4－2 配方法與公式解　　*P*.142~*P*.160

942201029 數碩三 林天麒

例 2：
解下列一元二次方程式：
(1) $(x+1)^2=2$　　(2) $(2-x)^2=12$

解題說明
這種題目的解題技巧就是要利用平方根的概念，來解一元二次方程式。

由(1)的方程式可以知道 $x+1$ 是 2 的平方根，所以得到 $x+1=\sqrt{2}$ 或 $x+1=-\sqrt{2}$
移向後得 $x=-1+\sqrt{2}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}$，
可以合併成 $x=-1\pm\sqrt{2}$。
同理可以求得方程式(2)的解為 $2\pm2\sqrt{3}$。

配方法：

上例的 $(x+1)^2$，$(2-x)^2$ 稱為**完全平方式**，由上例可知若一元二次方程式可以整理成等號左邊為完全平方式，而等號右邊為一正數或 0，則此方程式就可求解。也就是說一元二次方程式如果不能用因式分解的方法來求解，這個時候就需要用到**配方法**，一般我們要學習配方法的時候要用到和平方公式或差平方公式。

老師建議：

先從首項係數為 1 開始，先不要管常數項是什麼，只要看平方項與一次項，利用平方項跟一次項，你就會知道需要什麼常數可以把它配成一個完全平方，最好先從 $x^2+2x=0$ 這種只有平方項跟一次項而沒有常數項的來學，之後加入常數項後，記得把平方項跟一次項放同一邊，然後常數項放在等號的另一邊，這時候在作配方就會容易許多了。

補充：配方法除了可以求一元二次方程式的解以外，還可以求極大值跟極小值。

例 3：
解下列各一元二次方程式：
(1) $x^2+8x=1$　　(2) $x^2-4x=-4$　　(3) $x^2+2x+2=0$

解題說明
(1)、(2)這兩題已經先把常數項移到等號的另一邊去，那針對平方項與一次項我們只要知道 x^2+2bx 裡面的 b 是多少，就知道兩邊要同時加上 b^2。(1)裡面的 $b=4$ 兩

邊同時加上 4^2 得到 $x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2=1+4^2$ 整理後變成 $(x+4)^2=17$ 就又回到例題二這種類型的題目了。(2)就是利用差平方公式得到 $b=2$，所以兩邊同加 2^2 整理後就得到 $(x-2)^2=0$ 所以解 $x=2$ (重根)。(3)就是只要先把 2 移到等號的右邊變成 -2 然後再作完全平方就可以求解。

註解：課本裡提到的配方法也可以稱之為作完全平方，主要是因為配方法的英文是 *completing the square method*，直接翻譯就會是作完全平方。

例 4：
解下列各一元二次方程式：
(1)$(x+1)(x+2)=5x+7$　　(2)$4x^2-12x=-9$　　(3)$-3x^2-3x+9=0$

解題說明
(1)這題有點麻煩，因為等號右邊沒辦法造出 $(x+1)$ 或 $(x+2)$，所以沒有共同因式可以提出，於是就只好先把等號左邊展開然後再把 $5x$ 移項化簡得 $x^2-2x=5$ 之後在作配方就能求解。
(2)比較麻煩的是平方項的係數是 4 要把 $4x^2$ 看成 $(2x)^2$，所以 $12x=2\cdot 2x\cdot 3$，$b=3$ 兩邊同時加上 3^2 得 $(2x)^2-2\cdot 3\cdot 2x+3^2=-9+9$ 整理完得 $(2x-3)^2=0$ 解得 $x=\frac{3}{2}$(重根)。
(3)因為有 (-3) 這個公因數所以方程式同除以 (-3) 得到 $x^2+x-3=0$ 把 (-3) 移項在作配方，因為一次項係數是 1 所以要把它看成 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot x$，所以 $b=\frac{1}{2}$ 兩邊同加 $(\frac{1}{2})^2$ 得 $x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+(\frac{1}{2})^2=3+(\frac{1}{2})^2$ 整理成 $(x+\frac{1}{2})^2=\frac{13}{4}$ 就可以求解了。

老師建議：

在這裡例 4 第一小題出的有一點難，這題放在這裡會讓學生混淆，不知道該從哪裡下手。反倒是第二第三小題就比較有暗示同學應該怎麼去計算，就第三題來說因為我們在湊完全平方時還沒有算過首項係數不是 1 的例子，所以這題就必須把首項係數變成 1 之後再去作配方，而這題就有暗示要把首項係數 (-3) 除掉，之後學生就知道怎麼計算了。

公式解：

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式是 b^2-4ac，可以用來判別根的性質，當 $b^2-4ac>0$ 時，方程式有兩個相異的根(解)，當 $b^2-4ac=0$ 時，方程式有重根，當 $b^2-4ac<0$ 時，方程式沒有根(即無解)。

根據上面的討論，我們知道若 $a\neq 0$，且 $b^2-4ac\geqq 0$，則.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

這個公式稱為一元二次方程式的**公式解**。

例 7：
試用判別式判斷下列各方程式解的性質：
(1) $2x^2+8x-4=0$　　(2) $-x^2-2x-1=0$　　(3) $3x^2-x+4=0$

解題說明
這題題目雖然是問解的性質，但事實上就是要我們用判別式 b^2-4ac 來判斷一元二次方程式有沒有相異的根，所以題目最好改成『判別下列方程式有沒有相異的根』會讓學生比較知道這題該怎麼做。

例 9：
求下列各方程式的解：
$(x-2)^2+3(x-2)+1=0$

解題說明
這題要把 $(x-2)$ 看成一個單項，可以令 $A=x-2$，方程式就變成 $A^2+3A+1=0$ 用公式解求出 A 後，利用 $A=x-2$ 移項得到解 $x=A+2$。
在例 9 裡的多項式的寫法我們叫做牛頓形式(*Newton form*)。

補充：多項式除了上述的牛頓形式還有我們一般說的標準形式(stan*dard form*)、*Horner form*、*Lagrange form*。

標準形式：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0x^0$ 用降冪排列

Horner form：$p(x)=(\cdots((a_0x+a_1)x+a_2)x+\cdots a_{n-1})x+a_n$

Lagrange form：$l(x)=a_1\dfrac{(x-x2)(x-x3)}{(x1-x2)(x1-x3)}+a_2\dfrac{(x-x1)(x-x3)}{(x2-x1)(x2-x3)}+$

$a_3\dfrac{(x-x1)(x-x2)}{(x3-x1)(x3-x2)}$

例 10：
若方程式 $x^2+bx+64=0$ 有重根，求 b 的值。
例 11：
若方程式 $x^2+7x+c=0$ 有兩個相異的根，求 c 的範圍。

解題說明
這兩題都是利用方程式的根的性質與判別式的關係，有重根就表示判別式 b^2-4ac

$=0$，因此 $b^2-4\cdot 1\cdot 64=0$ 化簡得 $b=\pm 16$。有相異兩根所以判別式大於 0，即 $7^2-4\cdot 1\cdot c>0$ 整理完後得 $\frac{49}{4}>c$。

注意：如果題目是說方程式有解的話，因為包括有重根與有兩個相異的根，所以判別式應該是大於且等於 0。

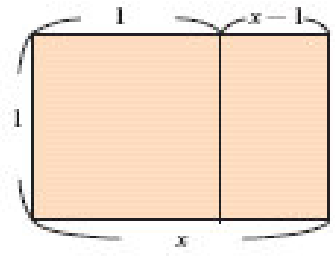
4－3 一元二次方程式的應用

例 1：
若一長方形長和寬的比為 4：3，且其面積為 7500 平方公尺，，求此長方形的長和寬。

解題說明
因為長：寬＝4：3，所以可設長為 $4k$ 公尺、寬為 $3k$ 公尺，其中 $k>0$
由面積為 7500 得 $4k\cdot 3k=7500$ 化簡得 $12k^2=7500\Rightarrow k^2=625$ 即 $k=\pm 25$(負不合)
∴長＝$4\cdot 25=100$ 公尺
　寬＝$3\cdot 25=75$ 公尺

例 4：
長方形的長邊為 x，短邊為 1。若把此長方形切掉一個邊長為 1 的正方形後，使得剩下的長方形長短邊比和原來長方形的長短邊比相等，求 x 的值。

解題說明



根據圖形與題意得到的比例式：
$x：1=1：x-1$
因此　$1=x(x-1)$
移項化簡得　$x^2-x-1=0$
由公式解得　$x=(1\pm\sqrt{5})/2$
但是因為邊長必須為正，所以$(1-\sqrt{5})/2$ 不合，因此 $x=(1+\sqrt{5})/2$

動動腦
爲什麼在例 4 裡，可以假設切割後剩下的長方形長短邊的比是 $1：x-1$？
如果 $x-1$ 為長邊

根據題意得到的比例式為 $(x-1):1=x:1 \Rightarrow x-1=x \Rightarrow -1=0$ 這是不可能的所以不可能有一個短邊為 1 長邊超過 2 的長方形，使得切掉一個邊長為 1 的正方形之後剩下的長方形跟原來的長方形成比例。

而例 4 解出來的矩形形狀，稱為黃金矩形，它長邊對短邊的比值為$(1+\sqrt{5})/2$，這個數經常被稱為**黃金分割**或**黃金比例**。