

素養導向之數學教材初探

鄭章華、單維彰

摘要

國家教育研究院「課程及教學研究中心」的《十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯計畫》，意以實踐與理論並行的方式，一面著手開發素養導向的數學教材，在發想、研討、寫作、內部修訂、外部審議、觀課與論課、編輯排版與校對、乃至於最後發行與傳播的完整流程中，獲得由課綱轉化為教材的第一手經驗，並且同時以這些近距離觀察或親身參與的經驗，印證或修飾十二年國教課程綱要的理論架構。

本計畫自從民國 103 年 3 月核定後，執行至今已進入第二梯次。前一梯次完成國小、國中、高中和高職之素養導向數學教學模組各一份，而第二梯次在國中和高中各添加一組夥伴，可望完成六份模組。

此研究最可貴的經驗之一，發生在研發教材的初始時期。縱貫三個學習階段的全體夥伴齊聚一堂，深度交流，藉由交叉比對彼此關心的課題，形成各自的主題，並且在過程中不斷探索教學目標的「意義」以及彼此呼應的「脈絡」。

另一個發人深省的經驗發生在外部審議的程序中。對於「素養」之為何物，而又該如何落實於教材教法之中的見解，正在我國的數學教育圈內旺盛地發展中。各家所見大致相同，但進入實作的細節，則有許多可議可論之處。大家對於素養導向之評量或許有比較具體的想像，但是對於素養導向之教材則缺乏共識的參照標準。所以，審查的程序，經常演變為對於素養教材之意涵的辯證性對話。

內部的探索與外部的辯證，也許都還沒有到達可形成共識的結論階段。但總結上述兩類經驗，本計畫可提供三項暫時性的想法，就教於與會之各界賢達，但願發揮拋磚引玉之效。其一，此計畫既然由臺灣的國教院發起，而不是歐盟或美國的，則須反應我國之教育傳統中固有的文化價值；「素養」一詞，似在使之對應 Competency 或 Literacy 之外，望文生義還有「素質」和「修養」的含意。其二，此計畫既然是為了民國 107 年的十二年國教新課綱而準備，則在九年一貫的延伸之外似應還要有所「進化」，故「素養」之主張，與大家較為熟悉的學生中心、建構、鷹架、問題或專題導向等主張，理應有個精緻的差異。其三，此計畫既然與課綱研修委員密切合作而不是分庭抗禮，並且讓三個學習階段、四種類型學校的數學同仁聚在一起工作，則十二年國教之數學課程的整體脈絡，想必應該對素養教材發生關鍵的影響。

最後，本計畫既然以實作為宗，我們也將簡介已完成的四個教學模組，並略述進行中的六個模組，供各界指教。

關鍵字：核心素養，數學素養，課程綱要，書面教材

壹、前言

十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）課程綱要總綱已經於 103 年 11 月 28 日由教育部發布，預計從 107 年起，分別於一年級、七年級、十年級開始逐年實施。這是我國教育自九年一貫課程實施以來的一大變革。此波的教育改革呼應世界許多國家，例如歐盟與經濟合作與發展組織，對於學習者關鍵素養 (key competences) 培養的重視 (European Commission, 2007; The Organization for Economic Co-Operation and Development, 簡稱 OECD, 2005)。

在數學領域是發展學習者的數學素養，為進階學習與職涯發展做好準備 (林福來、單維彰、李源順、鄭章華, 2013)。雖然十二年國教改革呼應世界國際教育改革趨勢與相關的研究證據，然而，從教育改革的經驗得知，由理想課程到教學現場所進行課程轉化往往是改革成敗的關鍵。以九年一貫課程的實施為例，其課程轉化主要順序為「理想課程」(課程改革理念)→「官方課程」(課程綱要)→書面課程 (教科書)，課程在轉化的過程中出現落差，衍生出一些問題，例如：教科書編排的趨同現象 (張芬芬、陳麗華、楊國揚, 2010)。

目前中小學教師仍相當依賴教科書進行教學 (林碧珍、蔡文煥, 2006; 張芬芬等人, 2010; 徐偉民, 2013)，故課程改革的課程理念與目標，若能藉由教科書設計而具體達成時，教科書即成為有力推手;反之，若教科書傳遞的教育內涵和課程理念與目標背道而馳時，則教科書極可能成為課程理念轉化的重大阻礙 (張芬芬等人, 2010)。因此，為使教科書出版商與第一線教師瞭解十二年國教數學素養理念，期能順利轉化官方課程至書面課程與運作課程，教育部委託國家教育研究院進行為期三年的「十二年國民基本教育領域教材與教學模組研發模式之研究」計畫，研發數學、自然科學、語文、生活課程等領域的教材與教學模組。本文呈現數學領域第一、二年初步的研修成果，說明數學素養導向教學模組的研修歷程、素養導向教材的定義與成品，提供教師和教科書編輯團隊發展相關素養教材的參考。

貳、文獻探討

「素養」一辭，中文本有；而且已經用在教育文件裡。例如民國 84 年之高級中學課程標準，即有「提升高中生人文與科學素養」的說法 (教育部, 2005, p.599)。然而，「素養」作為教育的特定觀念而產生探究其專門化定義的需求，應該是在 21 世紀受西方 (特別是歐洲) 影響而逐漸發展成形的。本節分別就「關鍵素養」和「數學素養」兩個主題，簡要探討國內與歐洲的相關文獻。

一、核心素養

我們可以將歐洲自 20 世紀末開始發展的一種教育觀，視為「素養」觀念的濫觴。而這種特定的教育觀，又或許可以稱之為教育的實用主義 (Pragmatism in Education)。具體而且顯然已經發揮影響力的例證之一，就是歐洲語言共同參考

架構 (CEFR: Common European Framework of Reference for Languages)。

歐盟理事會 (Council of the European Union) 在西元 2001 年公佈 CEFR，建議不要將語言的學習視為知識 (knowledge) 的累積，而應強調其功能性 (functions)，亦即在真實情境下使用語言進行溝通的能力。CEFR 是一個以「能做」描述 (“Can-do” Descriptors) 界定語言能力的參考架構；它建議 (第二或外國) 語言的教學與評量，應該從語言知識 (linguistic knowledge)，亦即對語言系統的認識，例如字彙和文法等，遷移到語用能力 (pragmatic competence)，亦即對語言之功能性資源的熟悉度，例如語言的連貫性、對言談的掌握、對各類體裁的理解等 (Council of Europe, 2001)。

CEFR 的研究工作，是歐洲委員會 (Council of Europe) 在 1989 至 1996 年間委託進行的。緊接在後，經濟合作與發展組織 (OECD) 以同樣的實用主義精神，在 1997 年底委託了「素養的定義與選擇」研究案 (DeSeCo: Definition and Selection of Competencies)，美國教育部和教育統計中心是主要的資助單位。DeSeCo 界定出能使用工具溝通與互動、能在異質社群中進行互動與能自主行動等三個核心範疇，每個範疇又分成三項指標與內涵，彼此緊密連繫，以確保個人的成功實現與社會的良好運作 (Rychen & Salganik, 2003)。

DeSeCo 發展成教育政策制定與評量工具發展之依據，譬如受到我國社會重視的國際學生能力評量計畫 (PISA: Program for International Student Assessment) 即為一例。DeSeCo 所說的 Competency 可以直譯為「能耐」，它長期以來是人力資源管理 (HR: Human Resources) 領域中的用語，我國教育界選用「素養」作為此一觀念的對應中文。

DeSeCo 在西元 2003 年正式集結出版其素養理論的完整架構，而歐洲議會 (European Parliament) 在 2006 年底進一步公告「支持終身學習的關鍵素養」(KCL3: Key Competences for Life-Long Learning)，提出母語溝通、外語溝通、數學能力以及基本科學與科技能力、數位能力、學習如何學習、社交與公民能力、創業家精神以及文化覺察與表達等，是為支持終身學習的八大關鍵素養 (European Commission, 2007)。KCL3 的制訂者包括歐盟會員國的決策者、專家學者與實務工作者等不同領域專業人士。某些關鍵素養彼此內在連結與相互支持，例如前四項是學習的基礎，「學習如何學習」支持所有學習活動之進行。此外，批判思考、創造力、主動積極、問題解決、風險評估、做決定、建設性的感受管理等，貫穿於 KCL3 而扮演著舉足輕重的角色。

在國內，國科會委託洪裕宏等人於 2008 年完成「界定與選擇國民核心素養研究案」，提出臺灣國民核心素養的四維架構：能使用工具溝通與互動、能在異質的社會團體中運作、能自主行動、以及展現人類的整體價值與建構文明的能力，每一維度皆包括若干個基本素養。即使有些「素養」是先天潛能的開展，這些開展也一定是後天可習得的，也是教學可以成就的 (洪裕宏，2008)。

為了在素養的主軸上，提供課程之縱向連貫與橫向統整的依據，國家教育研究院委託蔡清田團隊，擬定十二年國教的素養架構與內涵。國教院據此建構自主

行動、溝通互動、社會參與三個面向的核心素養，每個面向又細分三個項目，形成三面九項的核心素養，做為各領域課程綱要的參照依據，也標誌著各級學校所應培養的共同最低要求（國家教育研究院，2014）。冠上「核心」一詞，在於強調這些素養是個人為了發展成為健全個體，因應生活情境的需求與挑戰，所不可欠缺的（蔡清田、陳延興，2013）。

接著，十二年國教總綱便以「核心素養」做為課程發展的主軸，以促成國小、國中、高中教育階段間的垂直連貫以及各領域/科目間的橫向統整。而總綱認為「核心素養」是指個人為適應日常生活與面對未來挑戰，所必須具備的知識、能力和態度，強調學習不應該侷限在學科知識及技能，而是關注與生活的結合，透過實踐力行而成就學習者的全人發展（教育部，2014）。

最後，教育部把「提昇國民素養」列為十二年國教實施配套方案之一，成立專案辦公室，由曾志朗主持，以學校教育為核心，討論受過十二年國教之18歲國民所應具備的素養。此辦公室提出五大素養向度：語文素養、數學素養、科學素養、社會素養與教養/美感素養，並界定其內涵，做為十二年國教之整體受教成果評量與調查的設計與實施依據（教育部，2013）。

然而，在課程設計上，核心素養是十二年國教的總體目標，由全體的學科領域共同達成。各領域可因其學科特色與學習階段需要，選取其中幾項的核心素養，進一步具體轉化為領域的「學習表現」與「學習內容」，不需要對應所有的核心素養項目。以下，我們簡述數學素養的文獻，以及十二年國教之數學領域綱要對應三面九項核心素養的情形。

二、數學素養

有別於 DeSeCo 和 KCL3 採用 Competency 表達其實用主義的教育觀，但是 PISA 卻針對數學改用 Mathematical Literacy，可直譯為「數學的讀寫能力」。選用 literacy 的潛在原因，或許是將數學視為一種語言，它跟母語和外語一樣是學習與溝通的基礎媒介。針對數字的讀寫和計算能力，英文本來就有相對 literacy（識字與讀寫能力）的字 numeracy（識數與讀寫算能力），而英國的數學課綱也採用了這個字（Department for Education, 2013）。PISA 不直接用 numeracy 而另造 mathematical literacy 的原因顯然是它的評量內容不僅是數與量，還包括形體、代數、變化關係與不確定性。數學教育學者將 Mathematical Literacy 和 Mathematical Competence 都轉譯成數學素養。

PISA 定義數學素養為個人有能力在多樣的情境中去形成、應用與詮釋數學，這包括了數學化推理與使用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋與預測現象。數學素養輔助個人認知到數學在世界上扮演的角色，促成建設性、積極參與以及能反思的公民所需之周延有據的判斷與決策（OECD, 2013, p.17）。

PISA 從過程、內容與情境三個向度進行素養題目的編製，在過程方面，細分為形成數學情境，應用數學概念、事實、程序以及推理，和詮釋、應用以及評鑑數學結果等三個範疇，呼應定義中的「形成、應用與詮釋數學」，每一範疇均

需用到七種基本的數學能力：溝通、數學化、表徵、推理與論證、設定解決問題的策略、使用符號、形式與技術語言和運算、使用數學工具。

洪裕宏 (2008) 認為 PISA 雖然用了表達讀、寫、算之基本能力的 literacy，卻已經把該字外拓到應用於日常生活的知識與能力範疇上。不過，中文的「素養」概念仍遠寬於 literacy 的概念。於是，為國民素養專案辦公室研究數學素養的李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏 (2013)，在進行文獻探討與專家座談之後，提出國民數學素養的定義與內涵如下。

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點 (p.21)。

上述定義強調邏輯、抽象以及創新思維與能力的培養，注重數學與現實世界的連結，數學的學習不應脫離生活經驗，還提出了數位工具在問題解決過程中的重要性。這些要素對應了十二年國教核心素養的「系統思考與解決問題」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」等項目。

李國偉等人並建議在教學中放進數學文化的相關素材，不僅讓學生認知到數學對於人類歷史的貢獻，也能欣賞數學的美與和諧性，這呼應了核心素養的「多元文化與國際理解」和「藝術涵養與美感素養」項目。最後，他們強調數學素養對於培養能理性反思、做出合理判斷，並能有效與他人或群體有效溝通觀點公民的重要性；這個要素座落在「社會參與」面向之「人際關係與團體合作」。

十二年國教的數學領域課程綱要 (草案)，以下簡稱「數學領綱」，便選取上述六個核心素養項目，考量國小、國中、高中教育階段學習者的身心發展與階段數學課程目標，分別建構出 18 項數學核心素養 (教育部，2015)。以「系統思考與解決問題」核心素養項目為例，轉化至各階段的數學核心素養分列於下。

- 國小階段：具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。
- 國中階段：具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。
- 高中階段：具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。瞭解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。

最後，國民數學素養的報告書還建議數學教學內容可以做模組化設計，讓教師與學生可根據教學或學習的需求，自行增添或選擇數學內容。本文稍後便將呈現數學教學模組的實驗範例，解釋這些模組的建構過程與方法，也就是從官方課

程到書面課程的實作簡報，並提出素養導向數學教材的建議。

參、研究過程與方法

本研究之目的在於開發素養導向之數學教學模組，並識別出教學模組的研製原則。研究者二人和國小與國中數學輔導團教師（二人一組，原先各一組，後來國中增加一組）、普高與技高數學教師（原先各一組，後來普高增加一組）組成研修團隊，運用「設計研究法」(design-based research) 的四個階段，開發教學模組（翁穎哲、譚克平, 2008）。每個模組包括學習材料（學生手冊、學習單、教材的原型）與教師手冊。

在準備階段，全體團隊每個月固定召開一至二次的研究會議，各自提出自己的想選的課題，自由開放而且相當有深度地彼此交叉討論，融合大家的想法，找到各階段團隊都認為有需要的課題，並設計大家都認同符合「素養」導向的教材教法。達成共識之後，每組擬定自己的主題，然後在會議中確認研究進度、討論教材內容，解決研製過程遭遇到的問題與困難。

各組團隊須完成一份教學模組，其份量以一週授課時間內可完成的單一主題為原則。各組確定主題之後，研製工作就進入了細節，為求效率就改由鄭章華參與國小、國中組的會議，而單維彰參與普高、技高組的會議。在內部討論之後，做成教材的初稿，即進行外審。

為能從理論與實務兩方面給予教學模組意見，研修團隊每組皆延聘外審委員兩人，一位為教授，另外一位為教師。他們對於教學模組首先進行書面審查，給予回饋與修改意見。各組教師根據書面意見修改教材之後，接著進行會議審查。在會議審查中，各組教師說明教學模組撰寫的理念、想法與架構，和審查委員面對面討論、說明或論辯教學模組的設計與內容，最後根據會議決議修正教學模組。

審查修訂之後，進入執行階段。研製團隊採取課堂教學研究 (lesson study) (Fernandez & Yoshida, 2004) 中「說課」、「觀課」、「議課」的程序在學校進行課堂教學實驗。研究資料蒐集包括教學實驗錄影檔、學生的學習單與觀課紀錄表。

在評鑑階段，召開教學實驗的教師、觀課教師與研究者的討論會議，根據觀課紀錄修正教學模組的相關內容，再進行第二次外審，根據審查意見修正後定稿。

最後，在推廣階段，研修團隊將把教學模組提供給教科書出版商、中小學數學輔導團、高中數學學科中心與十二年國教前導研究學校，做為課程轉化的參考。

肆、素養導向教材之定義探索

前面已經透過文獻而探討了素養的觀念，但是落實到像教學單元這樣的細節，那些大方向的指導原則，還需要更精緻地思辯與討論，才能變成可依循的行動方針或判斷依據。在研製過程中，老師們經常要問（自問或彼此詰問）「做這個有什麼意義？」或「這樣做有什麼意義？」。到了審查階段，委員們也會問「你們的『素養』可有操作型定義？」或「審查的規準是什麼？」。有委員認為學生

必須經過自我探索才能產生素養，也有委員堅持，教材必須有生活情境中的應用，才堪稱素養導向。

經過 18 個月的實作，與過程中不斷的反思，我們仍然不敢肯定地回答上述問題。但為了實際解決問題，我們畢竟歸納了一些想法。本節將以三個層次，說明我們研製素養導向之數學教材所採取的方針與依據。

一、文化層次

我們做的既然是臺灣的課程，而不是歐盟或美國的，則須反應我國之教育傳統中固有的文化價值。我國對於教育的傳統看法，不容易完全接納徹底的實用主義。「素養」一詞，除了對應 Competency 或 Literacy 之外，望文生義還有「素質」和「修養」的含意。進一步說，我國社會期望受教育者能擁有文化的素質以及道德或智慧上的修養。教育當然有其經濟價值，但是在我們的文化裡，教育不純然是經濟活動。

已經有學者指出，歐洲的各種文件裡所說的 Competency 或 Literacy 也超出了它們的一般字面含意。我們不在這個課題上多做推敲，只想指出，即使實用主義也只能呼籲著重於實用而不能捨棄知識。因此，課程中必然有知識內容，只是其取舍的標準應該以實際需要為準。但是培育「素養」的內容取舍，不能全然考量職業上的需求，還要考量文化上的需求。

舉例而言，虛數 i 對大多數人來說大概是最不可能「實」用的課題了。但是，獲得美國東尼「最佳劇本」獎的《Proof》（臺灣綠光劇團譯作《證明我愛你》）或者獲得日本讀賣文學獎且搬上大螢幕的小說《博士熱愛的算式》，都在故事裡寫進了 i ，它也在許多文化或文明的作品中出現。所以，為了培育學生的素養，數學課程應該讓學生有機會認識 i 。當然這個理由不能無限上綱，在素養層次認識 i ，並不等於要熟練它的四則運算，更不等於要解多項式的共軛虛根。所以，後者不宜在共同必修的課程中出現。

在國小、國中階段，可能沒有太多因為文化素養而引入數學課題的機會，但是在高中就比較多了。這裡指的並不是教材邊框圖文並茂的數學家「花絮」，而是真正學習的內容。我們認為，在教材前端用來引起動機或題綱契領的故事，不一定要是生活情境或者如小說般編造的情節；歷史事件，或者對學生的認知能力而言可理解的傳說故事，都可以寫進教材。在本計畫的作品中，普高的一支「二維數據之迴歸直線」教學模組，便是以提出「迴歸」詮釋的真實事件，當作引進迴歸直線與相關係數的動機。而國中組的一支「指數」模組，則是以坊間常有機會聽到的傳說故事（也許是一種寓言）開場。

二、教學層次

此處的教學是指教學法 (pedagogy)。前面說到素養導向的教材包括「知道」和「能做」兩個向度，而且皆應以「實用」作為判斷的規準；只是這「實用」的實不限於物質世界的真實（亦即生活或就業所需），還包括人類創造的符號世界

的真實（亦即文化或文明）。雖然上述看法有助於我們抉擇教學內容的題材與深度，卻沒有對教學提出建議。在這個問題上，我們發現林福來等人 (2013, p.31) 在數學領綱前導研究報告裡提出的「知、識、行」數學素養培育架構（如圖一），仍然非常值得借鑑。



圖一 數學素養的課程架構圖

「知」和「行」的意思比較單純，就是前面說過的「知道」和「能做」兩個向度，分別對應英文 to know 和 can do 的意思。「識」的意思則比較微妙，它是關於理解和連結的後設認知、以及對數學價值的賞識態度。它對應英文的最基本意思是 to understand（理解），但是這個字還有 make sense of（使產生意義）、be aware of（意識到）和 have an insight（洞察）的意思。「識」是指對於數學的內在認知與情意涵養，包括「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等問題的理解。

我們期許「素養導向」的數學教材，能帶給學生和教師容易有「識」的學習材料或活動。

當然它仍然是個概念而不是一個方法。根據客觀條件的支持或限制，教師有許多熟知的方法，都有濟於「識」。編故事讓學生覺得數學有趣、設計例題讓學生相信數學有用、讓學生互助合作討論數學的真相、在探索活動中引導學生自行發現數學、甚至動用五色聲光讓學生受到數學之美的感召，都是可選用的方法。而且，我們認為這些教法，當它們有效的時候，都是因為它讓學生有「識」於數學了。當然，如果老師能憑一張嘴一支筆就讓學生「識」，效果也是一樣。

所以我們認為素養之導向與否，並不限於教法，而在是否在知道與能做之外，還能識。而識的媒介與深度，仍然以前面所說的實用為依歸，同時要在學生能知的範圍裡面進行。例如對小學生講故事，最好能在兒童的生活經驗或者童話故事的範圍裡，但是對中學生，歷史故事、暢銷小說、電玩情景、可解釋清楚的專業環境，應該都能作為題材。

以「比」為例。在研製教材的準備階段，國小、國中、普高和技高的老師們

有非常俱啟發性的討論，綜合簡述於此。為什麼規定「比」中的任一項不得為0？一則為了避免計算比值時出現零分母，二則 $a:0=b:0$ 對任意非零的數都成立，是個無意義的問題。但是 $a:0=0:b$ 就不成立，可見有0在內的比也不全是無意義的。可是，如果限制比之內不得有0，那麼「比」這個工具比「分數」還有什麼優勢呢？既然沒有優勢又為什麼要學它？難道只是因為寫成橫式比分數簡單嗎？當我們考慮三連比，准許其中有0就不是無聊問題了，而且三連比沒有（整體的）比值，不必管零分母。那又可是，三個數的比例問題，還是可以用「比」來解決，只是多一兩個步驟而已，就算寫成三連比，解題的時候還是有那些步驟，還更容易算錯。所以為什麼要學習三連比？如果要討論兩個直線方程式的圖形是否平行或重疊，用其係數的三連比就方便了。這個觀念，將來還可以發展到向量的平行或相等。這時候，任一項是0都沒關係了，而且很好用。到高中還可以用四連比討論平面方程式的平行或重疊。可是國一學生就學三連比了，他們學得很辛苦又還不能用它來處理直線的平行判斷。所以，在小學，比裡面到底可不可以有0呢？

以上的討論，都是關於「為什麼」和「有什麼意義」的問題。參與討論的人，都是既「知道」比又「能做」比的計算的人，卻未必「識」得比。這一天的討論，不但協助小學團隊擬定了她們的「比」教材主題，還間接促成課綱把「連比」從7年級延後到9年級。這樣的牽動，也是數學領綱致力於「素養」的例證之一。

另一個類似的啟發性討論，發生在第二梯次國中團隊想要寫「三角比」的時候。老師們一直找不到在國中階段學習正弦的意義。在討論中，我們發現所有想到的待答問題，都可以用相似形來解決。於是，我們發現三角比的意義真的在於方便，就好像查閱九九乘法表來做乘法一樣。所以，國中團隊獲得結論，教材的設計必須讓學生產生「這樣做真方便」的意義感。而且，這一輪的討論（事實上花掉兩次聚會的時間），讓我們大家都更清楚認識了三角測量，而間接影響高中數學課綱在三角課題的課程設計。

我們後來發現，德國的一套 Mathematik Neue Wege 教科書（數學新道），在7年級的時候就以相似形原理處理了三角測量問題（估算而不求數學解），到了9年級學習三角比之後，把幾乎一樣的習題再做了一遍（Lergenmüller, 2006）。我們討論出來的課程設計方式，跟這套德國教科書的處理方式是一樣的，可是受到課綱的限制而不能比照處理。

三、課程層次

十二年國教的「素養」主張，有別於九年一貫的「能力指標」。然而不論 Competency 還是 Literacy 基本上都是指能力，歐洲的相關文件也都以「能做」的語句來描述這些能力。因此「能力指標」或許比「素養」更接近歐洲相關文件的原文。然而，前面已經一再說明，我國的素養觀念應該更寬於能力概念。在這個觀點之下，十二年國教課程的核心素養主軸，並不是九年一貫課程的能力指標主軸的改弦易轍，而是臺灣依照自己的教育傳統與價值觀，將西方的教育實用主

義作品，先轉譯成能力指標，再進一步本土化成素養。

本研究既然要從官方課程研製書面課程，所謂素養的導向當然應該呼應十二年國教數學領綱的設計。前面說過本計畫讓三個學習階段、四種類型學校的數學同仁聚在一起工作，還挑選了研議課綱的同仁予以配合，而且數學領綱也在總綱的整體規劃之下，以素養為設計的主軸。從一開始，本團隊的各組教師同仁，就知道自己負著實驗課綱中較新課題的使命。

這一份數學領綱實踐其整體素養目標的方式之一，就是更精緻地銜接前後學習階段，釐清了许多數學概念的發展脈絡，讓它們從小學到中學有著清晰的軌跡。這也就是素養導向的數學教材試圖實踐的一個理念：讓教師更清晰地明白，自己負責的這一段課程，並不是孤立的點，而是在整個數學的學習脈絡中有其意義和目的。教師的清晰概念，應該有助於學生在合理而平順的課程中學習與成長。

前面已經舉過「比」從小學成長到高中的例子，而國中生必須初識「三角比」的理由也在於為普高和技高拉出一條有效的學習脈絡。國小團隊的第二份作品採取空間中的平行面與垂直面為主題，也是國中、普高和技高亟需的前置學習。「前導研究」即曾指出我國課綱在空間概念的學習上欠缺脈絡，十二年國教已經盡可能彌補斷裂的空間概念課程，國小和技高團隊的第二份作品，都做空間課題，他們遙相對話前後呼應，讓我們看到一副新氣象。

高中團隊在第二梯次的兩份作品，也都致力於協助課綱的調整而提供教材原型。一組因應排列組合課題的再度縮減，研製一份短時間可達成學習目標的新式排列組合教材。另一組回應新課綱呼籲以線性組合的觀點統整向量、方程組和矩陣的學習，重新設計一份線性變換的教材。

以上，就是我們認為素養導向教材在課程層次的任務：揭露課綱整理設計裡的素養目標，並落實在一個學習的段落裡。

伍、實作之教學模組

前一節描述了我們研製「素養導向」數學教材（教學模組）所秉持的原則，此節即簡述按照上述原則與程序而開發的成果。本計畫在第一梯次共完成國小、國中、普高和技高各一單元的教學模組，第二梯次則有以上各學習階段共六單元的模組在研製中。限於篇幅，本文只簡介國小、國中階段的四份作品。

一、比與比值：六年級

本單元的教學目標為認識比與比值的意義與表示法、相等的比、最簡單整數比，並解決生活中有關比的問題。依據教學目標，單元課程劃分為兩大主題。主題一為透過果凍製作認識「比與比值」；主題二藉由竿影的測量進行「比與比值的應用」。不同於以往教科書單向式傳輸知識，本教材以動手操作活動循序引導學生瞭解比與比值的意義，並產生使用的需求。

主題一的教學從觀察果凍成品的差異開始，在學生探討果凍成品差異的過程中，引導學生思考水、果凍粉的量與果凍口感的關係。當學生察覺水與果凍粉的

不變關係後,再逐步介紹比的表示方式、比值的意義,並安排情境討論前項、後項的關係,而後進入相等的比的探討,希望能在環環相扣的情境問題中,建立「比與比值」的概念。主題二結合自然領域以及數學歷史故事,探討竿長與影長的關係,並運用比與比值的概念,推測出大樹、旗竿甚至金字塔等不易實測的物品高度。主題二很明顯是一種測量問題,它將要延伸到國中的學習主題。

為使學生建構比、比值、相等的比三者間的緊密關係,本活動採單一情境(果凍製作)進行教學與討論。待學生概念建立後,編寫教師加入擴散性思考的問話,引導學生連結與擴充相關的概念,並在附件中提供各種不同情境、不同數字難度的問題,讓學生做延伸學習。同時,教師手冊放入素養試題,供教學者依教學時數及學生學習情形,斟酌使用,加深加廣比與比值的概念。

這份作品已經完成,學生手冊之一個圖例如圖二。



圖二 六年級比與比值教材的學生手冊一隅

二、正方體與長方體(空間): 五年級

這份作品還在發展中,其目的是為新課綱在空間中兩面的垂直與平行概念發展實驗教材。十二年國教數學課綱的研訂參考林福來(2013)等人的建議,在課程安排上於小學、國中、高中職階段逐年發展空間概念,在課程中形成一條清楚的脈絡。在教學上,林福來等人建議在教室、學校或當地生活環境中,列舉可以運用的空間概念範例,並順應學生的認知發展,準備必要的實體、透明片、軟體教具為學生搭建空間學習的鷹架。

基於上述的理念與建議,在小學階段的教學模組藉由探討長方體與正方體其構成要素,讓學生認識空間中線與面的關係;考量視圖在教材中的必要性,加入了「認識視圖」的活動。單元教材首先在活動一鋪陳產品包裝盒設計的競賽情境,引導學生透過紙盒的製作,認識長方體與正方體的構成要素、面與面的垂直平行關係、透視圖與視圖。為了讓學生對「正方體」和「長方體」的特性有進一步的體驗,教學模組提供一張張的圖卡供學生黏貼組合。在組合過程中,學生需考量面的大小、面的形狀、不同大小的面所需的個數...等。接著引導學生討論與歸納正方體與長方體的構成要素,同時,引入梯形柱與正方體長方體做比較,凸顯正方體與長方體面與面的垂直平行關係。期望學生在組合的過程中,能理解長方體

與正方體的構成要素及面與面的垂直平行關係。由於本單元以操作活動為主，教學變數極大，因此，撰寫教師提供相關教具、準備建議，及教師後續追問於教師手冊之中。

活動二為探索展開圖（三年級），用以整合與檢驗活動一「製作紙盒」的相關知識。首先，讓學生回顧活動一製作紙盒的過程，引出使用展開圖的需求：一體成形、方便組合。接著，在檢驗鋪排的圖形是否為長方體展開圖時需使用活動一習得的知識，例如：由三組全等的面組成的長方體，其全等的面互為對面、六個全等的長方形無法組成長方體、組合時相鄰兩個面的邊必須等長…等。而後，根據提供的產品設計適當大小的紙盒，此時，學生需對產品實物進行測量，並決定每一個面的大小，完成展開圖的設計。

活動三帶領學生認識正方體與長方體的視圖。首先鋪陳需求情境：一個包裝盒設計完成了，如何告訴別人這個盒子的大小、形狀呢？讓學生透過不同角度的描繪，引出數學對視圖的詮釋，而後因著溝通的需求，引出標註長、寬、高的數據，完成成品設計。

學生透過實際製作正方體或長方體，在感官上透過它們具體認識兩面的垂直與平行，再以它們為認知的基礎（或典型），也可以說是以它們為測量的工具，在生活（校園）環境中找出垂直或平行的面，並予以測量確認。教師並帶領學生注意到空間形體的「透視圖」和「示意圖」之間的差異。教材初稿中展現的長方體透視圖如圖三。



圖三 五年級空間觀念教材中的實際透視圖

三、指數律：七年級

由於數學素養的培養著重在學生能把日常生活問題轉換成數學問題求解，再把解答應用於日常生活情境，因此單元編寫老師希望透過與生活經驗的連結，以許多人熟悉在棋盤格子上放米粒的故事，引導學生協助國王解決紀錄的問題，進而發現次方的意義。藉由學生熟悉的十進位的位值與位名，在個、十、百、千、萬、億及兆的理解基礎下，進行以 10 為底數的乘法、除法運算，發現同底數的相乘或相除的指數律。最後，透過計算機的使用，讓學生認識科學記號；並藉由前面學到的指數律，用以比較數字大小。

本單元的設計與傳統教材不同之處，在於以國王的棋盤故事脈絡貫串整個課程（如圖四），第一節與最後一節都是在討論米粒數的計算（以 2 為底數）。並不多做代數符號的計算或記錄，而是引導學生自行探索與發現，再由教師說明。 a^n

的意義，限制在指數 n 為自然數，底數 a 為正數。以往部分教材會將指數律與科學記號分在不同的單元教授，但是由於教材限制指數 n 為自然數，並引進計算機，因而可結合很大的數用科學記號表示，讓學生藉由以 2、10 為底數間不同的轉換來做大小的估算比較。最後，將棋盤故事收尾的時候，教師安排了非常實際的問題：那些米，將會有多重？台灣要花費幾年的時間才能生產出來？



圖四 七年級指數教材中的國王棋盤

四、直角三角比：九年級

十二年國教數學課程重新引入直角三角比單元，為高中職的三角函數的學習奠立基礎。十二年國教課程綱要的安排注重學習的層次性，從直觀的學習開始，逐步進到抽象的層次。在規畫指數、對數、三角等學習內容時，先從數的觀點出發，之後才切入函數的概念 (教育部，2015)。故國中階段的三角函數學習由直角三角形的兩邊比值概念切入稱為「三角比」，符合三角學的發展歷史，做為高中三角函數學習的重要銜接點 (楊孝斌，2012)。

這份作品還在發展中，其目的是為新課綱在空間中兩面的垂直與平行概念發展實驗教材。基於前述的理念，本單元教材從生活的角度出發，透過自行車社群網站上對於坡度的討論來引入正切 (tangent) 概念，使用角度或邊長比值來描述坡度的問題；運用方格紙繪圖來討論 75%、7.5%、75 度等不同的坡度描述，比較不同的直角三角形有多陡，並提供任務讓學生練習畫直角三角形去計算坡度，和固定坡度的直角三角形來測量斜邊上升的角度，幫助學生從中察覺角度與坡度的對應。接著讓學生觀察兩個大小不同，但是坡度相同 (75%) 的直角三角形，來發現其間的不變性。讓學生利用三角形相似性質來指出兩股間的比值相等，最後才引入 $\tan A$ 符號來表示坡度，並做相關的應用與討論。

在學習 $\sin A$ 與 $\cos A$ 概念時，同樣透過測量與比較發現其直角三角比的性質，並練習特定邊長或角度的直角三角形來計算直角三角比，進而察覺 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的關係。最後，透過查表或使用計算機討論不同角度與直角三角比的關係變化及限制，並提供適當的任務來讓學生透過直角三角比來解決簡單的生活問題(油漆工與溜滑梯設計師的難題)。

簡而言之，本單元教材試著透過不同的任務，如操作測量、計算比較、運算推理、實際解決問題等活動，讓學習者逐步發展直角三角比的概念，角度改變時三角比的變化，並能處理相關的生活應用問題。

陸、結論與建議

國家教育研究院為十二年國教的課程綱要及其實施之配套措施，設想並執行許多方案，本計畫是國教院宏圖中的一小片拼圖。我們支持這種務實的作為——這或許也反應了教育實用主義的精神——而且也有幸參與其中。本文根據數學教材原型計畫團隊在過去一年半裡的工作經驗，歸納重要的流程與省思，在此做成報告，盼對相關各界具有參考價值。關於數學素養之「知識行」架構的內涵以及操作型定義，我們力有未逮，還需要同仁們的指教與協助。但是就我們已經完成的實驗教材而言，可以算是為上述理念提出了一批最基本的參考樣式。

我們認為教材與教學模組的研製，是價值很高的工作。十二年國教數學領綱做了許多細節的修訂或調整，在教學的目標上也有微妙的修訂建議。凡此種種的改變，在課綱條文中無法說得非常精確，而且，不論在原則層次做再多的說明，也比不上一份教學模組來得具體。事實上，相對而言，技高和普高的數學領綱在內涵上的改變是相當巨大的，本文限於篇幅並沒有深入探討。希望這份研究的經驗，可以流傳到教科書的作者、編輯與出版界同仁，以便擴大參與的人力資源(對於這些人的特質需求，可以用 Competences 來描述)，並且讓各版本教科書在本身的特色之外，適度地調整到素養的大方向上。

柒、參考文獻

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。

林碧珍、蔡文煥 (2006)。TIMSS 2003 國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。載於張秋男 (主編)，TIMSS 2003 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告 (123-161 頁)。臺北市：國立台灣師範大學科學教育研究中心。

林福來、單維彰、李源順、鄭章華 (2013)。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究「整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告 (編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12)。新北市：國家教育研究院。

- 洪裕宏 (2008)。界定與選擇國民核心素養:概念參考架構與理論基礎研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(NSC 95-2511-S-010-001)。臺北市: 國立陽明大學。
- 徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。《科學教育學刊》，21(1)，25-48。
- 張芬芬、陳麗華、楊國揚 (2010)。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應，*教科書研究*，3(1)，1-40。
- 翁穎哲、譚克平(2008)。設計研究法簡介及其在教育研究的應用範例。《科學教育月刊》，307，15-30。
- 教育部 (2005)。普通高級中學課程暫行綱要。臺北市：作者。
- 教育部 (2013)。教育部提升國民素養專案計畫報告書。臺北市：作者。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北市：作者。
- 教育部 (2015)。十二年國民基本教育數學課程綱要草案。取自：
<http://12basic-forum.naer.edu.tw/?q=node/70>
- 國家教育研究院 (2014)。十二年國民基本教育課程發展指引。新北市：作者。
- 楊孝斌 (2012)。三角學的歷史對任意角三角函數的教學啟示。《數學傳播》，36(3)，86-96。
- 蔡清田、陳延興 (2013)。國民核心素養之課程轉化。《課程與教學季刊》，16(3)，59-78。
- Council of Europe (2001). *Common European Framework of Reference for Languages: Learning, teaching, assessment*. Cambridge University Press.
- Department for Education (2013). *The national curriculum in England: Framework document*. Retrieved 2013.11.18, from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254336/MASTER_final_national_curriculum_11_9_13_2.pdf
- European Commission. (2007). *Key competences for lifelong learning: European reference work*. Belgium: Author. 取自 <http://www.alfa-trall.eu/wp-content/uploads/2012/01/EU2007-keyCompetencesL3-brochure.pdf>
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Learning study: A Japanese approaches to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lergenmüller (2006) *Mathematik Neue Wege 7*, Schroedel Verlag.

OECD (2005). *The definition and selection of key competencies*. Paris: Author.

OECD (2013). *PISA 2015 draft mathematics framework*, OECD Publishing. 取自
<http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf>

Rychen, D.S. & Salganik, L.H. (Eds.). (2003). *Key competencies for a successful life and a well functioning society*. Cambridge, MA: Hogrefe & Huber.