

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1]

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin \theta > \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \cos \theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \sin \theta$$

である。よって、三角関数の合成を用いると、 $\textcircled{1}$ は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって、求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とし, k を実数とする。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は x の 2 次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき, 解と係数の関係により $\sin \theta + \cos \theta$ と $\sin \theta \cos \theta$ の値を考えれば, $k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに, θ が $\sin \theta \geq \cos \theta$ を満たすとする, $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$,

$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき, θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。 $\boxed{\text{ソ}}$ に

当てはまるものを, 次の①~⑤のうちから一つ選べ。

- ① $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{12} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$
 ④ $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{12}\pi$ ⑥ $\frac{5}{12}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2]

- (1) t は正の実数であり、 $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}, \quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 & \dots\dots\dots ② \\ \log_{81}\frac{y}{x^3} \leq 1 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ とおくと, ②は

$$\boxed{\text{ヌ}} X + Y \leq \boxed{\text{ネノ}} \dots\dots\dots ④$$

と変形でき, ③は

$$\boxed{\text{ハ}} X - Y \geq \boxed{\text{ヒフ}} \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき, Y のとり得る最大の整数の値は

$\boxed{\text{ハ}}$ である。また, x, y が ②, ③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ハ}}$ を同時に満た

すとき, x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

$a > 0$ とし、 $f(x) = x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1$ とおく。座標平面上で、放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ を C 、放物線 $y = f(x)$ を D とする。また、 l を C と D の両方に接する直線とする。

(1) l の方程式を求めよう。

l と C は点 $(t, t^2 + 2t + 1)$ において接するとすると、 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}} t + \boxed{\text{イ}} \right) x - t^2 + \boxed{\text{ウ}} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

である。また、 l と D は点 $(s, f(s))$ において接するとすると、 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{エ}} s - \boxed{\text{オ}} a + \boxed{\text{カ}} \right) x - s^2 + \boxed{\text{キ}} a^2 + \boxed{\text{ク}} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

である。ここで、①と②は同じ直線を表しているので、 $t = \boxed{\text{ケ}}$ 、 $s = \boxed{\text{コ}} a$ が成り立つ。

したがって、 l の方程式は $y = \boxed{\text{サ}} x + \boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 二つの放物線 C , D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 l , および直線 $x = \boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$S = \frac{a \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ である。}$$

(3) $a \geq \frac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C , D と直線 l で囲まれた図形の中で

$0 \leq x \leq 1$ を満たす部分の面積 T は, $a > \boxed{\text{タ}}$ のとき, a の値によらず

$$T = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり, $\frac{1}{2} \leq a \leq \boxed{\text{タ}}$ のとき

$$T = -\boxed{\text{テ}} a^3 + \boxed{\text{ト}} a^2 - \boxed{\text{ナ}} a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(4) 次に, (2), (3) で定めた S , T に対して, $U = 2T - 3S$ とおく。 a が

$\frac{1}{2} \leq a \leq \boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき, U は $a = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$

をとる。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

O を原点とする座標平面上に点 A(0, 6)がある。点 A を通る傾き m の直線を l とし、中心が点(0, 2)で x 軸に接する円を C とする。

- (1) 直線 l の方程式は $y = mx + \boxed{\text{ア}}$ である。また、円 C の方程式は $x^2 + (y - \boxed{\text{イ}})^2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。
- (2) $m = \pm\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ のとき、直線 l と円 C は接する。 $m = -\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ のときの接点の座標は $(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}, \boxed{\text{カ}})$ である。
- (3) 直線 l と円 C が異なる 2 点で交わるような m のうち、最小の正の整数は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (4) 直線 l が点 $B(3, 0)$ を通るとき、 $m =$ である。さらに、直線 l と円 C の二つの交点を点 A に近い方から順に点 D 、点 E とすれば、座標はそれぞれ

$$D\left(\frac{\text{コ}}{\text{サ}}, \frac{\text{シス}}{\text{セ}}\right), \quad E(\text{ソ}, \text{タ})$$

である。

このとき、次のように $\triangle ODE$ の面積 S を求めよう。まず、 $\triangle OAB$ の面積は である。また、点 A 、 D 、 E 、 B の各 x 座標の値により、三つの線分 AD 、 DE 、 EB の長さの比は

$$AD : DE : EB = \text{ツ} : \text{テ} : 5$$

であることがわかる。このことから、 $S = \frac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$ である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

4次の整式 $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 21x + 18$ について考える。

(1) 方程式 $P(x) = 0$ の解を求めよう。

$P(0) \neq 0$ であるから、 $x = 0$ は $P(x) = 0$ の解ではない。そこで、 $P(x) = 0$ の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2 - 7x + 8 - \frac{21}{x} + \frac{18}{x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を得る。 $t = x + \frac{3}{x}$ とおき、 $\textcircled{1}$ の左辺を t を用いて表すことにより

$$\boxed{\text{ア}} t^2 - \boxed{\text{イ}} t - \boxed{\text{ウ}} = 0$$

を得る。これを解くと、 $t = \boxed{\text{エ}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。

$t = \boxed{\text{エ}}$ のとき、 $x = \boxed{\text{ク}}$ 、 $\boxed{\text{ケ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ とする。

また、 $t = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき、 $x = \frac{\boxed{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シス}} i}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) $\alpha = 1 - \sqrt{3}i$ に対して, $P(\alpha)$ の値を求めよう。

$(\alpha - 1)^2 = \boxed{\text{ソタ}}$ である。これを整理すると

$$\alpha^2 - \boxed{\text{チ}}\alpha + \boxed{\text{ツ}} = 0$$

である。

$P(x)$ を $x^2 - \boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}}$ で割ると, 商は

$$\boxed{\text{テ}}x^2 - \boxed{\text{ト}}x - \boxed{\text{ナ}}$$

で, 余りは

$$\boxed{\text{ニヌネ}}(x - \boxed{\text{ノ}})$$

である。

したがって, $P(\alpha) = \boxed{\text{ハヒ}}(\boxed{\text{フ}} + \sqrt{3}i)$ である。