

第一章 二元一次聯立方程式

1-3 加減消去法

加減消去法主要是用在含有一個等號的等式，例如在兩條等式中處理。

例題說明：

例題一：

$$\begin{cases} x+y=15 \cdots\cdots (1) \\ x-y=7 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

在這本書中沒有寫(1)+(2)，雖然在例題二的解題說明有說到“將(1)、(2)相加”，但是通常我們在黑板會寫(1)+(2)，而如果用(1)+(2)的話可能會讓一些學生不清楚我們正在用**等量公理**，所以此本書在這部份是意圖使學生瞭解兩條等式的等量公理的使用，將此兩個式子的等號左邊以及右邊加在一起，就會得到 $(x+y)+(x-y)=15+7$ ，消去 y 之後，會得到 $x=11$ 再代入(1)，此時會跟之前教過的代入法類似，但是之前教時，是代入 $x=y+7$ 的函數，但是這裡代入的是我們先得到的解的常數。(此部份需要由老師跟學生提醒一下差別之處)

➤ 提醒：

當我們在解一個題目可是卻可以用兩種不同的方法時，必須告訴學生為什麼要作兩種方法，各有什麼好處，在前面的代入法時的題目中發現大部份在 x 或 y 的係數都有一個是1或-1，或是兩個式子中的 x 或 y 的係數有簡單倍數的關係，但是在此節中的例題則可以看到比較多不那麼簡單可以進行代換的式子。

例題2：

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \cdots\cdots (1) \\ 5x-3y=-4 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

此題可以看到兩個 $3y$ ，所以也可以將(1)式中的 $3y=4-2x$ 代入(2)，建議在教此題時可以分別使用代入消去法以及加減消去法使學生可以比較。

加減消去法的概念

加減消去法的主要目的在二元一次聯立方程式並不很明顯，因為二元一次聯立方程式只要可以用加減消去法求得的解也可以用代入法求出，但是如果在三元以上時就可以看出加減消去法的重要功能，雖然三元以上也可以用代換，例如 $x+y+z=0$ 也可以用 $z=-x-y$ 代入其它兩個式子，再解 x 與 y 的式子，這麼一

授課老師：單維彰

筆記製作：賴春妍

授課日期：2007年11月01日

筆記完成日期：2007年11月07日

授課範圍：國中第二冊 1-3 加減消去法

1-4 二元一次聯立方程式

層一層的代入最後還是可以得解，但手法過於拙劣，也不易寫成計算機的程式，並且無法銜接線性代數的學習，所以在三元以上不再用代入法，而用高斯消去法，亦即加減消去法。在教學時建議可以跟學生說加減消去法在未來學習數學時具有很重要的用處，而代入法則僅限於二元一次時可以使用。透過說明希望可以提高學生學習第二種方法的動機，因為在二元一次的使用中，加減消去法並不會比代入法還容易，而這也是為什麼要學習代入法的用意。

例題說明

例題四：

$$\begin{cases} 4x - 7y = 15 \cdots\cdots (1) \\ 5x + 3y = 7 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

之前的題目都是用代入法比較好解的題形，但此題用加減消去法則是比較好解的題型。解題時，需要找出係數的最小公倍數，可以提醒學生這與“通分”類似，亦即當兩個分數相加時需要使兩個分母一樣才能夠“加減”；而在聯立方程式中為了要能夠“扣掉”某個未知數，必需使某個未知數的兩個係數是同樣的數(或是一正一負同樣的數)，因此需要最小公倍數。

在此例中， x 的係數是4跟5，而 y 的係數是3跟7都是互質，所以作哪一個都可以，在書中也作了兩個方法，驗證給學生看不管消去哪一個，結果都是相同的。

➤ 書籍編排的缺點：

例題四的隨堂練習的第一題並不需要用到此技巧，無法讓學生可以馬上練習並提高學生學習新方法的動機。

例題五：

$$\begin{cases} 0.5x - 0.2y = 2.5 \\ 0.3x + 0.7y = -2.6 \end{cases}$$

此題是將整數換成小數的係數，從小數中可能看不出互質，因此可以全部乘上10，換成整係數，再回到之前算聯立方程式的想法。

例題六：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 22 \\ \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}y = 17 \end{cases}$$

此題是將整數換成分數，可以先乘上 4 將式子全部變成整係數，或是各別乘上式子的分母將式子換成整係數運算。

在例五與例六這兩題是強烈的暗示學生在遇到小數或分數的係數時，可以先找出每個式子的最小公倍數，讓式子變成整係數之後再運算。隨堂練習中也是延用此精神，只是在出題時我們可以注意不用太絕對，如：隨堂練習的第一小題：

$$\begin{cases} 0.5x - 0.6x = 3.3 \\ 0.7x + 0.8y = 3.8 \end{cases}$$

此題的係數全部都是小數，而第二小題則全部是分數。

➤ **提醒：**

在出題時可將整數與小數或是分數穿插的使用，此方法可以測試學生是否真的瞭解小數、分數或是整數的計算。因為對於國一的學生而言，小數或是分數的使用與運算可能還不覺得是自然的，可以多讓學生練習不同的題型。甚至

可以出一些題目來測試學生是否真的知道，如 $\frac{21}{3} \times 4$ 的題目的可以測試學

生是否可以先變成 7 之後再乘上 4... 等問題。老師可以透過出題來 detect 學生哪裡不會，遇到學生的答案不對時，可以將問題拆解一下，用題目來判斷學生的問題在哪裡。

例題 7：

$$\begin{cases} 32x = 24(y + 2) - 40 \\ 5x + 4(y - 1) = 5 \end{cases}$$

此題可讓學生練習整理式子，之後再行運算，在第一個式子 $32x = 24(y + 2) - 40$ ，因為 32、24 與 40 都不是互質的，所以在整理時可以先全部除以最大公因數。

而在隨堂練習中，第一小題是練習不互質的運算，第二小題則是練習整理式子的技巧，並且在第二個式子， $28(x + 2) - 49(y + 1) = -7$ ，其中三個係數都有 7 的因數，所有需除以最大公因數，使其能夠三個互質。

➤ **提醒：互質概念**

在第一冊有教到三個互質的數其實是兩兩互質，而這個概念在此處可以用到，老師可以在課堂上時順便提醒學生一下。

➤ **整理：**

此節中可以運用到兩個技巧，分別是：

1. 使兩個整係數不同的式子可以相減時，必須乘上最小公倍數，使他們能夠相減，這是擴分的計算。

2. 使有相同因數的式子化簡為最簡式子時，則可以除以其最大公倍數，使其成為兩兩互質的式子，相當於約分的計算。

不管是擴分或是約分，這些式子都與原來的式子是等價的。

例題 8

已知 $x=1$ ， $y=0$ 是 $\begin{cases} ax=b-2(y+1) \\ 2x-ay=b+3 \end{cases}$ 的解，其中 a 、 b 是常數，求 a 、 b 。

此題需要注意的是：求的不是 x 、 y 而是 a 與 b 。我們很難透過定義告訴學生什麼是參數，什麼是未知數，因為參數與未知數在不同的式子中可能會掉換，所以可以跟這題一樣，並沒有強調何者是參數，何者是未知數，讓學生多多練習。

此題中， x 與 y 本來應是未知數，但是此題中是已知的，而 a 與 b 本來應是常數，但在此變成未知數，所以當把 $x=1, y=0$ 代入之後可以變成 a 與 b 的聯立方程式。

摘要：

二元一次聯立方程式可以用加減消去法來求解。

此節的討論與提醒：

在整個 1-3 缺的就是“為什麼”！

數學老師很少告訴學生們“為什麼”，但是“為什麼”是一個脈絡，最廣義的脈絡是這整個學科從古至今“為什麼”發展出這個工具的理由，因為什麼困難而發展出來的；對於學生而言，則是能夠拿這些工具來解決什麼問題，因此瞭解脈絡在數學上的連結是很重要的。

教育上很重視連結，連結又可區分成兩大類，一個是內部的連結，如 1-2 與 1-3 這兩節一定要有內部的連結，為什麼用 1-2 可以解的問題還要要求學生學 1-3 的方法，在課本中有談到兩種方法可以互換，這就是內部的連結，讓學生知道其實是等價的，是一樣的意思，但是比這個技術更高層面的連結就是“為什麼”需要這些？

雖然數學課都在考技術，或是概念，數學老師常捨不得花時間告訴學生歷史上或哲學上面的連結，但是從教學經驗¹中看到，花這個時間的報酬是很高的，因為如果能夠讓學生建立整個數學的架構，可以使得他過很多年都不會忘記，甚至可以在高中數學時再連回來，把高中的陌生的東西連到熟悉的國中數學，而這些連結卻是老師們一直吝於去講的脈絡。透過故事的講述，讓學生覺得學這些是

¹ 從單老師教大一微積分發現雖然一開始可能會落後，但是建立了數學的架構後，在期末的成績甚至會高於其它工學院。而在教自己兒女的過程中，透過數學歷史的故事讓他們瞭解“為什麼”，也能提高學習動機。

授課老師：單維彰

授課日期：2007 年 11 月 01 日

授課範圍：國中第二冊 1-3 加減消去法

1-4 二元一次聯立方程式

筆記製作：賴春妍

筆記完成日期：2007 年 11 月 07 日

有道理的，將來還是有些偉大的事情可以作，而這也是學校老師跟補習班老師不同的地方，如果知道帶這個班要帶三年的話，不妨在第一年可以建立學生的數學架構，回饋通常在一年以後，而且通常會很有收穫。

🌈 補充的進階評量：

$$1. \begin{cases} 301x - 199y = 103 \\ 199x - 301y = -203 \end{cases}$$

Hint: 可以兩式相加再求解

$$2. \frac{y-1}{4} = \frac{-x+6}{3} = \frac{x-y}{2}$$

這題的題型是連等式，出在此處似乎不恰當，因為這種題型學生之前都沒有見過。

$$3. |2x + y - 5| + |3x - 2y - 4| + (x + 4y + m)^2 = 0, \text{ 求 } m?$$

此題可以讓學生再次複習絕對值以及平方都是大於等於 0，所以三項相加為 0 是代表每項都是 0，之後再求解。

做法：

$$\text{前兩項為 } 0 \text{ 可以得到 } \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{求出 } x, y \text{ 的解之後，再代入}$$

$x + 4y + m = 0$ ，即得到 m 的解。

1-4 二元一次聯立方程式的應用

在此節中有基本步驟

第一 挑出未知數

第二 給未知數命名，有些老師把第一與第二合併在一起

第三 列式

第四 求解

第五 寫答案

很多老師常不將第五步驟“寫答案”列入步驟中，但是寫答案在應用題來說是很重要的，例如有些問題可能是買東西，或問幾個人，如果求出的解不是整數的話，例如答案是 3.2 的話，必須想像一下這個情境之下的答案是 3 還是 4? 必須依題目判斷。並且應用題的答案必須讓學生練習用文字回答，如題目是問幾個人，則答案應該回答人數，而非只是“3.2”這種數字。

解題說明：

二元一次聯立方程式的基本題型就是雞兔同籠，如例題一與例題二。例題二是 1-2 時已經讓學生看過的題目，(課本 p15 頁)，只是在 1-2 時只有列式，而在此處就可以透過 1-2 以及 1-3 的方法進階求解。

例題三：

是屬於題型較複雜的題目，因為給了許多的條件，因此在解題說明中課本有用線段的方式解釋。

➤ 提醒：

線段表達的方式對於國一的學生並不陌生，因為在最近的小學課本中，從小學二年級開始就已經有用線段在解應用題！所以透過下圖來輔助說明對學生而言是可行的。



例題四：有一個二位數，十位數字與個位數字的和為 9，如果將十位數字與個位數字交換後，所得的新數比原數少 25。

解此題的先備知識是學生對於十進位是否有充分的瞭解，因為十進位在小學二年級開始就已經學了，所以學生應該是很熟，此題是屬於數學內部的情境問題，使學生可以更瞭解十進位的意思。

授課老師：單維彰

授課日期：2007 年 11 月 01 日

授課範圍：國中第二冊 1-3 加減消去法

1-4 二元一次聯立方程式

筆記製作：賴春妍

筆記完成日期：2007 年 11 月 07 日

例題六：已知上山每小時平均走 2 公里，下山每小時平均走 4 公里，來回一趟共需 6 小時，請問山路有多長？

此題有稍微轉換一下，因為從最後一句無法立即判定未知數為何，反而是設上山用了 x 小時，下山用了 y 為未知數，並且答案也無需將 x 與 y 的解全部求出，僅求出其中一項再乘上公里數即得解。

➤ **提醒**：在教此題時，有必要提醒學生注意一下此題型，讓他們能夠辨認得出來。

自我評量

2. 問：父是子年齡的 4 倍；兩年後，父的年齡是兒子的 3 倍，問父子現年各多少歲？

此題是丟番圖的墓誌銘的簡易題型。丟番圖是一位廣泛編寫有關二次方程式的傑出希臘數學家。他將在他之前所有希臘人已完成的代數成果加以匯集編目，其後人在他死後將墓誌銘刻上下列的文字，而在二元一次聯立方程式中，問年齡的問題是標準的題型。

➤ **補充**：丟番圖的墓誌銘

這個墓裡長眠著丟番圖。啊！多麼偉大的人呀！他一生的 $\frac{1}{6}$ 為童年，經過 $\frac{1}{12}$ 的歲月，臉頰已長滿了鬍鬚，其後的 $\frac{1}{7}$ ，完成終身大事，結婚五年之後，生了一個兒子。啊！可憐的孩子，他在這世上的璀璨人生，只過了他父親的一半就撒手塵環。而其父丟番圖也在充滿悲傷的四年後，走完了他的一生。

意思即是『丟番圖的一生，幼年占 $\frac{1}{6}$ ，青少年占 $\frac{1}{12}$ ，又過了 $\frac{1}{7}$ 才結婚，5 年後生子，子先父 4 年而卒，壽為其父之半。』這相當於方程 $X/6 + X/12 + X/7 + 5 + X/2 + 4 = X$ ， $X = 84$ ，由此知道丟番圖享年 84 歲。

進階評量的補充：

1. 甲乙兩塊稻田原本只能收稻 1000 公斤，後來施了一種肥料後，使甲地收成增加了 10% 而乙地減少了 8%。

雖然我們日常很容易用到“增加了 10%；減少了 8%”等用語，但對國中生而不曉得他們是否知道增加 10% 是乘上 1.1；減少 8% 則是乘上 0.92，這是在這個語言之下所對應的數學的式子，需要跟學生講解一下。

授課老師：單維彰

授課日期：2007 年 11 月 01 日

授課範圍：國中第二冊 1-3 加減消去法

1-4 二元一次聯立方程式

筆記製作：賴春妍

筆記完成日期：2007 年 11 月 07 日

2. 有一家網咖的收費標準：基本每次 50 元，假設可以使用 t 分鐘，超過的分鐘，每分鐘要收 s 塊錢，不足一分鐘以一分鐘計，現已知使用了 120 分鐘，花了 130 塊錢，只知道這樣是否能算出來？

Answer: 不行！因為有兩個未知數，所以要有兩個條件，如果第二個條件是去了 150 分鐘，花了 160 元則能求解。這是一個很好的情境問題，很貼近生活。

3. 兩個罐子裝有相同重量的酒精溶液，其中甲罐水與酒的比重是 3：1；而乙罐則是 1：1，若將此兩罐溶液全部倒入一個較大的容器，而且沒有溢出，則最後混合的溶液的水與酒的比重為何？

此題在列式後可利用等量公理相加求解。但此題並不完全屬於聯立方程式的題型。