第三章 多項式的因式分解

3-1 乘法公式與提公因式法

<因式分解>

從第一章我們知道，多項式和整數有很多類似的性質，像是四則運算等等，而也有因數和因數分解的概念，然而在多項式裡頭也有類似的概念，那就是所謂的因式分解！

例如$(-15X^2+26X-7)\div(3X-1)=-5X+7$

這代表3X-1能夠整除$-15X^2+26X-7$，這時候我們就稱3X-1是$-15X^2+26X-7$的因式，而$(-15X^2+26X-7)=(3X-1)(-5X+7)$稱爲因式分解！
此時(3X-1)與(-5X+7)皆爲$(-15X^2+26X-7)$的因式，因此我們就可以知道，若一多項式能寫成許多多項式的乘積時，這個步驟就稱爲此多項式的因式分解，而這些連乘積的多項式皆爲此多項式的因式。

然而要將一個多項式做因式分解有許多方法，有提公因式法、乘法公式法、十字交乘法等等，首先我們先介紹提公因式法。

<提公因式法>

這個方法主要運用到的就是乘法的分配律：
ab+ac=a(b+c) 或 ba+ca=(b+c)a

Example1:
$12X^2-10X=2X(6X-5)$

Example2:
$-X^2+X=-X(X-1)$

以上兩個例子皆爲提公因式法的簡單例子。
接下來我們舉幾個比較困難的例子：
Example3:
$4x(x+3)-12(x+3)=(x+3)(4x-12)$

Example4:
$(x-1)^2+2(1-x)=(x-1)^2-2(x-1)=(x-1)[(x-1)-2]=(x-1)(x-3)$

Example5:
$(x-2)^2-3x+6=(x-2)^2-3(x-2)=(x-2)[(x-2)-3]=(x-2)(x-5)$

以上就是提公因式法因式分解的幾個例子。

接下來我們要介紹的是乘法公式的因式分解。

<乘法公式>

乘法公式的因式分解當然就是利用乘法公式來做因式分解的方法，
因此我們在此必須複習一下之前所學過的幾個乘法公式。

和平方公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
差平方公式：$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
這三個公式相當的重要，在往後的課程當中也會相繼用到，因此必須熟記。
接下來我們也來舉幾個例子：
Example1:
$x^2+2*4*x+4^2=(x+4)^2$

Example2:
$4x^2-12x+9=(2x)^2-2*(2x)*3+3^2=(2x-3)^2$

Example3:
$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

Example4:
$2(x-1)^2+x^2-1=2(x-1)^2+(x^2-1^2)=2(x-1)^2+(x+1)(x-1)=(x-1)[2(x-1)+(x+1)]=(x-1)(3x-1)$

Ex1,Ex2,Ex3分別是用和的平方公式、差的平方公式以及平方差公式，
然而Ex4則是比較複雜的題目，他的方法是利用平方差公式搭配上提公因式法來做因式分解，在此可以發現，多項式的因式分解必須搭配很多不同的方法才可能做的出來。

3-2 十字交乘法

十字交乘法是一個非常特殊的因式分解法，他需要從運算當中累積經驗才能使用自如，對於剛開始學習的同學來說或許覺得很複雜，不過一旦上手之後會發現他其實是最好用的因式分解法。
例如x^2+5x+4 當中的x^2項可分解成$x*x$ 常數項4可分解成 1*4 , 2*2 , (-2)*(-2) , (-1)*(-4) 然後將這些結果做一些組合就能得到我們想要的結果了。
在此我們的組合是$x*x$與1*4，因此可將$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$。