

圓錐曲線誤例探討

單維彰¹、舒宇宸²

¹中央大學師資培育中心、文學院學士班、數學系

²成功大學數學系

民國 114 年 2 月 8 日完稿，3 月 1 日審定

我們最近發現幾個高中數學教材中可能有誤或者需要注意的應用舉例，恰好都屬於圓錐曲線或二次曲線主題，整理出來分享給教師同仁，希望有助於改善教學品質。具體而言，本文提出四點意見：德基水庫的壩體不是數學所謂的雙曲線造型，北二高碧潭橋的橋拱應該不是雙曲線設計，拋物線彗星軌道需注意更多細節，以及雙曲線定位系統要考慮實際的數量級。

我們認為：相對於以上四點宣告，對同仁更有價值的訊息，是我們如何察覺上述情境的可疑，以及如何探究並獲得正確可能性較高的知識。因此，以下分四節講述我們的探究故事。

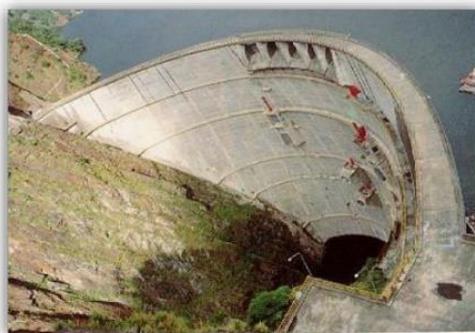
一．德基水壩

許多教材都舉了這個雙曲線應用範例：德基水庫的攔水壩（以下簡稱德基水壩）是雙曲線造型。本文僅以以下簡報為例（2014 年 9 月 29 日上傳，2024 年 10 月 10 日下載）：

<https://www.slideserve.com/zaide/4954416>

這份簡報沒有作者署名，只有教育部徽章，我們就讓教育部來負其文責吧。簡報第 3 頁可能是許多同仁熟悉的內容：

德基水庫位於大甲溪上游，最大壩身為 180 公尺、壩頂長度 290 公尺的雙曲線型薄拱壩，總蓄水量為 232,000,000 立方公尺，可見能承受多麼龐大的驚人水量。



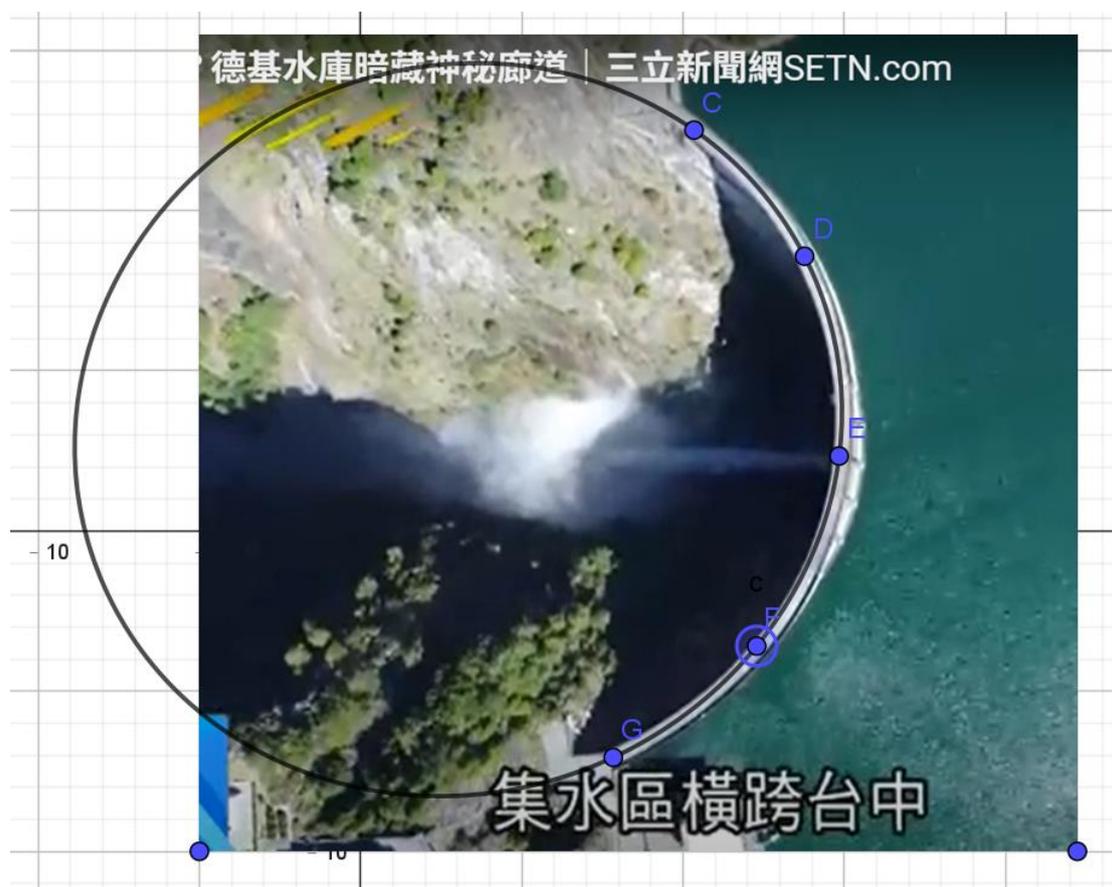
資料來源：
德基水庫國際網路資訊系統
<http://wrm.hre.ntou.edu.tw/wrm/dss/restc.htm>



簡報引用的資料來源網址，如今已經不在，但類似訊息還是呈現在經濟部水利署水庫風情系列網頁上（2024年2月15日最後更新，11月1日讀取），水利署網頁說德基水壩是「雙曲線薄型混凝土拱壩」。

即使水利署官網這樣寫，第二位作者（舒）還是懷疑，他的理由是：

1. 當時所給出的疑問是：圖片中的水壩是一個三維的立體，雙曲線是一條曲線，文中的雙曲線指的是哪一段？最主要是關鍵在於希望教科書釐清曲線與曲面的概念。
2. 如果是指它縱向截痕(從底部到頂部)是雙曲線的話，它照片中看起來應該是直線，而且縱切面兩側應該與山壁要相連，要特別做出雙曲線的原因為何？這最主要是從實際建造這個水壩的過程來思考。
3. 那最有可能的就是水平面上橫向截痕有一條雙曲線了，但從空拍影片中截圖，透過 Geogebra 來做二次曲線的擬合，看起來比較像圓弧。
(<https://www.youtube.com/watch?v=Vyy3oQUIZ14>) 這個則是從影片來得到實證。雖然空拍會失真，但至少可以給出一個參考。



受到第二位作者的督促，第一位作者（單）看著簡報中的照片，自己也搜尋了更多德基水壩的照片來參考，怎麼也看不出雙曲線的特徵，壩體的上視圖怎麼看都是圓弧（或從第二位作者提供上圖得知比較像橢圓）。當他得知「拱壩」是 arch dam 之後，他知道 arch 這個字的意思就是圓拱，如果沒有指定其他曲線形狀，arch 就是一段圓弧的造型。所以他試圖找到 hyperbolic arch dam 的資訊，但

是並不成功。進一步閱讀 arch dam 的英文資訊時，他發現拱壩的工程設計基本上都是圓弧，頂多使用分片圓弧，或者在不同高度採用不同圓心與不同半徑的圓弧，並沒看到特別提及雙曲線拱壩（hyperbola 或 hyperbolic arch dam）的英文資訊。

第一位作者認為不必這樣閉門造車，我們周圍很多土木水利的教授朋友啊。他就去請教一位中央大學土木系資深教授（曾任中央大學副校長）：吳瑞賢教授。吳教授的第一句話就說「我們都說德基水壩是雙曲線拱壩」。談話本來可以就此結束，但是我（單）既然都打擾他了，就多聊幾句吧。再多聊一聊「雙曲線」的用途，就發現我們兩人雞同鴨講。最終我了解：土木工程師說的「雙曲線拱壩」意思是「兩條曲線」的拱壩，不是「二次曲線之雙曲線拱壩」。

事情是這樣的：水壩最初是重力壩（gravity dam），靠壩體本身的重量阻水，例如石門水庫就是。重力壩的頂部形狀並不重要，基本上可以依地形而建，也可以拉一條直線。但拱壩則以圓弧造型凸向蓄水區（上游），藉兩側的山壁撐住蓄水的重量，其原理等同於橋拱和門拱承受上方的重量。拱壩不靠本身的重量來擋水，所以不必那麼重，因此節省建材。但因為水壓越深越大，所以壩體仍須越下方越厚。最初的拱壩設計，朝向上游那個曲面（上游面）的縱向截痕是直線（鉛直線），而橫向（水平面）截痕是圓弧；朝向下游的壩體則會越下方越厚。「雙曲線拱壩」的意思是上游面的縱向截痕也是曲線，這樣設計雖然壩體還是必須往下增厚，但增厚的程度較小，可以進一步減輕壩體的重量，也就是可以進一步節省材料（例如混凝土）。



在上述「雙曲線」——兩條曲線——的意義下，德基水壩確實是臺灣水利工程的驕傲。工程界使用底部厚度對壩體高度的比值作為水壩厚薄的參數，必須小

於 0.2 才叫做「薄型」水壩，而德基水壩的參數是 $\frac{20}{180} \approx 0.11$ ，可見它相當「薄」。

數學課本將它解釋為雙曲線性質的應用，可能只是一個語言上的誤會。

水壩工程的中文參考資料，請看 [1]；這篇文章稱前文描述的兩種拱壩為「單拱」和「雙拱」，而「雙拱壩」又稱「雙曲線拱壩」。至於英文資料，Wikipedia 的 Arch Dam 詞條就已經足夠參考。Wiki 的「拱壩」詞條提到 double-curved 和 double-curvature，或許就是土木工程界所說的「雙曲線」。因為 double-curved arch dam

的縱向截痕凸向上游，從下游看去就類似抬頭看圓頂／穹頂（dome），所以這種水壩又稱為 dome dam。

二．北二高碧潭橋

前面那份教育部「雙曲線的應用」簡報第 6 頁，聲稱北二高碧潭橋的「外形」是雙曲線。讓我們假設它的意思是：橋墩的底部（下緣）是一段雙曲線。

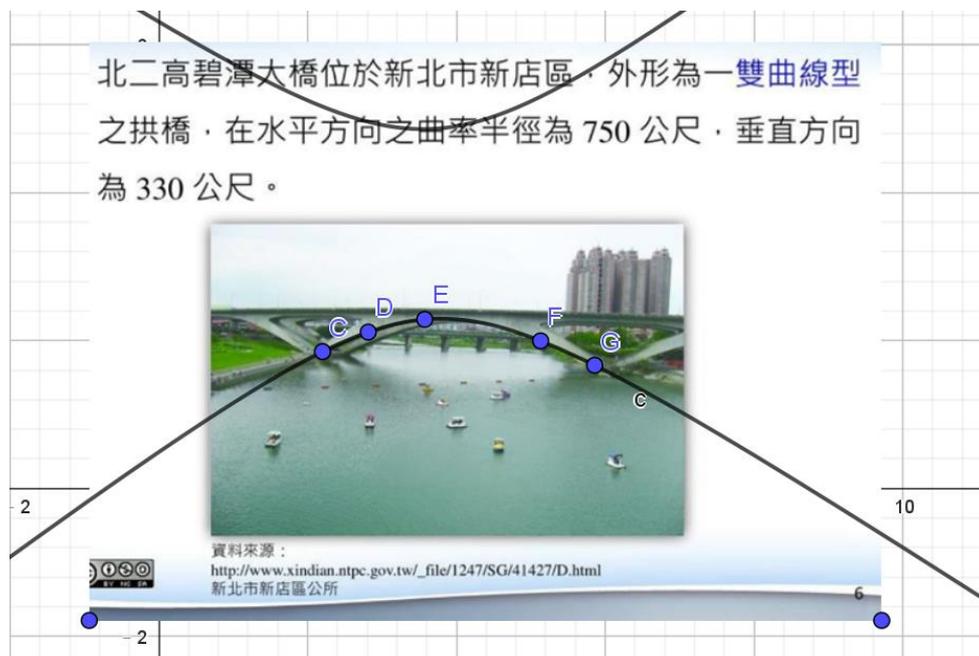
北二高碧潭大橋位於新北市新店區，外形為一雙曲線型之拱橋，在水平方向之曲率半徑為 750 公尺，垂直方向為 330 公尺。



資料來源：
http://www.xindian.ntpc.gov.tw/_file/1247/SG/41427/D.html
新北市新店區公所

6

雖然第二位作者透過曲線擬合，的確可以找到一條雙曲線，但是這樣的視覺效果，可能是拍攝的視線並不垂直於橋拱所在的平面。



第一位作者（單）看到簡報寫「曲率半徑」，就懷疑它並非雙曲線設計；因為據他了解：在工業設計領域，除非特別聲明，一般所謂的曲率半徑就是圓弧的半徑。

簡報引用的資料來源網址，如今也不存在了，但是維基百科有「北二高碧潭橋」詞條。這篇百科文件的「設計」節寫了三次「弧形」。感謝本文審查委員指出：弧形（arc）的數學（幾何）定義就是一段可微曲線（An arc (geometry) is a segment of a differentiable curve），範圍相當廣。事實上，維基百科公佈的橋樑設計師事務所、承建公司都還在營業中，如果數學學科中心或教科書編者想要弄清原委，應該可以找到設計圖，獲得精確數據。就目前的資料來看，北二高碧潭橋涉及雙曲線的可能性偏低。

維基百科說明橋拱由三段弧形組成，中間那一段的跨距是 160 公尺，拱高 20 公尺。假如這裡說的「拱」是「圓拱」的意思，跨距和拱高相當於給了弦、矢兩個條件，可以決定半徑——這個問題在 8 年級就能做，也可以決定弧長——這個問題需要到 10 年級才能做。這些具體問題，倒是素養教材不妨考慮的方向。

三·彗星軌道

有些數學教材宣稱有拋物線軌道的彗星，它們依據的來源之一是「中央氣象署數位科普網」的〈掃把星的真相—彗星〉一文（2024 年 11 月 4 日下載）：

<https://pweb.cwa.gov.tw/PopularScience/index.php/astronomy/77-掃把星的真相—彗星>

這篇網頁寫著：

彗星的軌道

彗星在銀河系運行時，會因為受到其他恆星的引力影響，改變一部分的軌道而進入太陽系中，太陽引力會影響彗星的運行路線，也就是彗星的軌道。彗星的軌道有二種：橢圓形軌道、拋物線軌道：

1. 橢圓形軌道：橢圓形是一種閉合的曲線，也代表此類型軌道的彗星都有其回歸的週期，依回歸週期的長短分為短週期彗星與長週期彗星。
2. 拋物線軌道：此類彗星可算是太陽系外的遊牧民族，在行經太陽系附近時受到太陽系引力的影響，而被吸引進來後又離開太陽系繼續旅行。

目前所觀測到的彗星中，有半數以上屬於拋物線軌道彗星。

根據此文，不但有拋物線軌道彗星，而且它們還佔多數。此文沒有作者署名也沒有上傳日期，所以就由氣象署負其文責吧。作者根據科學觀測與計算的誤差原理，懷疑上述資訊，所以展開了探索。

先說明我們懷疑的理由。在數學上，我們知道只有當二次曲線的離心率（記作 e ）恰為 1 時，它才是拋物線。但是在自然界，測量所得或者根據測量數據計算而得的參數，都應該理解為連續型隨機變數，讓我們用 X_e 表示根據觀測而推算的離心率。那麼，我們知道理論上：

$$P(X_e = 1) = 0$$

根據以上等式，用數學的嚴格語言來說，拋物線軌道的彗星是不存在的。可是，這樣的觀念也不算具備數學素養，更缺乏科學素養。因為，實際上太空科學家只能在若干有效位數之內算得離心率。假設現在太空觀測的工具可以保證 e 的計算誤差小於 5×10^{-7} ，則當

$$0.9999995 \leq X_e < 1.0000005$$

科學家確實就說 $e=1$ 。在這個意義下，

$$P(0.9999995 \leq X_e < 1.0000005)$$

應該是個微微的正數，也就是說拋物線軌道的彗星有微微的可能存在。實際上如何呢？

為了吸收彗星的基本知識，第一位作者首先閱讀了著名的中央大學太空科學科普作家陳文屏教授（1996）的〈失而復返的太陽系成員—彗星〉[2]；這篇文章現在仍然值得數學教師同仁參考。文內寫道：「長週期彗星的入射軌道截至目前為止未發現拋物線的軌道」。難道 1996 年的二十八年之後，就變成半數以上的彗星是拋物線軌道嗎？以下是我們探究的簡報。

最近（2024 年 10 月）打我們身邊劃過的紫金山 - ATLAS 彗星就給我們上了一課。一方面，隨著觀測資料的累積——觀測數據是正規分布的隨機變數——天文機構一直在修正它的離心率。另一方面，像它這樣小的星體，在行進中可能因為物質的流失或者其他星體的重力吸引而改變軌道，所以天文機構也一直在微調它的離心率。事實上，有些彗星無法通過近日點：它們可能在近日點（或更早）就解體了。去年有人指出紫金山 - ATLAS 彗星可能無法穿越近日點，引起天文迷的關切；這個預測並沒有成真。但是今年的另一顆彗星（C/2024 S1）就在 10 月 28 日於近日點附近解體，在 [3] 還看到它解體的影像。

因為前述原因，紫金山 - ATLAS 彗星的離心率頻頻更新，可見彗星軌道的離心率並不是數學概念上的常數。NASA 最初算得的離心率小於 1，據其推算的週期大約是八萬年。當第一位作者（單）11 月 4 日查詢中文版維基百科時，其公告離心率為 0.9999985，非常靠近 1（但畢竟不是 1）據其推算的週期超過了一億年。而 NASA 在 10 月 14 日的報導已經說它應該會脫離太陽系，不會再回來，也就是離心率大於或等於 1。至於噴氣推進實驗室（JPL）則在 10 月 31 日根據 935 天累積的觀測資料，修訂它的離心率為 1.0001326。就數學定義來說，紫金山 - ATLAS 彗星此時的軌道是雙曲線。

以紫金山 - ATLAS 彗星為機會教育之實例，我們做一番探究，學習到以下幾件事：

- (1) 彗星軌道的離心率可能會改變；當它遠離太陽系的八大行星之後，受擾動（perturbation）的機會降低，也許可以假設為常數。但是當它行經較大星體，

後者的重力場就可能改變彗星軌道的離心率。

(2) 假如沒有擾動，彗星在某一段的理論性軌道——稱為 *osculating orbit*——確實可能離心率为 1（拋物線），但是沒有查到提出確切實例的學術文章。

也許有人要問：何必這麼挑剔，為什麼不能取三位有效小數就好：如果

$$0.9995 \leq X_e < 1.0005$$

就說 $e=1$ 而軌道是拋物線？我們的意見是：的確可以，但這件事最好還是由太空科學領域來決定——就像他們決定把九大行星改成八大行星那樣——不宜由我們（數學領域）來規定。

太空科學家怎麼說呢？第一位作者恰好在校園裡遇到做「太空天氣」而且發現它有可能預報地震的著名太空科學家劉正彥教授，就此問題請教他。他先自謙並非彗星專家，但是他不認為太空科學界會另外規定一個縮小有效位數的準則，一切數據應該就以當時最精確的儀器設備為準。

假設 *Britannica*（大英百科全書）和 *Wikipedia* 的相關詞條是專業人士寫的。*Britannica* 的彗星詞條 [4] 只在講古的時候提到拋物線軌道。彗星軌道的相關歷史，可供創作許多有趣的數學科普。克卜勒認為彗星沿直線運動，牛頓認為是拋物線，並將 1680 年大彗星的軌道擬合（fit）至拋物線；當時在 125 天內累積了 30 筆觀測資料。現在科學家認為那顆彗星（C/1680 V1）的離心率为 0.999986，它的週期約為 9370 年。哈雷用牛頓的方法研究了當時有紀錄的 24 顆彗星。即使哈雷把 24 顆彗星的軌道全都擬合為拋物線，但他發現西元 1531、1607 和 1682 年的三顆彗星軌道幾近重疊，所以他另外提出一個假設：它們是同一顆星體，而它的軌道是橢圓。這就是著名的哈雷彗星（1P/Halley），現在認為它的離心率为約 0.968，週期約為 76 年。

由上可見，當觀測資料不夠精確時，前輩天文學家／數學家曾經認為彗星軌道是拋物線。但是當資料越來越精確，拋物線軌道的彗星就越來越少。

或許因為軌道離心率的不穩定性，太空科學並不使用軌道的離心率來分類彗星。*Wikipedia* 的彗星詞條 [5] 提供兩種分類方式，與軌道有關的那一種分類，採用的規準是週期而不是軌道形狀。*Wikipedia* 根據彗星的週期性提供分類總表 [6]，其中包括雙曲線軌道彗星列表 [7]，並沒有獨立的拋物線軌道彗星列表。在 [7] 中，他們將所有觀測資料不足的彗星軌道離心率一律「規定」為 1.0，就好像當年牛頓和哈雷一樣（或許這樣規定，是為了向牛頓與哈雷致敬）；在 [7] 的表格內，只要在離心率 e 那一欄寫著 1.0 的，全都是假設的（*hypothetical* 或 *assumed*）。如果不知道前述背景知識，只看列在 [7] 的彗星表格，很容易以為「有半數以上」的彗星軌道是拋物線。現在我們應該明白：這個觀念實在不宜視為事實。

四．雙曲線定位

我們看到某份教材介紹雙曲線定位系統，在臺灣北部畫了三座雷達基地臺。最初是第二位作者（舒）質疑教材提供的用雙曲線來做船舶定位情境不合理，如果船

上已經有雷達系統可以知道它與某二到三個固定的基地台的方位與距離，那麼透過二到三個圓的交點就可以找到定位了，不需要使用雙曲線。但雷達能探測的距離有限，離陸地遠一點可能就測不到了。要在較遠的海洋上定位，需要有更完善的系統。而教材表示此系統是為了從陸地確定海上船隻的位置。接著第一位作者（單）也認為基地臺不太可能這麼靠近。他的想法是：如果想要得知船隻到兩個基地臺的距離差，極可能須從雷達訊號的時間差換算而來；假如基地臺距離像教材所繪（大約只有 30 公里），則它們之間只有萬分之一秒的時間差，而它估計可攜式的接收器很難擁有這麼高的時間解析度。因此，我們開始探究。

用 hyperbolic locating system 很容易查到 Wikipedia 的「雙曲導航」詞條 (Hyperbolic navigation) [8]，從中追查到美中使用的羅遠系統：LORAN，是 LONg RANge Navigation 的併寫，意思是遠距導航 [9]。

第二位作者曾經與成功大學系統及船舶機電工程學系的邵揮洲老師（現已退休）合作，偵測船舶上的引擎振動異常。所以馬上就教於研究船舶的專家。在專家的指引下，馬上就找到在國立海洋科技博物館的資料 [10]，截圖如下（截圖之倒數第二列「向位差」寫了別字，應該是「相位差」）：

首頁 > 航海科技 > 航行定位



航行定位/電子定位



地文定位 | 天文定位 | **電子定位** | 雷達定位 | 衛星定位 | 電子海圖

點閱數：5949

現代科技進步，航行定位的方法也進步到利用無線電波或人造衛星做為定位的工具。電子定位的儀器，早期有羅遠系統（LORAN）、德卡航海系統（Decca）、歐米茄航海系統（Omega）、康索（Consol）系統等。這些系統已經少有人使用，已被使用人造衛星技術的全球定位系統取代。

雙曲線定位系統－羅遠

在陸上相隔的兩地建立兩個羅遠基地無線電臺，同時發射信號，這信號就像水的波紋一樣擴散開，這兩組波紋相互交叉處的連線，即是呈雙曲線的形式。這條雙曲線上代表了這兩個信號有著相同的時間差或是向位差。兩個無線電臺即可形成一組雙曲線圖，多組無線電臺就形成了多組的雙曲線圖，將這些雙曲線圖標示在經緯線海圖中，供船隻航海定位用。

羅遠（LORAN）是 LONg RANge Navigation 的縮寫。它是由美國海軍所研發，二次大戰後開放供商船使用。羅遠是接收羅遠基地臺的無線電信號，比較信號之間的時間差或是向位差，再對照標示著雙曲線的海圖，就可以得知船位的一種儀器。這種藉測量兩個信號的時間差或向位差而獲得船位定位資料的航海系統，稱為雙曲線定位系統。

其實網站上的資料寫的滿仔細的，但最重要的是怎麼理解它。當時教科書編者就寫這個定位訊號是從船上發射的。那個是用來觀察在某個範圍內，有沒有其他船隻靠近，也就是雷達系統。它是從船上主動發射訊號，接收某個方向的回波訊號，以確定其他船隻(或物體)在哪個方向，距離有多遠。但這個是把自己的船當作原點的極坐標系統，在電影中常常看到有一條線掃一圈的就是它，但這並非「定位」系統。也不需要用到雙曲線。

若要使用雙曲線的定位系統，則需要思考上述的過程是怎麼完成的。首先，它必須有三個以上的基地台，而且必須有一個同步系統，以確定每個基地台發出

去的訊號是同步過的。也就是上述博物館網站中所提到的，同時發射信號。這時候在船上接收到其中兩個基地台信號的時間差，從時間差可以推得距離差。如時間差是 0.5ms，那麼距離差就是大約 150km。但 150km 就是大約台北到台中了。而根據 Wiki 所提 [9]，LORAN 的適用範圍大約是 930 - 1300km。也就是訊號大約要 3 到 4ms 左右才能夠被辨識出來差別。

參考文獻

- [1] 謝敬義 (1992)。壩工與地質(1)。地工技術雜誌，36，104-107。2024 年 10 月 10 日取自 www.geotech.org.tw/upload/column_zone_file/222_20200422151615282.pdf
- [2] 陳文屏 (1996)。失而復返的太陽系成員—彗星。物理雙月刊，18(5)。2024 年 11 月 2 日取自 www.astro.ncu.edu.tw/~wchen/wp_chen/essay/cometall.doc
- [3] 臺北市立天文科學教育館 (2024 年 10 月 29 日更新)。彗星 C/2024 S1 通過近日點 (已消散)。2024 年 11 月 4 日取自 tam.gov.taipei/News_Content.aspx?n=B64052C7930D4913&sms=2CF1F5E2E0B96411&s=B132E0F46F59D254
- [4] Britannica (2024 年 10 月 28 日更新)。Comet。2024 年 11 月 5 日取自 www.britannica.com/science/comet-astronomy
- [5] Wikipedia (2024 年 10 月 27 日更新)。Comet。2024 年 11 月 4 日取自 en.wikipedia.org/wiki/Comet
- [6] Wikipedia (2023 年 9 月 24 日更新)。List of comets by type。2024 年 11 月 4 日取自 en.wikipedia.org/wiki/List_of_comets_by_type
- [7] Wikipedia (2024 年 11 月 5 日更新)。List of hyperbolic comets。2024 年 11 月 5 日取自 en.wikipedia.org/wiki/List_of_hyperbolic_comets
- [8] Wikipedia (2024 年 8 月 31 日更新)。Hyperbolic navigation。2024 年 11 月 4 日取自 en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_navigation
- [9] Wikipedia (2024 年 10 月 13 日更新)。LORAN。2024 年 11 月 4 日取自 en.wikipedia.org/wiki/LORAN
- [10] 國立海洋科技博物館 (2012)。航行定位／電子定位。2023 年 8 月 10 日取自 <https://ship.nmmst.gov.tw/ship/content/148/609>