

### $\sqrt{a}$ 的大小比較：

能夠比較大小的代表的是一個數。而 $\sqrt{a}$ 是一個代數符號，指的是某個數的根號，這樣的數在前面 58 頁的說明並不嚴謹，只是讓學生知道可以用圓規和直尺在數線上找到一個這樣的點，但嚴格來說，要等到高等微積分中的實數的完備性才來談的事情。而類似 $\sqrt{2}$ 的數，雖然在數線上找到一個位置，但是卻沒有辦法表示成有理數的樣子(此本書談到的有理數指的是有限小數和分數)。在國中數學裡面，雖然有提到，但並沒有完整的說明類似 $\sqrt{2}$ 的數是無理數。如果 $a, b$ 是兩個不相等正數，則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 就會在兩個不同的位置，因此是可以比大小的。

在 64 頁開頭的地方已經討論過 $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ ，代表著 $a$ 是一個正方形面積， $b$ 是一個比較小的正方形面積，用直覺來看，面積 $a$ 大於面積 $b$ 的時候，邊長 $\sqrt{a}$ 也會大於邊長 $\sqrt{b}$ ，反應的是 $\sqrt{x}$ 是一個漸增函數。

#### 例 5:

比較下列各組數的大小。其實，前面是在告訴我們如何比較 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 誰大誰小就是要比較根號裡面的數誰大誰小。在例題五裡有變化。第一小題只要比根號裡面的大小。第二小題假裝一個數沒有根號，因此要把沒有根號的寫成有根號的形式。同樣第四小題 1.6 要寫成 $\sqrt{2.56}$ 。第三小題， $2\sqrt{3}$ 不是一個整數，也不是單純的根數，所以老師就要教學生，不可以直接比大小，要把它都換成全部都在根號裡面，因此 $2 = \sqrt{4} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$ 。

**註：**數學上的慣例，習慣把能夠寫成完全平方數的因數提到根號外面來，而不是把它方在根號裡面。

#### 例 6:

和例 5 一樣的類型。其中第二、三小題有一個技巧，因為 $8\sqrt{5}$ 和 16 可以一

授課日期：2007年12月13日

授課範圍：國中第三冊 2-2 平方根與近似值(從 $\sqrt{a}$ 的大小比較開始)  
2-3 根式的運算(到前言)

起約掉8，直接比較 $\sqrt{5}$ 和2就可以了，而 $\sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$ ，分別比較30和29以及 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 。

**動動腦：**

這是個好問題，我們都知道 $y = \sqrt{x}$ 這函數圖形在(0,1)區間是凹向下，和 $y = x$ 相交於(0,0)和(1,1)這兩點，在(0,1)區間 $\sqrt{x} > x$ ，在 $[1, \infty)$ 區間 $x > \sqrt{x}$ 。這是要學生去想的事情。這時不仿再多問一句，何時會相等。

 **$\sqrt{a}$ 的近似值：**

我們已經知道 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ 都不是分數，並且也知道 $1 < \sqrt{2} < 2$ ， $1 < \sqrt{3} < 2$ ， $2 < \sqrt{5} < 3$ 。那如何知道她們大約是多少，這時候就需要引進十分逼近法，其實這時候十分逼近法應該要跟十進位的小數做一個關聯，可能在國中不做這個關連。比如 $\sqrt{2} \approx 1.4142$ 意思是會落在(1.4,1.5)區間。也就是說

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

並且不包括兩端點。接下來再考慮百分位，再把1.4跟1.5分成十等分，所以每份是百分之一，其端點是1.41、1.42、1.43...1.50，而 $\sqrt{2}$ 一定落在其中唯一的一段，也不可能在分割點上， $\sqrt{2} \approx 1.41$ 意思是說 $\sqrt{2}$ 落在1.41到1.42的這一段。同理，要知道千分位就再將1.41跟1.42分成十等分，它一定會落在其中的一段。根據那一段左端點的值，也就是1.414，如此下去，就可以越來越接近 $\sqrt{2}$ 。

其中還有一個重要的觀念，我們不能真的知道 $\sqrt{2}$ 落在1.3到1.4之間還是1.4到1.5之間，其實我們只能算他的相反，也就是1.3的平方有沒有小於2或著1.4的平方有沒有小於2。這類的問題，其實也就是把十等份的點，通通平方，看哪一段的左端點小於2右端點大於2，那 $\sqrt{2}$ 就落在那一個區段。

授課日期：2007年12月13日

授課範圍：國中第三冊 2-2 平方根與近似值(從 $\sqrt{a}$ 的大小比較開始)  
2-3 根式的運算(到前言)**隨堂練習：**

要學生用同樣的方估計 $\sqrt{3}$ ，第一個隨堂練習要同學估計到十分位，第二個隨堂練習要同學估計到百分位。

**四捨五入：**

如果千分位算出來的時候，是該捨還是該入。我們已經知道1.41多，做四捨五入的時候，它是1.41還是1.42，也就是說要讓它捨還是要讓它入。也就是看千分位的值有沒有超過該區段兩端點的中點。如果沒有超過中點就捨，否則就入。

**牛頓法：(不用跟學生說)**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

這時候，老師心理要知道，課本68頁可以用牛頓法或計算機，可以把小數點以下的數算出來。

**註：**評量學生的時候可以設計其他計算以外的問題來測試學生是否了解十分逼近法的步驟。

**隨堂練習：**

和前面一樣，要知道 $\sqrt{3}$ 介於1.73到1.74之間，再經由四捨五入的判斷，來近似 $\sqrt{3}$ 。

**例8：**

除非在特別出考題給學生做要用到計算機，要不然在中小學其實沒有必要用到計算機。

**自我評量：**

第一題的第二小題的 $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ 是 $\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ 而不是 $\sqrt{1\times\frac{1}{4}}$

授課老師：單維彰

筆記製作：數3A張自鎧 942001017

授課日期：2007年12月13日

授課範圍：國中第三冊 2-2 平方根與近似值(從 $\sqrt{a}$ 的大小比較開始)  
2-3 根式的運算(到前言)

## 2-3 根式的運算

**前言：**

利用擴分來化簡，舉例來說 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 的化簡是 $\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{6}{2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。理由是因為我們不習慣看到分母有根號。