

科技都進步成這樣了， 是否該讓計算機融入數學課程？

單維彰·民國 108 年 4 月 27 日

刊登於《科學月刊》595 (2019 年 7 月) 58-61

當計算機進入國高中數學課程

首先要跟讀者說明，108 數學領綱最重要的興革項目之一，就是在國中階段和高中階段引進計算機，而小學階段還是尊重筆算與心算的基礎教育習慣，不建議使用計算機。

領綱開宗明義提出數學教育的五大理念中，其中一條為「數學教育應培養學生正確使用工具的素養」，除了計算機以外，傳統的直尺、圓規、量角器、三角板和方格紙等工具，新科技的電腦軟體與智慧型手機應用程式 (App)，都包括在內。

教師「應」或「宜」在數學課程中教導學生使用計算機 (電算器) 的宣告，早在 1985 年就開始寫在國中數學課程標準裡，而且當時的小學階段數學課程還有珠算的學習內容。按照數學教育前輩的規劃，算盤應該逐漸淡出數學課程，同時逐漸代之以計算機。事實顯示，算盤確實淡出了數學課程，然而，淡入計算機的規劃卻從未發生。

不同於以前各版課程標準或綱要，108 領綱不僅將計算機的使用寫在理念、教學建議或實施要點裡，還確實將計算機寫進「學習表現」和「學習內容」兩大表格內，明文規定計算機是數學課程的教學目標，因此，教科書和評量試題都應有相對應的內容。

將計算機列為數學課程的教學目標，當然至少要讓學生能「用」計算機，也就是具備操作能力。但是數學教育不僅止於按鍵操作的低層次目標，還要讓學生有機會藉由工具的協助而理解數學。此外，計算機也同時讓學生有機會藉由解決「擬真」問題時體認數學的用途，進而培育對於數學的正向態度。

最後，計算機也使得學生有機會「探究」數學。由於數學大多是抽象的概念，不像自然領域通常有實際的觀察對象，如果不使用計算機，數學幾乎沒有任何可觀察、可操作的對象。在數學教學中引進計算機，使得數學課在某種程度上也有機會從事觀察、實驗與探究。

因為計算機的操作，數學課程多了些溝通的約定，特別是在考卷寫下「標準答案」的需求。所以數學課綱新增了關於概數的約定語言，例如「以三位有效數字作答」約定了如何將計算機顯示的結果轉換成特定數值的程序。運用這些關於取概數的約定，可以簡短而準確地溝通概數的規格，將有助於教材和試題的編寫。

是理想，不是理想主義

數學領綱的編製委員，當然對於未來的數學教育懷抱著理想；假如課綱沒有呈現任何理想，那是設計者對不起社會的託付。

可是，有理想並不就是「理想主義」；相反地，數學領綱的委員們非常務實，簡直是現實主義的擁護者。正因為採取現實主義，故數學領綱指定的計算機規格不含繪圖功能，也不能儲存程式。課綱

委員手上使用的計算機，定價只有新臺幣 200 元；而課程手冊中建議的 3 款計算機，都是目前國家考試准用的科學型計算機，網路上的標價介於 150~360 元之間，團購可以更便宜。

課綱如此謙卑而保守的設計，就是為了務實；將工具設定在人人負擔得起的範圍裡，才不會造成「弱勢族群」的負擔，或者至少可經由社會福利的管道提供協助，因此 200 元單價的學習工具應不致於引起社會的撻伐。更重要的是，課綱委員認為必須允許學生帶著計算機進入考場，否則這項興革必將功虧一簣。在臺灣目前的學校氛圍裡，「因為計算機對學習有益，所以就算考試不准用，老師和學生也都會經常使用它」的主張才真的是理想主義。「考試必須容許學生使用計算機」的主張，並不是甚麼偉大的道理，只是秉持教學與課程的一項基本原理：評量是課程的一部分，評量內容應吻合教學目標。

若考慮考試的實務限制，電腦軟體、手機 App 顯然都有更高的「危險性」，社會對於公平的疑慮更高，其障礙就更難以逾越，這就是課綱做出如此保守設計的最主要原因。無論是教室裡、課外活動或課後作業裡，師生都可以隨意使用電腦軟體和手機 App，但是考試的時候，課綱僅要求使用計算機而已。

但也由於計算機的功能限制，使得它無法作為方程式函數繪圖、向量類型運算（包括統計與數據分析）及程式設計等數學學習的工具。課綱或《說明手冊》對於以上課題的學習工具，都另有建議，但是基於前述考量，未列為必需的內容。長久以來「不准使用科技工具」這項教育現實，就像一片透明天花板，重重壓在臺灣每位教師和學生的頭上，眼看著科技文明不斷更新，國際同儕的教育內容不斷進步，我們卻全被這片透明天花板壓制在下，無法成長。

然而筆者相信，只要讓計算機從今（2019）年起真正落實在數學課程裡，這個微小而謙卑的工具，將會成為刺破天花板的小尖兵，不僅讓數學教育開始質變，也期望自然領域和生活與科技領域能一起呼吸新鮮空氣，乃至於社會領域和藝術領域，當然也不會放棄改變的機會，社會對於數位工具的接受度就有可能逐漸改變。

計算機只是刺破透明天花板的開始。所謂行遠必自邇，如果今年走得這一步，便有理由樂觀地期待下一個 10 年的課綱，社會家長及教師同仁將能接受像 App 這樣的工具成為全國學生必備的學習工具，也在考試中允許使用那些工具。如果 108 數學領綱的這一項興革失敗了，則可能仍與民國 74 年寫在課程標準裡的話一樣，只能空談理想，跨不出實踐的第一步。

教學意念：數感與圖感

非常粗略地說，高中數學的主要學習目標是以下兩大項：實數的數感，函數的圖感。計算機的引入，首先將引起這兩項內容在教學方法上的質變，一旦計算機攜入考場，評量的題目也必須立刻質變。

先說實數的數感。實數固然包括整數和分數，但是高中階段的實數，強調的是無理數。我們的學生在小學階段，也許延續至國中階段，被鍛鍊出優異的自然數數感，造就我國國民傲視全球的心算能力。但是，那樣的數感並不能延續到實數。原因很簡單：實數無法心算。以對數為例，我們的學生被訓練得都能記憶 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，能做諸如 $\log 50 = 2 - \log 2 = 2 - 0.3010 = 1.699$ 、

$\log 45 = \log(3^2 \times 5) = 2\log 3 + \log 5 = 2 \times 0.4771 + (1 - 0.3010) = 1.6532$ 之類的計算，能回答諸如「 2^{32} 有幾位數」¹ 之類的「應用題」。以上的計算過程，本質上鍛鍊的仍然是正整數的數感：質因數分解，絕非實數的數感。

很多人擔心，讓學生使用計算機之後，會折損了他們的「計算能力」。請各位讀者捫心自問：如果不使用計算機，多少人會算諸如 $1.07^{0.17}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 $\log 17$ 、 $e^{0.17}$ 、 $\sin 17^\circ$ 、 $\cos^{-1}(-0.17)$ 之類的實數？² 既然多數人本來就不會算這些數，那麼，用工具來算它們，究竟折損了甚麼計算能力？以前因為不使用工具，那些數從來不出現在數學課程裡，學生哪裡有機會獲得數感？同理，考試的問題永遠限定在可以用自然數化簡或者可以記憶的範圍裡，例如只要涉及三角就必須是 30° 、 45° 、 60° 之類的特殊角，哪裡有那麼多恰好如此的真實情境呢？所以「擬真」的問題當然也就沒機會出現在數學評量裡。

以上那一切限制，都可以用區區 200 元的計算機來突破。不必多麼高科技的工具，只要一支謙卑的掌上計算機，關於實數的教學將可以徹底改變，發生的是教學內容與評量目標的質變，而不是量變。不論是 STEAM 的情境問題，還是援引物理化學生物地科地理公民的跨領域教材，全都有機會進入數學課程了。

再說函數和方程式的圖感（以下僅以函數代表）。這項主題，幾乎可謂高中數學成敗的關鍵。在這個主題上，計算機能夠直接提供的幫助，雖然很有限，但是非常關鍵：運用計算機，學生才有機會真正在方格紙上畫「很多」由自變數與應變數決定的點，而獲得函數圖形乃由無窮多點聚集而成的觀念。如今的教學，因為沒有適當的工具讓學生親自動手做，所以都由教師示範或告知結果。導致非常多學生，當被問及「直線上有幾個點」時，都很有信心地回答「兩個」；被問及「拋物線上有幾個點」時，則比較不確定，有人說「三個」，有人說「五個」。

真正有效幫助建立圖感的工具，可能是新加坡等國採用的繪圖計算機。新近出現的一款 App：Desmos，很明顯地優於繪圖計算機。因為它目前僅能安裝於電腦（瀏覽器）或行動裝置上，所以它或可成為課堂上的教學利器，但是進入考場則還是會讓人擔心。因為 Desmos 可以在安裝之後離線使用，所以只要可以斷網，它也不難成為考試的工具。繪圖計算機和 Desmos 之類的工具，相對於 Geogebra 之類的軟體，在教學上最主要的差異在於：前者比較容易人手一機，在課堂上讓學生跟著做，或自行探究，而放學後也能在家操作。

突破想像障礙，提升教學效率

計算機在數學教育上還有一份更重要的價值：它能提高教學的效率。前面說過實數不能筆算，所以諸如 $1.07^{0.17}$ 、 $\sqrt[3]{17}$ 、 $\log 17$ 這些數，如果不使用計算機，根本不能觀察，必須完全根據概念來想像。這一層障礙，使得部分學生失去學習的機會：如果一開始無法想像，就很難跟上學習的進度，坐在教室

¹ 學生記憶的解法是：先做 $\log 2^{32} = 32 \times 0.3010 = 9.632$ ，取其整數，再加 1；有些學生誤以為那是 9.632 四捨五入為整數的結果。

² 當然，天下有人會算，否則計算機的程式是誰寫的？像作者本人這樣的數學專業者，都可以用紙筆算出指定精確度的概數。但我們都知道，那屬於專業能力，不是高中的教育目標，更不是國民應具備的數學素養。

裡也不具有任何意義。大家都知道，數學教室裡經常有神遊太虛、甚至直接趴下去睡覺的學生。使用計算機之後，使得部分數學概念變成可以觀察的數字，降低了學習的門檻，而且就算還沒有獲得概念，也至少能夠操作與實驗，不會無事可做。

位於建國中學的數學學科中心，在 107 年邀請一些前導學校的數學同仁，針對 108 數學領綱 10 年級第一次段考前的學習內容，進行教案設計與教學實驗。所有參與實驗的教師，全都認為計算機融入數學教學之後，最明顯的改變就是教室內的氛圍：起碼不再有學生自外於學習，人人得以參與學習。對數學老師而言，這是最珍貴的回饋。

實驗教學的內容不一而足，不論主題為何，老師們發現的共同點包括：學生操作工具的能力，超乎預期。雖然老師本來就預期學生操作計算機的困難不大，但是實驗結果顯示，學生習得操作方法，以及運用計算機歸納出數學性質的猜想，所需的時間還是短得讓老師驚訝。

總結教學實驗的心得，計算機融入數學課程，能夠增加學生在課堂內的參與率、提高獲得實數（無理數）數感的學習機會，並讓真實情境（個人的、社會的、職業的、科學的）進入數學課程的大門。

評量，就是課程的一部分！

在教育的學理上，課程本來就包含教材、教法、評量。在臺灣的教育現實上，學習很難不去關心考試成績。高中數學學科中心正奮力推動 108 數學領綱，在計算機融入數學課程方面，具體目標是希望全國的高中都能從 108 學年的第一次段考開始，容許學生攜帶計算機進入數學考場。學科中心已經針對第一次段考的範圍，邀請種子教師為新課綱的學習內容和學習表現而嘗試素養導向命題。在命題單上，學科中心明列以下類型的數學素養：

- ◆ 數學學科知識的素養
- ◆ 應用到情境的素養
- ◆ 正確使用計算機工具的素養

目前已經建立了大約 30 題的題庫，可作為全國所有高中第一次數學段考的參考試題。這些試題經過兩名教授的兩段審查與修訂，數學品質和文字品質都應該可靠。命題老師來自全國各地，題目的難度分布很廣，所以題庫的適用範圍也應該可以很廣。

寫到這裡，我們還是必須說：大考中心是最後一哩。在截稿的此時，大考是否准用計算機，還沒有定論：既沒有同意，也還沒拒絕。期望數學或自然科學領域的工作同仁，能一起支持校內數學段考准用計算機，如果有機會的話，也希望各位能贊成大考中心舉辦的數學考科准用計算機。

這一支單價 200 元的小工具，有機會讓全臺灣的數學教育發生質變，甚至擴展到數學領域之外。