

### 4-3 不等式和數線

前面 4-2 所述說的是代數，而 4-3 這節又回到數線上。像中點，在 155 頁上有畫出圖形。不等式  $t > 37$  有兩層意思，一個是指某個特定的數，這是指一個大於 37 的數，另一方面也是泛指所有大於 37 的數，此時的  $t > 37$  是在說明  $t$  的範圍。一個是說著重於某一個未知數，就是把  $t > 37$  當方程式來看， $t$  是一個未知數，所以代進去合或不合來檢查是否滿足方程式，所以  $t > 37$  是某一個大於 37 的數。另外  $t > 37$  的意義是指一整塊所有大於 37 的數的範圍。這就牽扯到數線，就像二元一次方程式像是  $x + 3y = 4$ ,  $x + 2y = 1$ ，就把  $x$  和  $y$  一對一對的代進去看看合不合，但是也有另一層意義就是指在平面上  $x$  和  $y$  的關係是一條直線，所以之前學的二元一次方程式也可以說有兩層意思，一層意思是把某一對未知數 ( $x$ ,  $y$ ) 代進方程式檢查合不合，另一層意思則是指平面上  $x$  和  $y$  的關係。

◆ **例 1**：用不等式表示下列各個數的範圍（符號用  $x$  來表示）：

- (1) 所有小於 0 的數。                      (2) 所有大於 3 且小於 5.5 的數。

◇ **解**：

(1) 所有小於 0 的數（也就是所有的負數），可記成  $x < 0$ 。

(2) 所有大於 3 且小於 5.5 的數。就是所有同時大於 3 又小於 5.5 的數，也就是  $3 < x$  且  $x < 5.5$ ，可把不等式合併為  $3 < x < 5.5$ 。

※ **老師的看法與建議**：

這裡就是把自然的語言翻譯成數學的語言，像把「所有小於 0 的數」這個自然的語言，表示成「 $x < 0$ 」這個數學的語言。在這兩題的  $x$  都是指範圍。在 4-1 節所談到的例子，像溫度、車票（全票、半票）、BMI 值，這些都可以用圖形來表示。



圖 4-5



圖 4-6



圖 4-7



圖 4-8

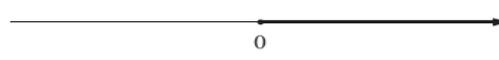


圖 4-10

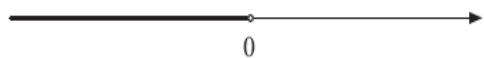


圖 4-9



圖 4-11

從圖 4-8 看到圖 4-11 看出，如果包含某個點的話，這個點就用一個黑黑的點或小圓球表示，如果不包含的話，那我們畫一個空白的小圓圈來表示這個點。像圖 4-8、4-9 都是大於 0 ( $x > 0$ ) 及小於 0 ( $x < 0$ ) 的圖形，而它們在 0 的位置，也就是**邊界點**，都用一個白色的圓圈表示，代表 0 不在範圍內，這裡標出的點是指大於或小於 0 的範圍。而圖 4-10 與 4-11 在 0 的位置上是用一個黑黑的點表示，代表包含 0 這個點（分別表示  $x \geq 0$  與  $x \leq 0$ ），意思是說 0 這個邊界點在範圍內。

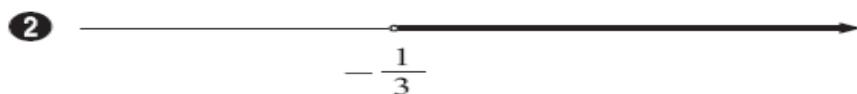
◆ **例 2**：寫出下列圖是所表示的不等式：



◇ **解**：由圖知道點在 -5 的右邊且包含 -5，因此不等式的範圍為  $x \geq -5$ 。

★ **隨堂練習**：

寫出下列圖示範圍所表示的不等式：



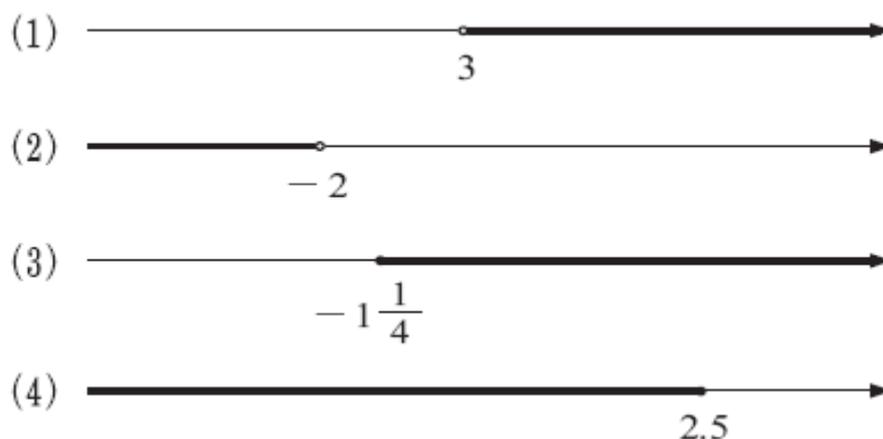
☆ **解**：(1)  $x \leq 1.5$                       (2)  $x > -\frac{1}{3}$

例 3 則是相反過來練習，上面的例 2 與隨堂練習都是要學生從數線的範圍表示成不等式的形式，而例 3 則是要學生把不等式的形式畫成數線的範圍。

◆ **例 3**：在數線上標示出下列不等式的範圍：

(1)  $x > 3$  (2)  $x < -2$  (3)  $x \geq -1\frac{1}{4}$  (4)  $x \leq 2.5$

◇ 解：



接下來如果我們想要表示  $x > 0$  而且  $x \leq 1$  (即  $0 < x \leq 1$ ) 時，我們會取兩者的交集。圖 4-12 把它們化成兩條圖，左邊藍色的圖表示  $x \leq 1$ ，右邊紅色的圖則表示  $x > 0$ 。而圖 4-13 把兩條線的交集畫成紫色，代表  $0 < x \leq 1$ 。



圖 4-12

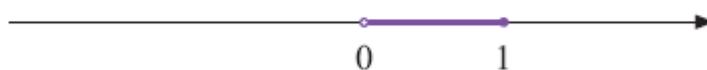


圖 4-13

※ **老師的看法與建議：**個人認為直接對  $0 < x \leq 1$  這個不等式在數線上畫出像圖 4-13 的圖形應該會比先作圖 4-12 的圖形再作圖 4-13 的圖形要來的簡單。因為  $0 < x \leq 1$  已經說的很清楚了，大於 0 就是在 0 的右邊，小於等於 1 則是在 1 的左邊，而且 1 是可能相等的而 0 是不可能相等的，所以就對 0 畫白色圈圈、1 畫黑色圈圈把整個圖形畫出來。而在圖 4-12 要把圖形拆成兩個然後再作所謂的交集，況且在國一下時還不能用交集這個概念，因此個人認為先經過圖 4-12 在變成圖 4-13 並不會比較容易。所以提醒各位如果教到這邊要特別注意。

◆ **例 4：**寫出下列圖示範圍所表示的不等式：

◇ 解：

由圖知道，點的範圍在 -3 的右邊以及在 3 的左邊，同時包含 3 和 -3 兩點，所以範圍為  $-3 \leq x \leq 3$ 。

下面的隨堂練習也是一樣的作法。

### ★ 隨堂練習：

寫出下列圖示範圍所表示的不等式：

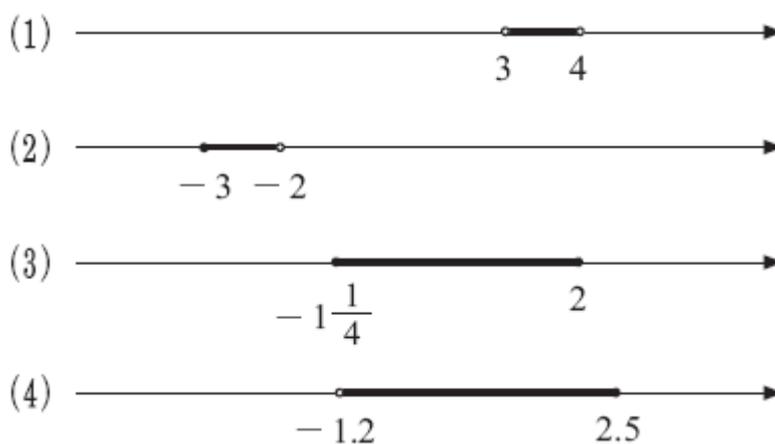


☆ 解：  $-5 \leq x \leq 3$ 。

### ◆ 例 5：在數線上標示出下列不等式的範圍：

(1)  $4 > x > 3$  (2)  $-3 \leq x < -2$  (3)  $2 \geq x \geq -1\frac{1}{4}$  (4)  $-1.2 < x \leq 2.5$

◇ 解：



### § 摘要：

數的範圍可以用不等式來表示。例如： $0 \leq x \leq 100$  代表介於 0 與 100 之間的所有數，包括 0 與 100。

## 4-4 一元一次不等式

我們之前寫過一元一次方程式，例如  $x=1$ 。現在的一元一次不等式也是一樣，不同的是一元一次方程式的「等號」換成了四種可能的「不等號」，這四種可能的「不等號」分別是「小於 ( $<$ )」、「大於 ( $>$ )」、「小於等於 ( $\leq$ )」、「大於等於 ( $\geq$ )」。此外其實還有幾種不等號，像是「不等於」、「不大於」、「不小於」，只是在書上並沒有把這些符號畫出來，只有在文字上有寫，而且有些「不等號」是等價的，例如「不大於」就是「小於等於」，「不小於」就是「大於等於」。一開始提到了  $x < 220$  而且  $x + 50 \geq 220$ ，因此我們得到  $x < 220$  而且  $x \geq 170$ ，合併後  $x$  的範圍便是  $170 \leq x < 220$ 。

### ◎ 一元一次不等式

一個不等式的兩邊，如果有一邊是一元一次式，而另一邊是數（常數）或是同一個未知數，則稱這樣的不等式稱為「一元一次不等式」。當然也可以說經過移項後合併使一邊變為 0，另一邊變為一元一次式，則這也是一元一次不等式。

◆ **例 1**：下列哪些數是一元一次不等式  $x-3 \leq 0$  的解？

-5、-3、3、5

◇ **解**：

將各數帶入不等式，得到

$$-5-3=-8<0$$

$$-3-3=-6<0$$

$$3-3=0=0$$

$$5-3=2>0$$

所以 -5、-3、3 是不等式的解。

※ **老師的看法與建議**：

這裡要學生學的還是與之前一元一次方程式一樣，就是把數代入檢查合不合，如果滿足方程式的話，就說是這個方程式的解。下面的隨堂練習也是一樣的作法，就是要分別代入。

★ **隨堂練習**：下列哪些數是一元一次不等式  $x+\frac{7}{5}>0$  的解？

-2、-1、0、1、2

☆ **解**：-1、0、1、2

所以在這之前，要先學會數的範圍以不等式表示，並要熟練移項、合併的技巧。在這邊，幾乎都是在技術上求解，有幾提示比較複雜的情況，例如例 4。

◆ **例 4**：求下列不等式解的範圍，並在數線上標示出來：

$$(1) -4+x < 6 \quad (2) -7x+3 \geq 10$$

◇ **解**：

$$(1) \text{ 原不等式} \quad -x+4 < 6$$

$$\text{兩邊同減 4，即得} \quad -x < 2$$

$$\text{兩邊同乘以 } (-1)，\text{得} \quad x > -2$$

其圖示為



$$(2) \text{ 原不等式} \quad -7x+3 \geq 10$$

$$\text{兩邊同減 3，即得} \quad -7x \geq 7$$

$$\text{兩邊同乘以 } (-7)，\text{得} \quad x \leq -1$$

其圖示為

**※ 老師的看法與建議：**

以例 4 的 (2) 來看，我們知道第三步要兩邊同除以 (-7) 或是同乘以  $(-\frac{1}{7})$ ，但如果學生對同除或同乘一個負數有困難，就教他先把負號消掉，也就是先移項（等號兩邊交換），這時  $x$  的係數應該就是正數了，然後再兩邊同除以這個係數或同乘以這個係數的倒數。比如說例 4 的 (2) 中的  $-7x \geq 7$ ，先移項變成  $7x \leq -7$ ，然後再兩邊同除以 7 或同乘以  $\frac{1}{7}$ 。這樣對某些對於乘以或除以一個負數要變號感到 uncomfortable（不舒服）的學生，可能會好一點，再以隨堂練習的第二題為例，題目要解不等式  $-3x - 1 \leq -1$ ，首先也是先移項變成  $-3x \leq 0$ ，然後再左右交換變成  $3x \geq 0$ ，最後再把  $x$  的係數 3 除過去得到  $x \geq 0$ 。

◆ **例 5：**求不等式  $5x - 1 \geq 3x + 5$  解的範圍。

◇ **解：**原不等式  $5x - 1 \geq 3x + 5$   
 兩邊同時加 1 得  $5x \geq 3x + 6$   
 兩邊同時減  $3x$  得  $2x \geq 6$   
 兩邊同時除以 2 得  $x \geq 3$

**※ 老師的看法與建議：**

例 5 是一個兩邊都是一元一次式的不等式，在解這個不等式的過程就像在解一元一次方程式一樣，就是用移項、合併的手法使有  $x$  的項放在不等號一邊，而純數字的項（常數項）放在不等號的另一邊。同理，隨堂練習也是這樣子做。以隨堂練習第二小題為例，題目要解  $-3x + 2 \leq 3(x - 2) + 1$ ，就用剛剛說的方式先移項合併成  $-6x \leq -7$ ，再用兩邊相反數變成  $7 \leq 6x$ ，這樣會比較好算，最後再把 6 除過去得到  $x \geq \frac{7}{6}$ 。

◆ **例 6：**求不等式  $-1 < 3x + 2 < 5$  解的範圍，並在數線上標示出來。

**※ 老師的講解與建議：**

這裡要跟學生說當初在說  $3 < x < 5$  時，是指  $3 < x$  且  $x < 5$  這兩個不等式同時成立。現在看到的  $-1 < 3x + 2 < 5$  也是如此，把它看成  $-1 < 3x + 2$  而且  $3x + 2 < 5$  兩個不等式，然後分別求解，一邊得到  $x > -1$ ，而且另一邊得到  $x < 1$ ，最後再把這些解的範圍合併起來得到  $-1 < x < 1$ 。所以解一個這樣的不等式就像在解兩個聯立不等式一樣。課本 172 頁還講了方法二，這個方法二就是對這個不等式直接作移項與等量公理的計算。這個方法也有練習的必要因為不久我們就要學習絕對值的計算。一旦有絕對值要處理

時，這個方法會比較簡單些。 $-1 < 3x + 2 < 5$  三邊同時加上  $(-2)$ ，就會得到  $-3 < 3x < 3$ ，然後在三邊同除以 3，最後得到  $-1 < x < 1$ 。隨堂練習也可以要求學生用兩種不同的方法作出來。不過這個隨堂練習用方法二會麻煩一點，因為要對  $-2 < -x + 1 \leq 3$  三邊同時減 1 變成  $-3 < -x \leq 2$ ，然後要作相反數，大家都作相反數全部翻過來變成  $-2 \leq x < 3$ 。這已經是這一章的最後一節了，因此後面的例題都是應用題。

◆ **例 7**：假如某年美國芝加哥地區冬天的月均溫都低於華氏 41 度，請用攝氏的範圍來表示。如果同年台灣冬天的月均溫都高於攝氏 10 度，請用華氏的範圍來表示。

◇ **解**：

(1) 以  $t^{\circ}\text{C}$  表示攝氏溫度，則華氏溫度為  $(\frac{9}{5}t + 32)^{\circ}\text{F}$ ，由題意知

$\frac{9}{5}t + 32 < 41$ ，兩邊同減 32 得  $\frac{9}{5}t < 9$ ，在同乘  $\frac{5}{9}$  得到  $t < 5$ 。因此芝加哥冬天月均溫都低於攝氏 5 度。

(2) 由題意知，該年台灣月均溫的攝氏溫度可表示為  $t > 10$ ，同乘  $\frac{9}{5}$  得

$\frac{9}{5}t > 18$ ，同加 32 得  $\frac{9}{5}t + 32 > 50$ 。因此台灣冬天月均溫都高於華氏 50 度。

※ **老師的看法與建議**：

溫度的轉換在之前就有提過，只是之前學的是兩種溫度單位是直線的關係，而這邊則是要你直接用它們之間的關係式，因此從這裡可以看出編教科書的人希望學生把這種溫度轉換的公式背下來，個人認為這個公式最好能夠把它背下來，因為這個東西一直到大學都還很實用，一方面它也是生活中的例子。

★ **隨堂練習**：

一長方形的長為 20 公分，若寬小於 15 公分，求周長的範圍。

※ **老師的講解與建議**：

這題有一個很大的陷阱，就是我們會假設寬  $x$  公分且  $x < 15$  公分，因此周長為  $2(x + 20)$  公分。而求周長範圍時會只考慮到  $2(x + 20) < 2(15 + 20) = 70$ ，而忽略了周長要大於  $2 \times 20$ ，因此真正的周長的範圍是  $40 < 2(x + 20) < 70$ 。

◆ **例 8**：廷聰拿 100 元到郵局買面額 12 元的郵票，已知廷聰至少會買一張郵票，那麼廷聰可能有幾種買法？他最多可以買幾張郵票？

**※ 老師的講解與建議：**

「幾種買法」這樣的用詞是屬於數學語言而非一般自然語言，通常我們在使用上要盡量避免自然語言和數學語言交雜使用，用自然語言時就盡量不要夾雜數學語言，而「幾種買法」看起來很像是數學語言。題目問說有幾種買法是指買的張數有幾種選擇方法，用我們的自然語言確實很難說清楚買法。因此立一個式子  $12x \leq 100$ ，把 12 除過去得  $x \leq 8\frac{1}{3}$ ，因為廷聰至

少買一張郵票所以  $x \geq 1$ ，由這兩個式子可以得到  $1 \leq x \leq 8\frac{1}{3}$ ，又因為  $x$  為正整數，所以  $x$  的可能為 1、2、3、4、5、6、7、8。所以廷聰有 8 種買法，最多可以買 8 張郵票。

**★ 隨堂練習：**

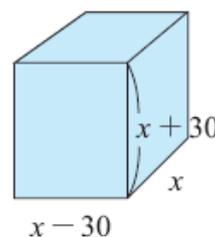
美華和弟弟逛書店，他們的前合起來可以買一本 500 元的字典，但不夠買 1500 元的百科全書。已知美華比弟弟多帶了 100 元，美華可能帶了多少錢？

**※ 老師的講解與建議：**

因為題目要求美華帶的錢，所以就假設美華帶了  $x$  元，因為美華比弟弟多帶 100 元，所以弟弟帶了  $x-100$  元，兩人相加的錢共有  $2x-100$  元，由題意列出不等式  $500 \leq 2x-100 < 1500$ ，三邊同加 100 得  $600 \leq 2x < 1600$ ，再同除 2 得  $300 \leq x < 800$ 。因此美華最少帶 300 元，最多帶 799 元。

**◆ 例 10：**

在 4-1 節例 2，到郵局記包裹的例子裡，如果有一個長方體的包裹，它的三邊長是  $(x-30)$  公分， $x$  公分， $(x+30)$  公分。若要這個長方體符合郵局包裹的規定，求  $x$  的範圍。

**※ 老師的講解與建議：**

這題要翻回前面的例子來看，依照之前的例子的規定，我們開始列出不等式： $x+30 \leq 150$ ， $(x+30)+2(x-30) \leq 300$ ， $x-30 > 0$ ，在分別求出  $x$  的範圍，得到  $x > 30$ ， $x \leq 120$ ， $x \leq 66$ ，其實這題不需要畫圖取交集，只要按照一般的思考去想，就可以算出  $x$  的範圍是  $30 < x \leq 66$ 。

**§ 摘要：**

1. 利用不等式的運算原則，以及類似解一元一次方程式的方法，可以解一元一次不等式。要注意的是不等號兩邊同乘（或除）以負數時，不等號的方向要改變。
2. 同時解多個一元一次不等式時，應先求各個不等式的解，在取其共同的部分。

授課老師：單維彰 老師

筆記紀錄：潘漢文

紀錄日期：2007 年 11 月 29 日

授課範圍：部編版國中教材第二冊 4-3 不等式和數線 ~ 4-4 一元一次不等式

3. 以一元一次不等式解應用問題時，列式與求解都應要注意是否符合題意。