝懂，所以才讓學習者覺得教學者跳來跳去，就像現在講的國中數學一下跳到高中數學一下跳到微積分，你們不會覺得跳來跳去，那是因為這些你們都已經懂了。

在教國一處理符號的時候要很小心，就如同學生在國小的時候並不會把小數、分數和相除當成同一件事，他們一定認為這是三類不同的事，例如 $2/3$ 、 $2\div 3$ 及 $1/4$ 和 0.25 ，小學生會把它們當成不同類型的事情。而在國中之後學到數線、整數的乘除後才漸漸把它們當成同一件事。

※以符號列式

在這裡我們開使用符號來代表數字，以 P. 144 的例子來看，它做了兩個圖表，分別是表 3-1 和表 3-2：



1年後	14
2年後	15
3年後	16
4年後	17
5年後	18
6年後	19

表3-1



1年後	14	$13+1$
2年後	15	$13+2$
3年後	16	$13+3$
4年後	17	$13+4$
5年後	18	$13+5$
6年後	19	$13+6$

表3-2

表 3-2 的右邊比表 3-1 多了一列，這個部分承接之前學的，採用代入數字的方法，代入算式『 $13+x$ 』。例如 1 年後就是 $x = 1$ 代入，得到 $13+1 = 14$ ；2 年後就是 $x = 2$ 入，得到 $13+2 = 15$ ；往後以此類推。

例 1：美華自國中起，就有每週存 50 元的習慣，如果用 a 來表示週數，美華的存款數要如何表示？

答： $(50xa)$ 元



週數	累積存款數(元)
1	50×1
2	50×2
3	50×3
4	50×4
⋮	⋮

老師的建議：

例 1 中用 a 來表示週數，但這裡卻模糊地沒表示 a 是什麼數，等到學到高等數學後便會知道這裡的 a 並不限定是整數，也可以是分數甚至是實數。

隨堂練習：

2. 已知一水塔儲水時，水位上升的速度是每小時 10 公分，若現在水位為 0 公分，則距離現在 t 小時的水位是多少公分？

答： $10t$ 公分

老師的建議：

『0 公分』這個詞用的並不恰當，可考慮改成沒有水或無水位。

『距離現在 t 小時』雖然口語上可以接受，但『距離』一詞的定義是指抽象空間中兩點之間的長度，但對於國中生而言並無把時間想成一抽象空間的概念，因此改為『在 t 小時後』為佳。

※代數式所代表的值

$13+x$ ， $y-4$ ， $50xa$ ， $b\div 38.5$ 等，我們統稱為『代數式』。

例 4：

溫度計上經常會標示攝氏溫度（以 $^{\circ}\text{C}$ 為單位）與華式溫度（以 $^{\circ}\text{F}$ 為單位），兩者的關係是攝氏溫度乘以 $9/5$ 後再加 32 就是華式溫度。

(1) 當攝氏溫度為 t $^{\circ}\text{C}$ 時，請用算式表示華式溫度。

(2) 冰點 0°C 相當於華式幾度？ 沸點 100°C 相當於華式幾度？

答：(1) $9/5 t + 32$ (2) $0^{\circ}\text{C} \rightarrow 32^{\circ}\text{F}$ ， $100^{\circ}\text{C} \rightarrow 212^{\circ}\text{F}$

老師的建議：

在這裡可以詢問學生何謂華式，雖然華式在台灣並不是很具體，但卻是一個非常有趣的單位轉換，因為溫度的轉換和其他單位的轉換不同，其他單位如長度、質量，它們的單位都是以倍數來轉換，但溫度（攝氏和華式）的轉換卻是有加又有乘。

※代數式中符號的約定

由於將來學習代數式的運算，為了方便讀寫與辨識，需要做一些約定，而所謂的『約定』，就是沒有什麼道理，但大家都這樣習慣和遵守。

- (一) 因為乘號「 \times 」和英文字母「 x 」容易混淆，所以數字和符號中間的乘號「 \times 」常以「 \cdot 」取代或者省略不寫。例如： $5 \times x$ 可寫成 $5 \cdot x$ 或 $5x$ ， $(-2) \times x$ 可寫成 $(-2) \cdot x$ 或 $-2x$ ， $\frac{7}{5} \times x$ 可寫成 $\frac{7}{5} \cdot x$ 、 $\frac{7}{5}x$ 或 $\frac{7x}{5}$ 。
- (二) 通常將 $1 \times x$ ， $1 \cdot x$ ， $1x$ 都簡記成 x 。另外， $(-1) \times x$ ， $(-1) \cdot x$ ， $-x$ 都是 x 的相反數，所以將 $(-1) \times x$ ， $(-1) \cdot x$ 都簡記為 $-x$ 。因此， $-(-x) = x$ ， $-(-(-x)) = -x$ 。
- (三) 當兩個數字相乘時，乘號「 \times 」也可用「 \cdot 」取代，但不可省略不寫。例如： 5×3 可記成 $5 \cdot 3$ ，但不能記成 53 ； $4 \times \frac{3}{5}$ 可記成 $4 \cdot \frac{3}{5}$ ，但不能記成 $4\frac{3}{5}$ ； $(-1) \times 3$ 可記成 $(-1) \cdot 3$ ，但不能記 -13 。
- (四) 若遇括號，通常可將整個括號視為一個符號來處理。例如： $(-2) \times (x-3)$ 可記成 $(-2) \cdot (x-3)$ ， $(-2)(x-3)$ 或 $-2(x-3)$ 。
- (五) 如果有帶分數和符號寫在一起，要注意不同型式的區別。例如： $4\frac{3}{5}x$ 是表示 $4\frac{3}{5} \cdot x$ ，而 $4\frac{3x}{5}$ 是表示 $4 + \frac{3x}{5}$ 。但 $4\frac{3x}{5}$ 這樣的記法並不常用。若碰到時會直接寫成 $4 + \frac{3x}{5}$ ，而不記為 $4\frac{3x}{5}$ 。
- (六) 在代數式中，習慣上要將數字寫在文字符號的左邊，這就好像使用單位的習慣一樣。對於形如 $x \cdot 12 = 12 \cdot x = 12x$ ； $y \cdot (-3) = (-3) \cdot y = -3y$ 。有時在運算上，若無法避免地要把數字暫時寫在右邊時，一定不能省略乘號，例如： $x \cdot 12$ 不能記成 $x12$ ； $y \cdot (-3)$ 不能記成 $y(-3)$ 。但對於 $1-x$ ，我們則較不習慣記成 $-x+1$ 。
- (七) 當不同的文字符號相乘時，可以省略乘號「 \times 」或「 \cdot 」。例如： $a \times b$ 可寫成 ab ； $(-2x) \cdot y$ 可寫成 $-2xy$ 。

※符號次方的約定

$x \cdot x = x^2$ 讀作「 x 的二次方」或「 x 的平方」； $x \cdot x \cdot x = x^3$ 讀作「 x 的三次方」或「 x 的立方」； $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ 讀作「 x 的四次方」，但並無像「平方」「立方」那樣有第二種讀法，往後的次方也是一樣。當 x^2 、 x^3 、 \dots 與數字相乘時，它們的記法和 x 與數字相乘的記法相同，例如：

$$2 \times x^2 = 2 \cdot x^2 = 2x^2 ; -\frac{2}{3} \times x^3 = -\frac{2}{3} \cdot x^3 = -\frac{2}{3}x^3 = -\frac{2x^3}{3}。$$