

國立臺中教育大學數學教育學系

小學數學課程的 一些提議

單維彰

國立中央大學數學系
師資培育中心、文學院學士班
民國111年10月19日

河海不辭涓流

林原宏 2022-09-02

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

[2]

Ubiratan D'Ambrosio (1985)

Ethnomathematics

and its place in the History
and **Pedagogy** of Maths.

For the Learning of Maths
5(1), 44-48.

民族數學（前提）

- ◆ 數學成就是個人的
 - 沒有民族差異，終能習得
- ◆ 數學教育是社會的
 - 受文化影響，有民族差異
 - 越接近母語影響越大
 - 學習進路的暢窒緩急

華人善算

但似有保鮮期

單維彰·數學課程與學習 2022/11/19

[5]

華語特別適算

- ◆ 語言對應數值
 - 語音如數碼
 - 語言本身就是十進位
- ◆ 也很適合記憶
 - 九九表
 - 圓周率 vs The ratio of ...
 - N 邊形 vs quad-/penta-/hexa-...

單維彰·數學課程與學習 2022/11/19

[6]

中文	日文	韓文 (古代*)	韓文 (漢化*)	英文	法文	西文	德文
零	れい/ゼロ	×	영/공	zero	zéro	cero	null
一	いち	하나	일	one	un*	uno*	eins*
二	に	둘	이	two	deux	dos	zwei
三	さん	셋	삼	three	trois	tres	drei
四	よん/し	넷	사	four	quatre	cuatro	vier
五	ご	다섯	오	five	cinq	cinco	funf
六	ろく	여섯	육	six	six	seis	sechs
七	なな/しち	일곱	칠	seven	sept	siete	sieben
八	はち	여덟	팔	eight	huit	ocho	acht
九	きゅう/く	아홉	구	nine	neuf	nueve	neun
十	じゅう	열	십	ten	dix	diez	zehn

陳文暉 (2014) 數詞語言學小論。

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

(7)

西方數詞

- ◆ 英德 11 12、西 15、法 16
- ◆ 英語 13-19 vs 21-99
- ◆ 西語 21-29 vs 31-99
- ◆ 法語 70 80 90 無字

60+10 4.20 4.20+10

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

(8)

DIFFERENZE LINGUISTICHE

97

  $90 + 7$

  $7 + 90$

  $9 \times 10 + 7$

  $4 \times 20 + 10 + 7$

  $7 + (-\frac{1}{2} + 5) \times 20$

97

丹麥語
Halvfemsindstye
fem 是五
sind 是無
tyve 是廿

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

[9]

華語數詞就是教具

- ◆ 華人兒童可能不太需要十進教具
- ◆ 花片與百數板
 - 有充分的證據
 - 有沒有必要的證據？

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

[10]

《九章》 啟示錄

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/19

[11]

《九章》 1：方田

◆ 面積公式

- 基本是為土地丈量
- 圓面積 = 半徑與半周之積
- 真正關鍵的是圓周率

單維彰 · 數學課程與學習 2022/10/19

[12]

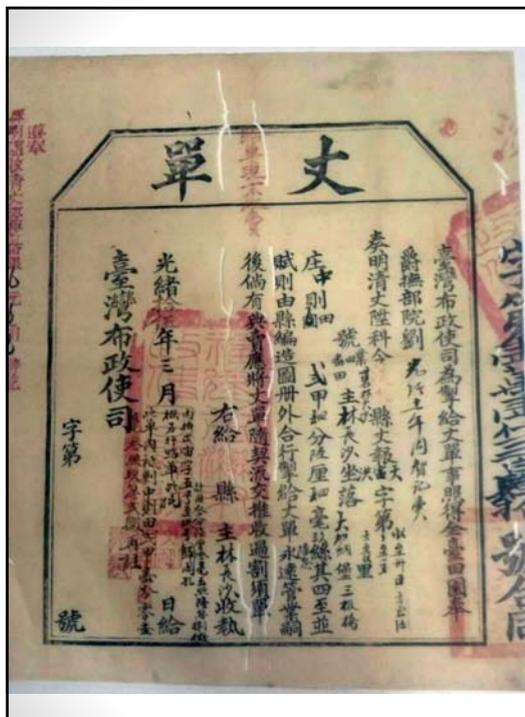
十進小數誕生

〔祖沖之以丈為徑，〕圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。

《隋書律曆志》

單維彰·數學課程與學習 2022/11/19

13



臺灣土地丈單

光緒十五年
貳甲肆分
陸厘肆毫
玖絲

單維彰·數學課程與學習 2022/11/19

14



晚清臺灣 房屋稅

同治二年
壹錢參分肆厘
零毫捌絲貳忽

(若1錢 = 10000元...)

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19 [15]

方田啟示

- ◆ 面積公式是否易學？
- ◆ 十進小數是否易學？
- ◆ 若有必要協助，
十進單位是否有助？
(毫分絲忽...)

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19 [16]

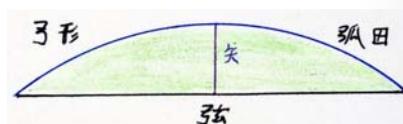
華人不量角

單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

[17]

弧田未竟

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」



單維彰 · 數學課程與學習 2022/11/19

[18]

中國始終不曾量角

- ◆ 有「三角形」：圭田
 - 關心它的面積（半底乘以高）
 - 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）
- ◆ 能測量：只用勾股
 - 從直角三角形的相似獲得比例式
 - 不曾想過勾股之比值（tan）

沒有「角」...

- ◆ 不能發現
 - 角 \leftrightarrow 勾股比
 - 後來的「三角比」
- ◆ 可加強哪些角的操作？

幾何認知較弱

幾何本意「有多少」

《九章》5：商功

- ◆ 體積公式、空間概念

方田與商功

- ◆ 基本形體的學習
- ◆ 是否宜寓幾何於計算？

故名思義的
「三角形」
長什麼樣？

等腰（含等邊）？

故名思義的
「長方形」
長什麼樣？

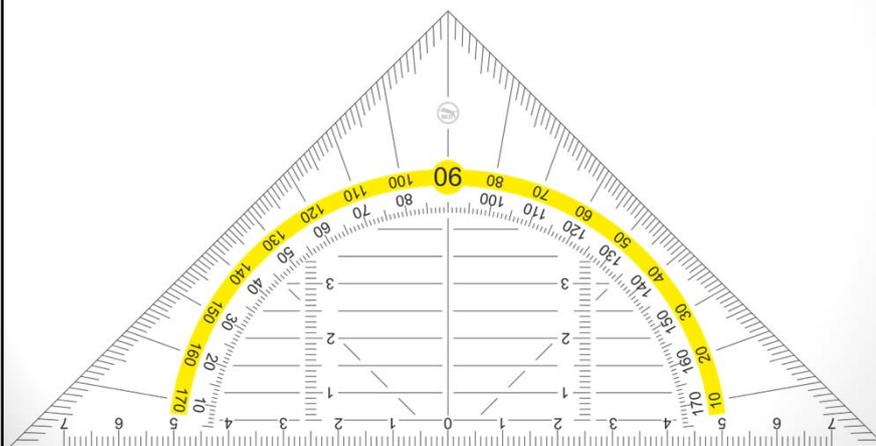
一致性較高？

善用勾股

- ◆ 《九章》：9
- ◆ 「長方形」剖半
 - 有利於相似形的概念建立
 - 內角和顯而易見
- ◆ 實用工具（三角板）
- ◆ 未來學習的主要需求

量角與勾股合一

Geodreieck



不盡除

不盡除的處置

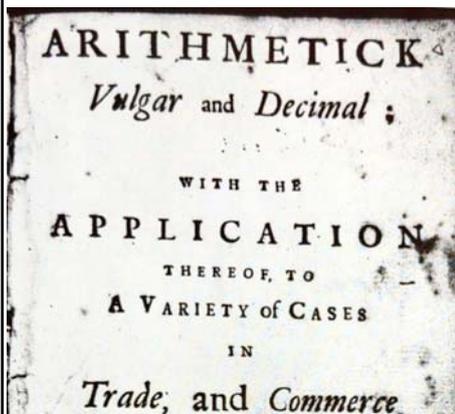
- ◆ 讓它剩下
 - $22 \div 7 = 3 \dots 1$ 並非等式
 - 什麼時候適合教等式？
- ◆ 記錄零頭：fractions
 - 18 世紀：vulgar / decimal fractions
 - 20 世紀美國：common fractions
 - 1980 後：fractions / decimals

《九章》3：衰分

- ◆ 按比例分配
 - 包括正比與反比
 - 多達五項比
- ◆ 分數四則運算的必要
 - 可得真解，如何執行？

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢}$$

十進分數 vs 日常分數



小數是「標準規格化」的分數。

分數與小數

◆ 本是同根生

- 小數是特殊分數

- $\frac{1}{3} + 0.3$ 該做小數還是分數運算？

◆ 小數都是帶分數

分數也該如此

(假分數僅用於計算步驟)

分數小數誰實用？

由工具決定

- 英吋刻度尺： $2\frac{3}{8}$ 吋比 2.375 方便

- 台斤槓桿秤： $1\frac{5}{16}$ 斤比 1.3125 方便

- 若有對應的十進貨幣（交易工具）：

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢} \approx 8 \text{ 錢 } 7 \text{ 分 } 5 \text{ 厘 } 9 \text{ 毫 } 1 \text{ 絲 } 2 \text{ 忽} \dots$$

(若 1 錢 = 10000 元...)

法國創造公制

- ◆ 就是希望以十進制
「標準化」度量衡
- ◆ 英國偏不要，純屬意氣
- ◆ 不宜有...

$\frac{6}{7}$ 公里 $\frac{11}{4}$ 公斤 $\frac{5}{21}$ 公升

「我不喜歡數學！」嘉大楊德清談臺灣中小學數學課本發生了什麼事？

教育

分享文章：[f](#) [t](#) [s](#) [w](#)

人文島嶼 2022-10-16 11:04

小 中 大



臺灣的數學教科書，教育部雖然提倡「數學融入生活」，教科書編製仍常流於「為情境而情境」，就算納入生活情境，往往也只是點綴、包裝，難以讓學生真的感受到學習數學的樂趣、重要性。

跨文化的素養

- ◆ 公制應化為十進小數
- ◆ 舊制宜用二分數
- ◆ 概數課題
 - 可約至最近 $\frac{1}{16}$ 嗎？

包含除

連續量的包含除

- ◆ 數線：數學的尺
 - 丈量世界的工具
- ◆ 每 $\frac{1}{2}$ 吋切一段
- ◆ 每 $\frac{3}{4}$ 吋切一段
- ◆ 是否為較自然的模型？

單位長

單位長不在數線上

- ◆ 畫好數線問單位長
恐為流於形式的問題
- ◆ 未必是線上的最小刻度
- ◆ 單位長可隨意，
但定好之後才有數線

數線 平面坐標

假設不含計算

- ◆ 美、德都在五年級？
- ◆ 國中很需要支援
- ◆ 定位 + 移動，
以遊戲為之

概數與概算

如何教概算？

- ◆ 「概數」是知
- ◆ 「取概數」是行
- ◆ 「概算」需要識

例如四人聚餐之後要平分 4,782 元的帳單，
假設要估算到百位，不該先 $4782 \div 4$ 再取
概數，應該先取概數再算 $4800 \div 4$ 。

列聯表

交叉分析表

- ◆ 三年級首次引進
 - 可持續發展到 11 年級
- ◆ 教師理解了沒？
- ◆ 四五年級
可否搭配進度複習？
 - 例如百分比

不確定感

直觀機率

- ◆ 不確定感的量化
- ◆ 國外文獻...
- ◆ 五年級可行嗎？
 - 有何「建設性」內容？
 - 那六年級要接什麼？
(有些研究顯示出「條件」直覺)

知難行易

孫文

習得者希望能直接加諸自己多年後領悟的精華給年輕後輩，善意地希望節省她們的時間，提升他們的境界。

很可能違背教心

適時合度

- ◆ 「理解」可分層次
 - 經常是漸進而又頓悟的
- ◆ 愈接近日常愈易行難知
 - 直式算則，「餘」的位值
 - 分數轉小數
 - 3、11的倍數判斷

「理解」真諦

- ◆ 「理解」其實是為了深度／長期記憶
- ◆ 如果已經輕易記住未必需要強調理解
 - 有沒有小學可行而不解 X 造成國中學習困難的例證？

課程研究

勿逆來順受

- ◆ 課綱是社會協商的
 - 不是「上帝創造的」
- ◆ 有哪些長期指認知、行兩難的課題？
- ◆ 也許是課綱層次的問題

The End

班門弄斧
還請包涵