

第三章一元一次方程式

3-2 一次式的運算

數字的抽象化

在章節 3-1 中，我們學會了如何以符號代表數，而從 3-2 開始，我們才可以說是真正的把”數字”抽象化成”數”。在前面的幾個章節，我們都只是單純的把符號代表成一個任意數，而公式也只是把數字換成一個可以用任意數帶入的符號表示而已。但是從現在開始，我們要真正的把符號用來代表一個未知的數，就如同以前的□一樣，好讓我們用它來幫助我們解決一些必要的問題。

一元一次式

一元一次式，其中「一元」就是指式子當中只有一種符號，而「一次」就是指符號的指數為 1，也就是次方為 1，像是 $x+4$ ， $-3x+2$ ， $(-2x-1)+(2+4x)$ ， 2 ， $y+4-3y$ ，都是一元一次方程式。

注意：在這之前要先和小朋友定義說， $x^1 = x$ ，此外對於 $\frac{1}{x}$ 和 xy 這一類非一元一次方程式的東西，學生若沒問可以先不提，以免造成小朋友的混淆。

一元一次式的化簡

由於一元一次式中的符號是用來代表數，所以一元一次式的四則運算和以前正負整數的運算方法都一樣，像是：

$$(1) 2x \cdot 5 + 7 = 5 \cdot 2x + 7 = 10x + 7$$

$$(2) 3y \cdot (-12) + 8 = (-12) \cdot 3y + 8 = -36y + 8$$

一元一次式的乘積展開

在一元一次式當中，我們運用符號代表數所以分配率也適用於符號的運算，例如：

$$(1) 3 \cdot (x+5) = 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = 3x + 15$$

$$(2) (y+7) \cdot 9 = y \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 9y + 63$$

$$(3) 3 \cdot (4-x) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot x = 12 - 3x$$

$$(4) (6-y) \cdot 9 = 6 \cdot 9 - y \cdot 9 = 54 - 9y$$

注意：

(1)這裡對於初學者來說非常重要，因為這裡會影響到之後併項的部份。

(2)由於之前使用分配率都是把式子乘開，幾乎沒有用到提出”公因數”的方

法，所以在這邊最好先讓同學做一些簡單的例子，讓同學學習提出“公因數”，另外再提出公因數的時候，記得要先練習提出“數字”，在練習提出“數”。像是：

- (A) $2x+2$ 有 2 這個因數可以提出來，所以會變成 $2(x+1)$ 。
- (B) $4x-8$ 有 4 這個因數可以提出來，所以會變成 $4(x-2)$ 。
- (C) $9y-3y$ 同時有 y 可以提出來，所以會變成 $(9-3)y=6y$ 也很符合 9 個 y 減去 3 個 y 等於 6 個 y 的直覺。

一元一次式的併項

何謂項？用加號和減號隔開的就是項，如 $3x+2x+1$ 加號減號總共隔開了 3 個數字，所以共有三項，而 $y+5-2y+1$ 則是用加號減號隔開了 4 個數字，所以共有四項。而併項就是將相同的東西合併，像是把 $x+2x$ 合併便成 $3x$ 。併項是為了讓式子看起來簡單一點，事實上，併項之後往往可以省略不少計算上的麻煩。例如：欲將 $x=88$ 代入 $13x+8-15x+7x$ 時，先併項成 $5x+8$ ，再將 $x=88$ 代入。而什麼時候需要併項呢？在一元一次式當中只要超過 2 項就需要併項了，基本上併完項之後應該是會剩下一個常數向和一個帶有未知數的項，也就是說其實併到最後最多只會剩下兩項，例如：

(1) $-3x+2x=-x$

(2) $3x+5-x-2=2x+3$

(3) $2a-\frac{3}{4}a=\frac{5}{4}a$

注意：

(1) 和之前一樣，併項的練習一樣要從簡單入手，尤其是越重要的部份越是這樣，建議先從整係數下手，之後再開始練習分數和小數的合併。另外學生容易把小數、分數和整數當成不同的東西，做好能多做題目讓他們了解其實小數、分數和整數其實是一樣的。

(2) 當他們合併到最後只剩下兩項的時候，可以和學生們提一下，我們有個約定，要把有 x 的寫在前面，常數寫在後面，例如：

(A) 我們會寫 $3x+2$ 不會寫 $2+3x$

(B) 我們會寫 $5x-1$ 不會寫 $(-1)+5x$

也就是說我們習慣把高次項寫在前面(這部份可以不說，因為尚未教到二次以上的次方)，當然有規則就有例外。像是：

(A) 我們會寫 $3-2x$ 而不會寫成 $(-2x)+3$

(B) $1+x+x^2\cdots$

不過這部份其實身教重於言教，多寫幾次給學生看，久了他們自然就會了。

列出方程式

一元一次式最重要的就是拿來列出一元一次方程式解決一些問題，猶豫要決

定哪樣未知數應該拿來設 x 是很困難的，所以這部份的題目大部分都已經將未知數 x 先設定好了，而學生需要做的就是將方程式列出來。

- (1) 某租車店提供雙人和三人協力車，全店有 20 輛車，且雙人協力車有 x 輛，問該店協力車最多可以租給多少人騎。

解：

雙人協力車有 x 輛，所以三人協力車有 $20 - x$ 輛，雙人協力車可供 $2x$ 人騎，三人協力車可供 $3(20 - x)$ 人騎，所以共可以提供

$$2x + 3(20 - x) = 2x + 60 - 3x = 60 - x \text{ (人)}$$

- (2) 假有 x 元，且甲和乙的錢總數和是 3000 元，如果甲把他的錢的 $\frac{1}{5}$ 分給乙，

請列式乙現在有多少錢。

解：

- (A) 甲有 x 元，則乙原有 $3000 - x$ 元，甲將 $\frac{x}{5}$ 元分給乙，因此乙現在的錢是

$$(3000 - x) + \frac{x}{5} = 3000 + (-1 + \frac{1}{5})x = 3000 - \frac{4}{5}x \text{ (元)}$$

- (B) 先算甲剩下 $x - \frac{x}{5} = \frac{4}{5}x$ 元，再利用甲和乙的錢的總數不變，仍然是 3000 元，

$$\text{所以乙現在的錢是 } 3000 - \frac{4}{5}x \text{ 元}$$

注意：

- (1) 從第一個例題可以看出答案未必要是整數、小數或是分數，可以有未知數 x 沒有關係。此外，在列方程式之前可以先將 x 用真實的數字帶進去，算給學生看，算幾次有感覺之後，再用 x 下去算給學生看，算完之後可以用之前舉的真實數字帶進去答案中，讓學生們知道這樣算是正確的。
- (2) 第二題的”總和不變”是個很重要的方法，以後其實會用的到，但是相對的那個方法比較沒有那麼直觀可以想到，剛開始可以只用方法一即可。

本章節的重點

- (1) 代數式可以依照數的運算規則，做式子的運算及化簡。
- (2) 在一次式的運算中，可以利用分配律和併項，化簡成為較簡潔的式子
- (3) 如何依照題目給予的文字列出一元一次方程式

補充學測題

- (1) $a \oplus b = ab + 3a$ ，則 $-5 \oplus 2x = ??$

解：把 a 用 -5 ， b 用 $2x$ 代入即可， $(-5) \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = (-10x - 15)$

- (2) $\frac{3x-2}{4} + \frac{2x-3}{3} = ??$

解：
$$\frac{3x-2}{4} + \frac{2x-3}{3} = \frac{3(3x-2)+4(2x-3)}{12} = \frac{17x-18}{12}$$

(3)進口一雙鞋 x 元，成本加三成作為定價，打八折出售後，是賺還是賠？

解： $(x+0.3x) \cdot 0.8 = (0.8 \cdot 1.3)x = 1.04x > x$ 所以是賺。