

第9510期[素養導向]國教輔導團數學領域輔導員進階培育班

# 從原有數學課程 到素養課程的轉銜

單維彰  
國立中央大學師資培育中心與數學系  
文學院學士班主任  
民國109年7月27日

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

1

## 一脈相承

素養導向的數學課程，與向來認為「理想的」數學課程，並無太大差異。

- ◆ 數學教育已有 50 年談素養的歷史
- ◆ 是轉銜而非革新

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

2


## 目次

- ◆ 導入－Goodlad、Tyler、林福來
- ◆ 他山之石－設計思考
- ◆ 轉銜舉隅
  - ◆ 正負混合四則運算
  - ◆ 指數與指數律
  - ◆ 失焦的代數化
  - ◆ 內角和、三視圖與空間概念、三角比

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

3

## Goodlad 古德拉



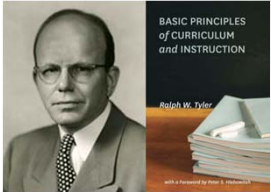
課程的五個層次。

- ◆ 實施的課程 operational curriculum
- ◆ 包含教材、教法、教案、評量
- ◆ 本研習自限於國中階段（涉及國小）

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

4

## Tyler 泰勒



泰勒課程原理

Tyler Rationale

- ◆ 第二步：選擇可達目標的學習經驗

How can Learning Experiences be Selected which are Likely to be Useful in Attaining These Objectives?

單維彰 - 素養課程轉銜 2020/07/27

5

## 學習經驗

所謂「學習經驗」並非授課內容，也不是教學活動。

它是指學習者對於外在環境所提供的可變狀態做出反應時，兩者之間的互動。


學習是經由學生的行動而發生的；學生從他[她]自己的行動中學習，而不是從教師的行動中學習。

[Tyler, 1949: p.63]  
(學習者中心)

單維彰 - 素養課程轉銜 2020/07/27

6

## 林福來



108數學領綱

五項理念—四

- ◆ 數學[課程]應提供每位學生有感的學習機會

有感就是「感覺有意義」的意思。

「有感的學習機會」就是讓學生產生意義感的學習經驗。

單維彰 - 素養課程轉銜 2020/07/27

7

## 感到「有意義」的詮釋

- ◆ Sensible  
認知到學習的內容確實有必要學習，或者待解決的問題確實有需要解決。
- ◆ Meaningful  
體認到為了學習所花費的辛勞，都是值得的。
- ◆ Make Sense of  
察覺到數學觀念之間彼此呼應，數學觀念與現實之間彼此呼應，某個數學內容理所當然地應該出現在某個位置，而且學過的數學可以建構一個完整的、有助於思考的、可以提升理解能力的系統。

《中學數學教材教法》，教育部／五南，2020

單維彰 - 素養課程轉銜 2020/07/27

8

## 《中學數學教材教法》

- ◆ 領綱五項理念逐一舉例說明  
第二章·第四節
- ◆ 數學教育的基本信念  
第二章·第二節
- ◆ 用「知行識」架構來設計教案  
第三章·第三節
- ◆ 為數學教師寫的「素養」概念  
第三章·第一節



單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

9

## 設計思考 Design Thinking

- ◆ 近十年的潮詞 Buzzword
- ◆ 使用者中心 user-centered 或者  
以人為本 human-centered
- ◆ 同理心 Empathy (共感)

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

10

## 設計思考相對於...

- ◆ 製造思維  
以物件(產品或服務)為中心的思考模式。
- ◆ 市場本位  
以「我具備什麼優勢」、「我有哪些獨特資源」作為設計的出發點。
- ◆ 技術本位  
以「我有什麼技術」、「我想要創造什麼」作為設計的出發點。

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

11

## 素養課程相當於...

- ◆ 教師 ~ 設計者
- ◆ 使用者 ~ 學生  
「學生中心」：以學生的需求或痛處作為設計的出發點。
- ◆ 技術本位 ~ 教師中心  
以教師專長或好惡作為課程設計的出發點。
- ◆ 製造思維 ~ 學科本位  
以完備學科內容為目標的課程設計。

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

12

### 同理 Empathy ≠ 同情 Sympathy

- ◆ 同情心  
你數學考這麼爛，好可憐，我幫你加分好了。
- ◆ 同理心  
這樣教就好像是講給已經會的人聽的，根本沒效果啊。  
這考題太難了，換是當年的我也寫不出來，難怪你考不好。  
你要讀的科目太多了，難怪你讀不完。（共感：感到他的痛。）  
經常在為人父母之後才開始有這種感覺。建議老師參加一次學生的段考就會很有感受。

單維彰 · 素養課程轉銜 2020/07/27

### 教師 ← 設計者

- ◆ 學生中心 ← 使用者中心  
未必是要求學生自學、或者希望學生經由合作而發現知識。  
以學生的需求與學生的感受，為課程設計的目標。
- ◆ 懸之一念 Awareness  
「心中有學生」的同理意識。  
  
有「意識」地「同理」學生的感受  
設計符合學習目標且「有感的學習經驗」

單維彰 · 素養課程轉銜 2020/07/27

### Examples: 正負混合四則運算

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4)$$

$$\left(-\frac{11}{15} + \frac{4}{15} \div \frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \left[(-66) - \left(-\frac{2}{7}\right)\right] \times \frac{3}{11}$$

- ◆ 學生感受什麼意義？
- ◆ 學生獲得什麼經驗？
- ◆ 學生未來有此需求的可能性？  
日常生活、社會生活、職業生活...

單維彰 · 素養課程轉銜 2020/07/27

### 丫丹的「同理」

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4) \quad \left(-\frac{11}{15} + \frac{4}{15} \div \frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \left[(-66) - \left(-\frac{2}{7}\right)\right] \times \frac{3}{11}$$

- ◆ 學生感受什麼意義？  
◆ 沒有特別的感覺 → 自己想不到意義
- ◆ 學生獲得什麼經驗？  
◆ 數學課本來就是這樣 → 非正向經驗
- ◆ 學生未來有此需求的可能性？  
◆ 可能性幾希（太久的未來其實毋須討論）

單維彰 · 素養課程轉銜 2020/07/27

## 最切身的一學校生活

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4) \left( -\frac{11}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{3} \right) \times \left( -\frac{3}{4} \right) \left[ (-66) - \left( -\frac{2}{7} \right) \right] \times \frac{3}{11}$$

### ◆ 學習的需求

- ◆ 領域考量：數學領域內、外的需求
  - ◆ 數學內—熟悉課綱與教材
  - ◆ 數學外—多翻閱其他領域的教科書
- ◆ 時序考量：不必過度提前部署
  - ◆ 陽—大概念需要銜接（例：比、函數vs方程式）
  - ◆ 陰—技術細節可待來日（例：指數律、科學記號）

17

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 最切身的一學校生活

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4) \left( -\frac{11}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{3} \right) \times \left( -\frac{3}{4} \right) \left[ (-66) - \left( -\frac{2}{7} \right) \right] \times \frac{3}{11}$$

### ◆ 考試的需求

- ◆ 校內評量：教師可控制
  - ◆ 形成性評量—可聚焦於單步驟精熟練習  
會用  $\left[ (-66) - \left( -\frac{2}{7} \right) \right] \times \frac{3}{11}$  來解  $\frac{11}{3}x - \frac{2}{7} = -66$  嗎？  
單步驟計算需精熟，整併化簡不急。
  - ◆ 定期考、期末考—可割愛  
基本練習時，設計簡單的數據。  
在真實問題中遭遇複雜數字時，使用工具。

18

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 最切身的一學校生活

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4) \left( -\frac{11}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{3} \right) \times \left( -\frac{3}{4} \right) \left[ (-66) - \left( -\frac{2}{7} \right) \right] \times \frac{3}{11}$$

### ◆ 考試的需求

- ◆ 國中畢業會考：「心測中心」知道了
  - ◆ 基本計算題，善意送分（104、105）  
$$\left( -1\frac{1}{2} \right) \times \left( -3\frac{1}{4} \right) \times \frac{2}{3} \quad \left( -5 - (-11) \right) \div \left( \frac{3}{2} \times 4 \right)$$
  - ◆ 避免引起誤會，善意到底（108、109）  
$$\left( -\frac{5}{3} \right) - \left( -\frac{1}{6} \right) \quad 2^3 \times 5^3$$

19

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 「素養」並不排斥「精熟」

### ◆ 創造力心理學

精熟造就思考的流暢性，而流暢性孵育創造力。

### ◆ 學習心理學

精熟是為了減少工作記憶的負擔，  
使學生能夠學習更進一步的知識或技能。

《中學數學教材教法》第二章第二節

20

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 「精熟」學習目標

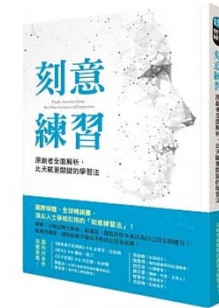
- ◆ 有個別差異 (有快慢, 有取捨)  
教師秉持專業, 以學生的需求為中心來判斷。  
「不太複雜」的計算: 當一般學生心算或筆算所需的時間, 小於拿出計算工具輸入指令獲得結果的時間。
- ◆ 有整體層次  
正整數的(正)因數分解:  
20 以下、20—50、50—100、100 以上

21

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 刻意練習 Deliberate Practice

- ◆ 為了精熟, 需刻意練習, 如  $(-\frac{5}{3}) - (-\frac{1}{6})$
- ◆ 刻意練習是追求卓越的方法
- ◆ 華人社會人盡皆知, 洋人將它寫成暢銷書  
(要抓緊目標, 檢視效率)



22

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 學生「感覺有意義」

- ◆ 刻意練習就會忽略情境  
有如民俗技藝之紮馬步、調嗓子、下腰抬腿
- ◆ 學生難以自明其意義, 難以有感
- ◆ 需由教師闡明其意義, 或寓教于樂
- ◆ 這就是「識」面向的教學目標
- ◆ 「識」→「有感」

《中學數學教材教法》第三章第三節

23

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## Examples: 指數與指數律

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5 \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{9}{4}\right)^3$$

- ◆ 國中階段的指數需求
  - ◆ 正整數的標準分解式  
約分與擴分 → 分數計算  $\frac{18}{30} = \frac{2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{3}{5}$
  - ◆ 平方根化簡  $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$
  - ◆ 多項式相乘  $x \cdot x = x^2$
  - ◆ 多項式求值, 例如在  $2x^2 - 3x + 1$  代入  $x$

24

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## Disclaimer: 科學記號數字

$$4 \times 10^{11} + 7 \times 10^6 \quad 6 \times 10^{24} \div (2 \times 10^{-26})$$

- ◆ 課綱從未在國中設定此目標 (108:10)
- ◆ 需求在數學領域外，需附單位與概數
- ◆ 7年級數學課的責任：
  - ◆ 科學記號數字的定義
    - ◆ 知：十進制小數的另一種寫法
    - ◆ 行：普通數字  $\leftrightarrow$  科學記號數字
    - ◆ 識：自然科學、社會科學需要它

25

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 聖戰：教師 vs 「遺忘」

- ◆ 心理學者早就知道「遺忘」是正常的  
 一般人在學完一門課一年之後會忘記 50%，  
 兩年之後會忘記 75%。  
 (Tyler, 1949: 73)
- ◆ 過度、超前的刻意練習無助於「抗忘」
- ◆ 關鍵是習得之後有沒有持續用它  
 數學系大四生較其他理工科更記得定積分的定義。  
 因為我們比較聰明？我們在大一比較用功？

26

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## An Apology: 螺旋式課程

- ◆ 學過別再提，就不會發現它被遺忘
- ◆ 複習考的時候一併處理
- ◆ 讓核心的觀念、技術持續用得著
  - ◆ 單步驟正負混合有理數運算  
 (適度習慣使用策略：結合、交換、分配)
  - ◆ 指數：約分、擴分、化簡平方根、多項式
  - ◆ 絕對值：化簡、三角形邊長關係

$$\sqrt{x^2}$$

27

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## 螺旋上升，莫原地打轉

- ◆ 再次複習總不會像第一次
- ◆ 教師「有意識」地抓住複習機會
- ◆ 讓學生感覺到進步，例如：
  - ◆ 二元一次方程式  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 比例式  $\rightarrow$  正比關係  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 等差數列 + 正比關係  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 摺紙 (國小)  $\rightarrow$  尺規作圖  $\rightarrow$  推理幾何
  - ◆ 等加速運動的時間-速度 (理化)  $\rightarrow$  二次函數

28

單維彰, 素養課程轉銜 2020/07/27

## Examples: 失焦的代數化

- ◆ 等差數列  $5+12+19+\dots+a_n=365$  求  $n$ ? (國中 vs 高中)
- ◆ 磚塊堆疊的牆，數出來共 276 塊，問有幾層?
- ◆ 三角形內角為  $x^2$  度、 $x+50$  度、100 度，求  $x$ ?
- ◆  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三角形三邊長，化簡  $c-b-a+\sqrt{(b-c-a)^2}$

- ◆ 「數形合一」嗎?
- ◆ 有需求嗎?
- ◆ 學生獲得什麼經驗?

解題活動中，哪種經驗獲得增強?

29

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

## 內部連結是數學的最高表現

- ◆ 但要做到 (例如) 「數形合一」
- ◆ 要符合學習目標
- ◆ 要增強正向的學習經驗，再看螺旋：
  - ◆ 二元一次方程式  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 比例式  $\rightarrow$  正比關係  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 等差數列 + 正比關係  $\rightarrow$  一次函數
  - ◆ 摺紙 (國小)  $\rightarrow$  尺規作圖  $\rightarrow$  推理幾何
  - ◆ 等加速運動的時間-速度 (理化)  $\rightarrow$  二次函數

30

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

課綱是骨架，教材是內容

能為課程注入**靈魂**的

只有教師

能將課程導向**素養**的

只有教師

31

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

## 轉銜素養，懸之一念

- ◆ 學科本位  $\rightarrow$  學生中心。
- ◆ 有什麼需求? 獲得什麼經驗?

教師「有意識」地  
「同理」學生的感受，  
進而設計符合學習目標且  
「有感的學習經驗」。

32

單維彰·素養課程轉銜 2020/07/27

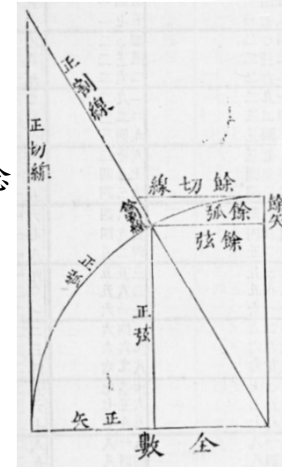


請提出討論...

33

備胎

- ◆ 三角形的內角和
- ◆ 三視圖與空間概念
- ◆ 三角比



34