

## 國中數學第二冊第三章 函數與直角坐標

### 3-2 直角坐標 (P. 94 起)

進入 94 頁前，可以先複習一維數線上幾件很重要的事情：0、單位長、正、負、絕對值、距離、方向…等。也許十幾分鐘複習這件事，然後再進入直角坐標。

#### ● 認識坐標

\* 在平面上各做一條水平和鉛直的數線。它們的交點就是它們共同的原點。

→ 以前說的數線都是水平的，而且箭頭朝右。水平跟鉛垂的兩條數線，鉛垂那條數線在文字上沒說，直接在圖上面畫了，方向朝上。學生通常不會在這產生問題。

→ 其實 X 軸跟 Y 軸的單位長不一定要一樣長，但剛開始當然都是假設它一樣長，而且在黑板上也要盡量畫一樣長，跟學生說我們的習慣是在 X 軸跟 Y 軸上的單位長要一樣長。

\* 如果 A 點在 X 軸上的數線坐標是 3，則數對(3, 0)為 A 點的坐標。

→ 就 X 軸的數線來說這個坐標是 3。但跑到這個平面坐標上，卻不能說它是 3，得說它是(3, 0)。也許真正初學的學生在這邊會有困難。一開始的時候跟學生說這只是我們的規定。在平面上標定一個點，它的坐標就應該要用平面坐標的方式來寫。

\* X 軸上的坐標可以用(a,0)的形式來表示，a 為任意數。Y 軸上的坐標可以用(0,b)的形式來表示，其中 b 是任意數。如果  $b > 0$  代表在原點上方， $b < 0$  代表在原點下方。

→ boundary case 其實是困難的，是對數學已經成熟一點的人講到的事情。

boundary 的東西不要立刻在這出現。比如說當你介紹了分數以後，不要先

說  $\frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}$  都是 0。對初學者來說，他不會一開始就想到  $\frac{0}{3}$  這件事， $\frac{1}{3}$  或  $\frac{1}{4}$  才

是比較習慣會看到的數。

→ 一個 0 的 CASE 其實不是自然的。它是一個屬於邊界、一個極致。正常的人看到一個直角坐標平面不會先想到 0 叫甚麼點，他先想到的也許是 1 這個位置叫甚麼點，看到的是平面上的位置，那是比較直覺想要回答的問題。等一、二、三、四象限裡面的數都弄得比較清楚之後，再跟他說如果這個點恰好在 X 軸上或 Y 軸上，那就要小心。就數線來說，如果在 X 軸上的 3 畫了一點，問你這個點在直角坐標平面上的坐標是什麼，那就應該回答(3, 0)。這件事應該放在後面。

**動動腦** 鉛直線垂直於 X 軸，還是垂直於 Y 軸。

→我覺得這個問題叫動動腦不好。動動腦是說知道定義、知道題目的意義，但是你要想清定義之間或對題目數量之間的關係，你想要解決問題，這才叫動動腦。這裡是屬於事實的問題，就好像我問你牛頓出生於哪一年？這不是動動腦，這不是你推論或想像或去計算可以算出來的事情，這明明就是個事實。所以這個題目叫做動動腦相當不恰當。鉛垂線垂直於 X 軸，這裡應該是在問 X 軸跟 Y 軸哪一條叫作鉛直線，哪一條叫作水平線。

**例題一** 求 A、B 兩點的坐標，A、B 點都在軸上。並求 O 到 A 的距離與 O 到 B 的距離。

→在平面上還沒有定義什麼是距離。但在這裡是恰好會對，O 到 A 與 O 到 B 的距離仍然是數線上距離的意思。但平面上的距離是兩點拉一條直線，畢氏定理得要出來才行，畢氏定理在國二上才會講到。在這裡沿用了以前一條數線上絕對值的觀念。這是一個蒙混過去的說法。為何這個點的坐標要用  $(0, 4)$  來表示，但距離可以回到數線上用絕對值來說。一下子跟學生說不能寫 4，要寫  $(0, 4)$ ；一下子又說算距離用絕對值就好。

\*課本的邏輯是先把 X 軸與 Y 軸說清楚，再說後面的東西。

→我不同意這個說法。我覺得直角坐標畫完後，接下來應該是圖 3-5。而且先不要畫到第三、四象限，先說第一象限。直角坐標也可以畫在稍微左側或下側，使得第一象限會比較多。然後先專注在第一象限，用自然數的坐標讓學生先弄清楚。自然數才是大家覺得看起來最舒服的。

→這裡不需要太客氣，有的時候數學規定就是如此。比方說圖 3-5 上 C 點的坐標，如何決定它的坐標。不是隨便畫一條線到 X 軸, Y 軸都行，而是要畫通過 C 點鉛垂跟水平的線，看看對到 X 軸跟 Y 軸上的刻度是什麼，再寫成一個序對。

→這裡可以順便告訴學生一個習慣，通常用大寫的英文字母代表一個點，這個點後面直接用一對小括號的兩個數字來代表這個點的坐標。這些事情都是數學習慣，在這種事情上不需要擔心。教數學的人總是希望每件事情告訴學生都是有理由的。但是有的時候都是沒理由的，我們只是在說數學這個語言是什麼。

**動動腦** 通過  $(3, -5)$  的水平線，其線上各點的坐標有甚麼特徵？

→水平線的 X 坐標什麼數都有可能，Y 坐標都會維持在 -5。

\*前面的課題是用圖形，在坐標平面上先給一個點，然後問這個點的坐標。反過來是給一個坐標，然後要求在方格紙上標定一個點。

動動腦 過 X 軸 A(3, 0) 畫一條鉛直線，過 Y 軸的 E 點(0, 5) 畫一條水平線。

→同樣一個題目裡，兩句話說的方法不一致。我們要以身作則，寫下來的時候，要寫乾淨俐落的數學語言。這兩句話都是正確的數學語言，但就是要寫一致。如果在書上一直這樣寫，學生一直這樣讀，老師一直這樣講，潛移默化之下學生就會有一套精準的數學語言。他可以用國語或英語或閩南語這種自然語言來描述一些數學，但他應該也要有能力用正規的數學語言來描述一些事情。

### 例題三

→跟前面的例子不同的是，現在跑到第二象限跟第四象限。

### 隨堂練習

→這裡突然出現 0.5，以前沒見過。老師之前都沒有教過學生，而突然在這邊出一個練習。理論上隨堂練習應該叫人上台做，或者是學生做老師走下去看一看。隨堂練習最好是學生做過的事情，不要推廣太多。

\*前面的隨堂練習我們可以注意到，(-5, -1)跟(-1, -5)是不同的點；(-4, 3.5)跟(3.5, -4)是不同的點。次序改變所代表的點是不同的。例如(1, 2), (2, 1)。

→前面已經做了比(1, 2), (2, 1)難度高的點，為何這還要說(1, 2), (2, 1)。

(1, 2), (2, 1)應該是要學生做的，後面才說(-4, 3.5)跟(3.5, -4)不一樣，簡單的說前面，困難的在後面才是有道理的。

→國小學過畫對稱，在這裡可以提醒一下這是對稱的。

例題五 坐標平面上有一點 P，若沿著過 P 點的鉛直線向下走三個單位，然後再沿著水平線向左走三個單位後，所得到的點作標為(1, 1)，請問 P 點的坐標為何？

→這是不錯的題目，但先用順的方向做一遍，比較符合學習的思維。先順著做一遍，再用隨堂練習或下一個例子說反回來的方向。第一次就用反回來的方向，對學生的要求稍微高一點。

### ● 認識象限

假如一點不在 X 軸或 Y 軸上，這時該點的 X 坐標與 Y 坐標的正負號，與該點和原點的相對位置有何關係？

→這裡的相對位置是指在原點的右上方或左下方。

### 例題六

→我們可以看到，一個點的  $X$  坐標及  $Y$  坐標都是正數，這個點就落在第一象限的區域裡。以逆時針的方向依序稱這四塊為第一象限，第二象限，第三象限，第四象限。圖 3-8 還為學生準備學習的工具。這是建構主義教學法最反對的事情。也就是說所有的學習都要學生自己發現、建構的。老師不要把工具交到他的手上。在一個極限的程度上這句話是對的，不應該都幫學生準備好。但如果這件事不是這麼困難，而且事實上第一，第二，第三，第四象限也沒甚麼好教的，這是數學規定。

### 隨堂練習

→只要討論它的正負號就行了。

動動腦 如果  $a$  是正數， $(a, a)$  在第幾象限？如果  $a$  是負數呢？

→兩個坐標同正的是第一象限；同負的會是第三象限。

## ● 點與坐標軸的距離

\*這裡先說的距離是點到坐標軸的距離。

→這裡我蠻同意這個說法。因為點到線的距離是更難解釋的事情，不如在這裡先別管一般的點到線距離。我們只特別的談坐標平面上一個點到  $X$  軸或  $Y$  軸的距離。這裡意謂著定義什麼是點到直線的距離、點到  $X$  軸的距離、點到  $Y$  軸的距離。我們這樣定義著，這不是推論出來，而是算出來的。

\*105 頁有給一個學習工具，它歸納了一個結論。如果知道  $P$  點坐標為  $(a, b)$ ，那麼  $P$  點到  $X$  軸的距離是  $|b|$ ，到  $Y$  軸的距離是  $|a|$ 。

→課本又一次太過重視代數，這多難背。跟  $X$  軸的距離不是取  $a$  而是取  $b$ 。如果畫個圖，這事情就很清楚。但是要用背的，漸漸的都背的失去焦點，更何況現在才國一而已。

### 隨堂練習

→公式還在上面，根本測不出來學生懂不懂、會不會。很容易把答案寫出來，到最後變成在練習操作絕對值，而不是在練習了解什麼是點到線或點到軸的距離。沒有圖像的知識，我覺得學生不太懂。

例題七 已知第四象限中，有一點  $P(2, b)$  到  $x$  軸的距離，等於它到  $y$  軸的距離，求  $b$ 。

→ $P(2, b)$  到  $X$  軸的距離等於到  $Y$  軸的距離。也就是  $|b| = 2$ 。

隨堂練習 已知第三象限中，有一點  $P(-2, b)$  到  $x$  軸的距離，等於它到  $y$  軸的距離，求  $b$ 。

→跟例題七的效果一樣。

動動腦 已知  $P(2+a, 5)$  在第一象限，而且它到  $Y$  軸的距離為 3，求  $a$  是多少。

→ $\because |2+a|=3$ ，但  $P$  在第一象限，

$\therefore 2+a=3$ ， $a=1$ 。

例題八 已知  $A$  點在第二象限，而且它和  $X$  軸的距離為 4、和  $Y$  軸的距離為 3，求  $A$  點坐標。

→其實這題就是應該畫圖。因為  $A$  點落在第二象限， $X$  是負的、 $Y$  是正的。老師應該帶領著學生先把坐標軸畫出來，現在在第二象限。跟  $X$  軸的距離為 4，所以高度是 4；跟  $Y$  軸的距離是 3，因為在第二象限，所以  $X$  一定是 -3。

隨堂練習 已知  $B$  點在第三象限，而且它和  $x$  軸的距離為 6、和  $y$  軸的距離為 4，求  $B$  點坐標

→這題問的是第三象限。解題方法一樣都是代數，跟例題八一樣。