

**釐清何謂比例式：**

曾經有看過實習的老師把比例式寫成這樣子，男生：女生 = 5：4，以為中間有一個等號就會是一個式子，但這樣是不對的，充其量這只能算是一個定義，表示男生跟女生的比例關係。真正的比例式是等號兩邊只能有一個不知道的，就像是說假設男生人數不知道，我們假設有  $x$  人，女生人數知道是 36 人，這樣我們就能運用男生與女生的比例去計算男生的人數，按照這樣我們就可以明確寫出  $x : 36 = 5 : 4$  這一個比例式，在稍微計算一下就可以得到男生是 45 人。

**比例式：**

假設有兩個比  $a : b$  和  $c : d$ ，如果這兩個比的比值相等( $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ )，則稱這兩個比相等，記成  $a : b = c : d$ ，這個式子就稱為**比例式**。

當  $a : b = c : d$  時，等式兩邊的比值相等，亦即

$$\text{比值} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{利用等量公理在等號兩邊同乘以 } bd, \text{ 可得到}$$

$$ad = bc \dots \dots \dots (1)$$

這個算式，也可以用下圖來幫忙記憶：

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \longrightarrow ad = bc$$

如果在(1)式等號兩邊同除以  $cd$ ，得到  $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$

各自消去  $d$  和  $c$  後，得  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots \dots \dots (2)$

由(2)式，我們可得到  $a : c = b : d$

同樣的，我們也可以在(1)式兩邊同除以  $ab$ ，各自消去  $a$  和  $b$  後，得到

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \dots \dots \dots (3)$$

(3)式是說如果  $c$  是  $a$  的多少倍，那麼  $d$  就會是  $b$  的多少倍。

**例 1：**

已知  $7 : 3 = 35 : d$ ，求  $d$ 。

解題說明

因為 35 是 7 的 5 倍，所以  $d$  是 3 的 5 倍

即  $d = 3 \times 5 = 15$

**例 2：**(1) 已知  $4a=5b$ ，求  $a:b$ 。(2) 已知  $3a:4b=3:2$ ，求  $a:b$ 。

解題說明

(1) 要先求出  $\frac{a}{b}$ ，但已知  $4a=5b$ ，所以可以利用交叉相乘的想法，把  $b$  移到  $a$  的

分母，4 移到 5 的分母，就會得到  $\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$ 。

因此  $a:b=5:4$ 。

(2) 由題意知道  $\frac{3a}{4b}=\frac{3}{2}$ ，等號兩邊同乘  $\frac{4}{3}$ ，得到  $\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}=2$ ，

因此  $a:b=2:1$ 。

**小技巧：**

在做這種題目時，可以假設其中一個為 1 然後看另外一個是多少，如果恰好為整數就最好，那如果一個是 1，另一個是  $\frac{5}{3}$ ，可以把 3 乘過來就變成 3:5。

**外項乘積等於內項乘積：**

當  $a:b=c:d$  時，就得到  $ad=bc$ ，這是一個比例式的重要性質，經常用來解決比例問題。

**例三：**求下列比例式中的  $x$  值：

$$x:6=6:3$$

解題說明

根據上面的性質可以得到  $3x=6 \times 6$ ，同除以 3，得  $x=12$

在這例子中，6 叫做比例中項，這裡暫時不談，在將來等比級數的時候會再談到，也就是說，3, 6,  $x$  這三個數會形成一個等比數列，從 3 跟 6 可以看出公比是 2，所以  $x=6 \times 2=12$ 。

**例 4：** $(x-1):(x+1)=2:3$  求  $x$ 。

解題說明

這題它的未知數不是只有出現在比例式的其中一項，而是出現在兩項，但是本質上還是只有一個未知數，因為這式子只是一次式，所以我們也只能夠求出一個未知數。可以用比值的形式寫出來，也可以利用外項乘積等於內項乘積，就可以把這個比例式化成一個一次方的式子，然後再求解就好了。

因此  $3(x-1)=2(x+1)$

移項後可得到  $x=5$ 。

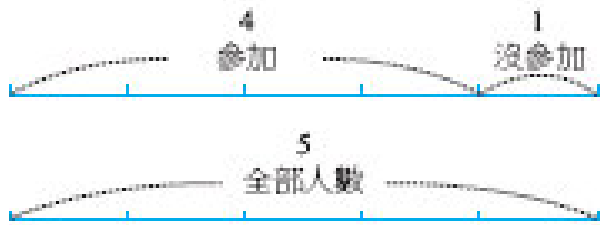
**例 7：**

學生共有 40 人，已知參加校外教學與沒參加的人數比是 4：1，那麼參加與沒參加的各有多少人？

解題說明

方法一：

用國小學過的解法



由上圖，我們知道參加人數和全部人數的比為  $4 : (4 + 1) = 4 : 5$ ，也就是說，全班中參加的人數佔全班的  $\frac{4}{5}$ ，沒參加的人數佔全班的  $\frac{1}{5}$ 。所以參加的人數有  $40 \times \frac{4}{5} = 32$ (人)，而沒參加的人數有  $40 \times \frac{1}{5} = 8$ (人)。

方法二：

有學過未知數的就可以直接假設參加的有  $x$  人，則沒參加的有  $(40 - x)$  人。

依題意得到比例式  $x : (40 - x) = 4 : 1$

在利用外項乘積等於內項乘積的性質，可得到下列方程式：

$$x = 4 \times (40 - x)$$

即  $x = 160 - 4x$

化簡，得  $x = 32$

沒參加的人有  $40 - 32 = 8$ (人)。

**驗證：**

在 P61 上方的隨堂練習中提到地球的表面積約為  $5 \times 10^8$  平方公里，在這裡我們要來驗證一下。

首先表面積的公式為  $4\pi r^2$ ，其中  $\pi$  為圓周率， $r$  是地球的半徑。

然後我們知道地球從北極到赤道(相當於  $\frac{1}{4}$  圓)的一千萬分之一定義為一公尺，所以

換算過後地球的一圈就是 4 萬公里，那根據圓周長的公式得到  $2\pi r = 40000$ ，

移項後得到  $r = \frac{40000}{2\pi}$  再帶入表面積的公式就得到  $4\pi \left(\frac{40000}{2\pi}\right)^2 = \frac{16 \times 10^8}{\pi}$ ，用

$\pi = 3.14$  帶入大約就是  $5 \times 10^8$ 。

**例 9：**

已知  $a : b = 2 : 5$ ，求  $(2a + 5b) : (3a - b)$  的比值。

解題說明

這種題目因為已經知道  $a$  和  $b$  的比值，因此可以假設  $a=2r$ ， $b=5r$ ，其中  $r \neq 0$ ，那為什麼可以這樣假設呢？其實是用到**等值分數**，我們知道  $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ，我們可以

在分子分母同乘一個非零的數  $r$  (有理數)，可得到  $\frac{a}{b} = \frac{2 \times r}{5 \times r}$ ， $r \in \mathbb{Q}$ ， $r \neq 0$ ，

在帶入計算得到  $(2a+5b):(3a-b)=(4r+25r):(6r-5r)=29r:r=29:1$

因此  $(2a+5b):(3a-b)$  的比值為 29。

這種題目有一個小技巧就是可以直接用  $a=2$ ， $b=5$  帶入，然後很快就能算出題目要我們算的比值。

**動動腦：**

若  $a:b=6:5$ ，那麼  $a:(b+1)$  會等於  $6:6$  嗎？

解題說明

這題不像前面的題目可以直接用  $a=6$ ， $b=5$  帶入算出比值，上一題是因為分子跟分母都有  $a$  和  $b$  所以可以提出共同的係數  $r$ ，在算比值的時候就會約掉，但這

題如果用  $a=6r$ ， $b=5r$  帶進去算比值會是  $\frac{6r}{5r+1}$ ，分子分母沒辦法提出  $r$  來消

掉，所以他的比不是只有  $6:6$ ，用  $r=2$  帶進去的話就會變成是  $12:11$ 。所以這一題題目所敘述的是錯誤的。

**例 10：**

已知  $a:b=2:3$ ，且  $a+b=50$ ，求  $a$ 、 $b$  的值。

解題說明

方法一：

這題可以不需要假設  $a=2r$ ， $b=3r$ ，因為我們知道  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  即代表  $a = \frac{2}{3}b$  這個一

次式的關係就可以把它帶入  $a+b=50$  裡面再去求解。

方法二：

另外一種就是先利用外項乘積等於內項乘積可以得到  $3a=2b$ ，然後再把第二式同乘以 3 得到  $3a+3b=150$ ，再把  $3a$  換成  $2b$  就可以求得  $b=30$ ，然後  $a=20$ 。

**老師建議：**這種想法就可以跳過比例常數裡面的那個  $r$ ，而且這題目事實上就是相當於第一章的二元一次聯立方程式，再這裡建議跟第一章做一個數學的內部連結。

**例 11：**

一船航行於甲、乙兩港口間，已知船順流和逆流的速度比為  $5:3$ ，求船和水流的速度比。

解題說明

假設船速為  $x$ ，水流速度為  $y$ ，則順流速度為  $x+y$ ，逆流速度為  $x-y$ 。

由題意知  $(x+y):(x-y)=5:3$

得  $5(x-y)=3(x+y)$   
移項得  $2x=8y \Rightarrow x=4y$   
因此  $x:y=4y:y=4:1$

**老師提醒：**

這種題型是第一次在 2-2 出現，老師在教書的時候要小心一點，還好這一題只需要求出  $x$  與  $y$  的比，因為我們只有一個式子，它給的資訊是不夠的，沒辦法算出  $x$  跟  $y$ ，在這裡要特別注意一下。另外，這種題型也可以套用在飛機航行上，頂風就是表示飛機是逆風飛行，尾風就表示順風飛行，透過這種數學與日常生活的連結，可以激發學生學習的動力。

**例 13：**

若兩圓的半徑比為  $2:3$ ，求兩圓的面積比。

解題說明

設兩圓半徑分別為  $a$ 、 $b$ ，由題意知  $a:b=2:3$ ，

可假設  $a=2r$ ， $b=3r$ ， $r \neq 0$ 。

兩圓面積分別為  $\pi a^2=4\pi r^2$  和  $\pi b^2=9\pi r^2$ ，其中  $\pi$  為圓周率。

所以兩圓的面積比為  $4\pi r^2:9\pi r^2=4:9$ 。

**提醒：**

這題熟練數學的人都知道圓的面積比是半徑的平方比，但是在教學生的時候他們都還不知道，所以在教的時候一定要一步一步慢慢來。