

中學數學教育的半世紀回顧及其啟示

單維彰

中央大學師資培育中心與數學系

摘要

本文舉證數學教育前賢，在半世紀前就自發提出素養觀念，而開始形塑我國的數學教育理想。闡述我國數學教育之素養理念的傳承脈絡之後，說明十二年國教「素養導向」的課程理念，可以詮釋為數學教育探索「理想」數學課程的持續努力。但是數學教育並非以不變回應素養課程的理念，而是在脈絡之中傳承現況而做調整。第參節綜合整理影響我國數學課程的五項理念，並依這些項目提出立足於現有理念與特徵之上的反思。在探討了跨世代的變與不變之後，作者所受的啟示有二，一是對歷史的檢視與省思，有機會看清課程發展中曾經落入某理念之極端而又試圖予以平衡的歷程，而這個謀求中庸之道的歷程，則可能提供我們繼續探索理想課程的一條進路；二是數學教育學者在引入先進國家之理念時，亦應關注於本國問題特徵的研究。

關鍵詞：數學素養、數學課程。

A reflection on the secondary math education for the last half-century

Abstract

This article shows that the mathematics educators in Taiwan came up with the idea of mathematical literacy and the ideal curriculum for mathematical education since half an century ago. Once the context of Taiwan's native ideology of mathematical literacy is understood, the current movement of the literacy- or competency-oriented curriculum of 12-year basic education policy can be interpreted as an continuation of the pursuit for the ideal mathematics curriculum over the past 50 years. However, it does not mean that mathematics educators today do not respond for the new movement; it means that they modify the endeavours along the traditional approach. Five important issues that affected Taiwan's mathematics education are raised in section three, and the author reflected the issues basing on the current beliefs of an ideal mathematics education. The author concludes with what he learned in this study. First, a historical review of curricular developments can show us a way to a better way of curriculum design. Secondly, researchers in Taiwan could have paid more attention on our own problems.

Key Words: Mathematical Literacy, mathematics curriculum.

壹、前言

半個世紀前的民國 57 年，九年國民義務教育在很短的準備期之後，毅然實施。這項行政決策，無疑是臺灣教育發展史的里程碑，在教育上自有深遠的意義與價值，包括當時社會立即有感的小學生升學壓力與惡補問題（臺灣新生報，1962）的立即解除，以及初級中等教育（或稱國中階段教育）的課程設計理念，從少數學生的菁英教育轉換成全體國民的基礎教育。就數學科（或謂數學領域）而言，那一年的劃時代變革之一，就是小學階段的學科名稱，從「算術」改成了「數學」。水心教授寫在當年的一句話，簡潔地說明了何有此名稱改變的理由：

由於數學知識本身之急遽增加，因而對於現代公民應有的**素養**，提出了比以前更大的要求。（水心，1968：160）

以上的時代性見解，當然也影響了中等學校的數學課程理念。而且，半世紀前的這一段文字，已經為我國的數學教育揭開了「素養」理念的序幕。

本文先以一節闡述我國數學教育之素養理念的傳承脈絡，意圖說明此一「理想」歷久彌新，這一波十二年國教「素養導向」的課程理念，可以詮釋為數學教育探索「理想」數學課程（包含教材、教法與評量）的持續努力。第參節綜合簡述影響我國數學課程的一些理念，並針對素養導向課程提出立足於現有理念與特徵之上的轉銜建議。在探討了這些變與不變之後，最後一節以作者所受的啟示作為結論。

貳、數學教育的素養理念脈絡

統計圖表在民國 61 年首度進入我國的中學課程（國中二年級），陳冒海教授詮釋其意義為：「統計圖表之判讀則是針對國民應有數學素養而設計的。」（陳冒海，1989：170）民國 72 年公告的高中數學課程標準，則明確指出三方面的課程目標：「素養方面、訓練方面、應用方面」，其中數學素養被解釋為「了解數學的一般內容、方法與意義」（教育部，1983：119）。¹

以上文獻顯示，我國在國小、國中、高中階段的數學教育工作者，很早就自發提出了素養的理念。當時的「素養」還未發展成專門化的教育術語，從中文的

¹ 這一句引文之中的「了解」，包含了數學的意義，所以應該不是指記憶、了解、應用...之觀點下的初級認知層次，而是當年的學者們習慣使用的一般性動詞。

普通用法來解釋，它是相對於專業人士的專門化特殊知識技能而言的概念，意指一般人平常就應具備的普通性基礎知識，就好像基本的讀、寫、算一樣。當年所謂的「素養」很可能尚未包含「態度」的意涵。

在數學教育的領域裡，「素養」是因為受到國際學生能力評量計畫（PISA：Programme for International Student Assessment）的影響，才逐漸從普通語文的意涵轉移到專門化的教育詞彙，應該是國內相關學者的共識（李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏，2013），而延續 PISA 的評量理念，數學素養成為 Mathematical Literacy 的對應詞彙（單維彰，2016a）。就學習內容而言，它指涉關於數與量、空間與形體、關係與變化、數據資料與不確定性的基本知識和技能；就學習表現而言，李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏執行國民素養研究的結論，是很好的簡要描述：

[數學素養是]個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。（教育部，2013：19）

前面講述的素養，看似都是指涉學習內容和學習表現方面的意涵，但其實素養一詞也蘊含學習過程的意思。例如北宋時期的《童蒙訓》解釋素養為「非一朝一夕所能為，蓋在平日之所養也」²，意指相對於短期密集的訓練，素養是長期沈浸在理想環境中教育。所以，素養也蘊含著對於理想教學法的期許。數學教育學者對於數學素養的養成，也確實具有幾乎一致的看法，簡約地一言以蔽之，就是：有意義（Meaningful）的學習。例如水心在民國 51 年闡述「有意義的算術」如下：

安排一個適當的社會情境，讓兒童在這情境裡發現了需要解決的數量問題，和解決這問題所必需的新的算術技術和能力。… 讓兒童從實際經驗中，去歸納算術的重要觀念—包括數字系統本身的，和適合社會應用的兩者。（水心，1962：123）

² 《童蒙訓》為歷經北宋、南宋時期的呂本中所著，大約成書於西元 1140 年（南宋紹興十年）。此語出於卷下「立節非素養不能」的解釋。

這一番話已經提出情境的運用，也相當於跟李國偉等人同樣地指出了「辨識問題與數學的關聯」。而且水心的闡述也幾乎指明了，有意義的數學教育，包括對於數學本身的意義的理解，以及對於數學作為供應社會所需的實用價值的體認。

再看呂溪木教授回顧民國 72 年版高中數學課程的理念，同樣也是「有意義」教學的主張；雖然文字當中沒有明說「情境」，但是同樣強調經驗的連結與問題的觀察（辨識），如下：

教材中… [不該] 發現突如其來的定義、公設或定理，無法理解而必須死記的內容 … [應該] 在提出一個數學概念或名詞之前，必先提出一個學生經驗所及的實際問題加以觀察，並討論解決問題的有效方法，最後將整個過程所牽涉到的數學概念與方法抽象出來成為定義或定理。… [讓] 學生… 對於問題的來龍去脈以及解決的過程都有充分的理解。（呂溪木，2007：64）

這段引文專注於理想的數學課程應該捨邏輯的進路 (Logical Approach) 而取有感的進路 (Sensible Approach)，所以沒有明確顧及應用的面向。可是如前述，72 年版的高中數學課程標準，已經將「應用方面」列為課程設計的三大目標之一，可見當年數學課程的理念，也相當重視數學的應用。

前代課程標準跟如今十二年國教課程綱要的差異之一，是過去的課程標準文件並不敘寫教學法，所以我們在課程文件裡看不到教學法，只能從主事者另外發表的闡述中，領略當時課程的理想教學。如今的課綱則明白陳述教學法的主張，是故「素養導向」的教材、教法、評量，都成為探討當今數學課程的關鍵詞。本文企圖說明，半個世紀以來的數學教育，一直存有素養內容與表現的理念，對於素養的養成方法，也一直存有理想的典型，就是有意義的學習經驗，而它又同時包含數學本身的意義，以及數學的實用價值。

由本節的闡述，可知如今所謂「素養導向」的數學課程，是數學「理想」課程一脈相承而發展至今的現況。教育事業的終極成就是社會中「人心」的群體改變，此事談何容易，而且它在本質上不能（也不宜）發生劇烈的革命，所以理想的數學課程雖然已經歷時半個世紀，卻還在持續的探索、嘗試與調整當中。在這一波「素養導向」課程興革的趨勢中，數學課程既不是保持不變，也毋須大幅改

變，而是繼續朝著固有理想課程的大方向繼續努力，並且檢討現行的作法而做適度的調整。

參、現行的特徵與素養導向的調整

本節回顧過去半個世紀以來，對臺灣中學數學教育發生深刻影響的自身傳統以及外國理念，並提出因應數學素養觀念而做出調整的建議方向。

一、數學的精熟練習觀

這是行為主義心理學的典型理論，此觀點認為算術教學的目的，無非就是快速而正確地計算。搭配「編序教學」的想法，他們把算術的學習拆解成很小片段而不相關連的孤立練習，方便學生反覆練習而各個擊破，也方便教師做精確的效標評量。這種把知識和技能當作像物質一樣可以分解成分子、原子，以及把人當作像機械一樣反覆精確執行任務的想法（水心，1968），如今已經不再獲得認同。儘管如此，精熟練習的數學教學觀，仍然以兩種相反的方式影響我國的數學教育：一種方式是遺緒難清，而另一種方式卻是矯枉過正。

（一）計算能力的執著

精熟練習的教學觀，不完全來自西方理論，同時也受到我國傳統文化的影響。我們的文化普遍相信勤能補拙，也就是重視勤奮練習的功效，而輕視天分或性向的影響；而且，社會上推崇博聞強記與快速心算的特殊能力，認為這些行為是聰明甚至智慧的表現。這樣的價值觀，導致我國相當執著於所謂的「計算能力」；事實上，整個東亞文化，包括中國、日本、韓國，同樣都有此執著。這種執著導致的數學教育現象，就是不許學生使用電子計算機，擔心因此而減損了國民的計算能力；本文所稱的「計算機」是指功能相當於掌上型計算器（Calculator）的機器，其實際的形式不拘，可能是電腦軟體，也可能是智慧型手機的應用工具（App）。

計算能力的追求，過去是由小學數學課程的「珠算」來完成；有趣的是，同樣是使用工具，國人的價值觀可以接受算盤，卻不接受計算機。討論民國 64 年版國小數學課程標準時，黃敏晃教授就認為算盤會被計算機取代，所以應該取消珠算課程，這項提議從民國 82 年起正式生效（游自達、陳淑娟，2016）。可是，在算盤退出數學課程的同時，計算機並沒有進入課程。結果是，小學生失去了基本的計算工具，中學階段越來越複雜的計算需求，也沒有引進任何工具。事實上，

中學數學需要處理的數值，包括平方根（例如 $\sqrt{17}$ ）、指對數（例如 $\log 1.7$ ）、三角比（例如 $\sin 17^\circ$ ）等，根本就不是「計算」的結果，而是「查表」的結果。使用計算機獲得它們的估計值，用到的並不是計算功能，而是記憶功能，根本和一個人的計算能力無關。

韓國、日本和我國一樣，雖然都是電子消費商品的生產大國，卻在數學教育上同樣排斥計算機。因為數學素養包括使用適當計算與資訊工具的能力，而且為了切實準備未來生活之所需，素養導向的數學教育沒有道理不培育學生使用計算機的能力，更何況計算機也可以作為提高數學學習成效的工具。因此，我國的新課綱從七年級起，將計算機融入數學課程，要求數學的教材和評量包含計算機的使用（教育部，2018）。韓國與我國類似，在其教育部 2015 年公告的數學課程綱要裡，列舉五大工作方針，包括「建構富含科技工具的數學課程」。³日本直到現在仍然拒絕計算機進入數學的教學與評量。

（二）熟練與流暢的忽視

對於行為主義精熟論的反動，卻可能失之矯枉過正，反而導致數學教育太忽視精熟操作的功效了。這個現象在民國 80 年代，數學教育的（激進）建構主義時期，特別明顯：認為數學唯重理解，計算可以全部交給機器，所以只要能理解算式即可，不必熟練地心算或筆算。

素養的理念重視核心與根本，包括基本操作能力在內。操作的熟練是思考流暢性的前提，而流暢性又被認為是創造力的基本元素。韓國、新加坡和我國一樣以「素養」當作數學教育的綱領，而韓國和新加坡也都同時強調依然注重數學的基本操作能力（Lee, 2018；Kaur, 2018），我國也是如此。此外，美國的《各州共同數學課程核心標準》（CCSS-Math: Common Core State Standards for Mathematics）的關鍵典範轉移（Key Shifts）也呼應前述觀點。CCSS 三大項教學典範轉移的「嚴謹」（Rigor），就是意指紮實的數學知識，熟練的程序執行，外加典型應用。其簡短說明如下：⁴

³ 作者由英文 to build technology-rich math lessons 翻譯而來，英文出現在 K.H. Lee 教授的演講投影片（Lee, 2018）。

⁴ 原文是 Rigor refers to deep, authentic command of mathematical concepts, not making math harder or introducing topics at earlier grades. To help students meet the standards, educators will need to pursue, with equal intensity, three aspects of rigor in the major work of each grade: conceptual understanding,

嚴謹意指深刻且有效地掌握數學觀念，而非提高難度或提前進度。為協助學生達成《標準》，施教者應在各年級的主要課題上，以同樣的力道追求嚴謹的三個面向：概念的理解，執行程序的技能與流暢性，和應用。(CCSS Initiative, 2016: 官方網頁)

二、數學意義的教學堅持

著重數學本身之意義的教學觀，可能來自於美國數學教師協會(NCTM)的第10本年鑑，主張算術是由一些可理解的數量觀念、原理、方法緊密結合而成的系統，不應該將它拆開來學習，而應設計實物(教具)與活動，讓學童自行發現或理解各種觀念與方法的意義和理由，以及它們彼此之間的關係(Brownell, 1935)。在1960年代，此一主張被美國的新數學運動(New Math Movement)推上了高峰，以專業數學的結構來規劃教材，並以培育未來數學家的想像來設計教法。

美國的「新數學」思潮和內容，在民國50年代由一小群留美歸國的新銳數學家引進我國的高中課程，其中李新民教授可謂代表人士。但是它很快就向下延伸到了國中和國小階段的數學課程(游自達、陳淑娟, 2016)。強調數學抽象性原理的新數學，認為數學的威力來自其抽象性，甚至引伸至數學為不可懷疑之真理。雖然新數學運動表面上已經結束，但是它的某些觀念流傳至今，還相當穩固，堪稱臺灣數學教師常有的迷思概念。⁵以下舉出兩個主要的項目。

(一) 誤信數學教材須具備邏輯的嚴格性

數學教師經常以為數學課程的每個主題，必須以嚴格的邏輯銜接，而且在教學上必須先證明才應用。這個信念既不符合教育心理學，也不符合實際現況。舉例而言，幾乎每個國中生都知道二元一次方程式的圖形是直線，而二次函數的圖形是拋物線，可是這兩個事實，在國中並沒有真正證明過；自從民國50年代以降，所謂代數基本定理就一直在高中課程裡，但是課本向來以「此定理之證明超過高中數學範圍，故從略」這樣的文字一筆帶過其證明。可見數學教材從來不如想像得那樣嚴格符合邏輯，但是在教學的實務上卻也不曾遭遇困難。

procedural skills and fluency, and application. 由作者譯為中文。

⁵ 這個觀念來自臺灣數學教育學會理事長謝豐瑞教授，在「生根計畫」2018年成果發表會的演講：「教師以為一定要講清楚，是一個可怕的迷思。」

以數學素養的立場來看，數學的嚴格性的教育價值應該主要放在展現數學思維之特徵上，而且要將數學本位的意義放在其次，首先重要的是學生本位的意義感（Meaningful 或 Sensible）。數學的威力確實來自其抽象性，但這是數學思維方式的特質，而非數學技術的唯一形式，更不是數學教育的必需品。教師對於數學的抽象信念並沒有錯，但是要以兼顧實用性和學生認知發展作為平衡的信念。證明應該用來處理認知發生衝突的情況，否則可能只滿足了教師的心理需求，並沒有教學的意義。例如在適當的探究之後，如果七年級的學生已經理解並確信正整數有唯一的質因數分解方式，而且能夠有效應用它，就不必強加證明。⁶

素養導向的數學課綱，也是根據前述理念，考量學生的認知發展搭配生活或其他學科領域所需，將過去按照數學內部的邏輯性而集結成塊的課程，例如一整章的邏輯與集合、一整章的三角函數，拆解成更多教學層次的螺旋狀課程規劃（單維彰，2016b）。

（二）對於學生理解數學原理的過度堅持

數學當然是重理解的學科（其他學科也不會不重視理解），使學生理解也向來是理想的數學教學，可是「理解」有時候是一個長期漸進的歷程，不一定在第一次學習的當下就能達成，這應該是認知心理學的常識。可惜，有時候老師對於理解的堅持，是站在專家的立場來看學生，不一定是合適的。另一種堅持之害，是固著在常用的傳統表徵上。舉例來說，教師常用天平作為等式的表徵，並以砝碼的增減解釋等量公理的意涵。要知道重量的本質是量而不是數，因此沒有負的觀念，所以導致不宜作為負數表徵的困難。數學裡充滿著這一類的例子，某些表徵僅適合使用在正數的情況，堅持以同樣的表徵推廣到抽象的數學物件，例如負數、無理數、虛數，經常只是滿足了教師的成就感，卻不見得有教學的意義。

素養的理念重視生活經驗的連結，也重視使用工具。教師的堅持可能是根據她/他自己的經驗來理解數學，而那經常是文字或符號的方式，卻忽略了學生的生活經驗裡，有更多的圖像與動畫，甚至互動的遊戲。如果善用學生的生活經驗中的動畫或遊戲，前述等量公理的教學，可以想像許多新的表徵，而可迴避長度、重量難以作為負數表徵的窘境。

⁶ 這個觀念來自民國 99 年版高中數學課程綱要召集人陳宜良教授，在 2010 年宣導課綱理念的演講：「當全班同學都認為某個數學觀念是對的，而且它的確是對的，就不一定要證明它。」

總之，理想的數學教學，應該從數學之意義的關注，轉移到學生之意義感的關懷。這是素養導向的數學課綱，提出「讓學生有感的學習機會」之理念（教育部，2018），並建議以「知、行、識」作為數學課程架構的用意；後面第五節再述此課程架構。

三、解題為本的數學課程

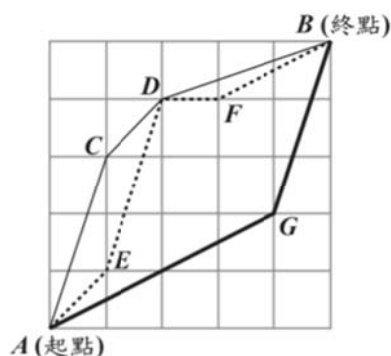
美國在「新數學」運動中的教學實驗，發展出沿著解題的過程而學習數學的教材教法。新數學消散之後，這項教學方法卻被 NCTM 保留下來而繼續推廣（NCTM，1980），⁷稱為「聚焦於解題」的數學課程，經由黃敏晃教授等人熱心地引進臺灣（游自達、陳淑娟，2015），又稱為「數學即解題」或者「解題為本」的數學教法，直到今天仍然是數學教師的主要教學法之一。

在「數學即解題」的脈絡裡，「題」的意思是數學教育專家苦心孤詣創造出來的絕妙好題，使教師能帶領學生從解題過程中達到對應的教學目標。此「題」既不是問題導向學習（PBL: Problem-Based Learning）的問題，也不是素養觀念所指的情境中的實用問題。更可惜的是，這些「題」又常常不知不覺地成為鍛鍊心智的工具，變成了精心設計的難題。這些經年累積的難題，搭配上我國固有的精熟學習觀念，造成某些老師的數學課總是有做不完的習題。

素養導向的教學仍然可以延續「解題為本」的教材教法，只是一方面希望掌握素養之中的核心、根本意涵，不要再反覆練習歷史上累牘連篇的所有題型，而要類似自然領域呼籲的「大概念」（Big Ideas），以核心而根本的概念統貫數學的學習與解題活動，避免僵硬地背誦公式。民國 107 年的數學科國中教育會考，恰好提供了一個典型的例子。參照次頁的圖，題目要比較 A-C-D-B、A-E-D-F-G、A-G-B 三條路徑的長短，須說明理由但是不必算出長度。

面對這個問題，當然可以令正方格的邊長為 1，依序算出路徑的長度： $2\sqrt{10} + \sqrt{2}$ 、 $\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1$ 、 $\sqrt{20} + \sqrt{10}$ ，然後比大小（注意：這份試卷施測時，學生禁止攜帶計算機）。但是此題的要旨僅為兩點間的最短路徑是直線段，還有圖形的全等概念，完全不需計算。舉例而言，因為 \overline{AD} 和 \overline{AG} 同是長、寬為 4、2 的長方形對角線，所以 $\overline{AD} = \overline{AG}$ ，而路徑 A-C-D 是從 A 到 D 的折線路徑，比 \overline{AD} 長，

⁷ 原文是：Problem solving be the focus of school mathematics in the 1980s.



方格盤上三條路線圖。出自 107 年國中教育會考數學科試題本。

所以得知 $\overline{AC} + \overline{CD} > \overline{AG}$ 。這是一道接近常識的數學試題，是用來評量數學素養的理想試題。

另一方面，希望把「解題」轉化為「解決問題」，亦即將「題」的觀念從數學教育專家精心設計的絕妙好題，轉化成融入議題、跨學科領域、在生活、職場、科學與文化情境中具體呈現數學之概念、技術、與思維特質的問題。

四、學生本位的數學教學

在這半個世紀以來，讓學生有機會自己動手、動腦而發現或領悟數學原理的教學方法，一直被認為是理想的數學教學法。這種教學設計的開端，可以追溯到西元 1821 年出版於波士頓的小學教科書《智能算術初步》(First Lessons in Intellectual Arithmetic)，作者 Warren Colburn 稱其特色教法是「引導式教學」(The Inductive Method of Instruction)；後來出現的發現式、啟發式教學法，都可以籠統歸納於學生本位的教學理念 (Larson & Kanold, 2016)。被社會稱為「建構數學」的民國 82 至 92 年間的國小、國中數學課程，可以視為此一教學理念的激進版本。我國的建構數學風潮雖已止息，但是當時的反對者反對的是激進的課程設計，而不是認知心理學在建構論 (劉柏宏, 2004)。

就如同前述新數學運動雖然被歸為失敗，但是它的部分元素，包括教材、教法和課程理念，被保存而實行至今。建構數學的貢獻也不該一筆抹煞。數學教育從建構數學獲得的寶貴經驗之一，是學生的認知發展影響教學成效甚鉅。它讓我們意識到：知識必須由學習者自己建構，而所謂「習得」是將新的知識或技能融入或同化到一個人原本具備的架構之內。

前面已經說過，對學生認知發展的考量，已經部分落實在更加螺旋式的課程綱要設計上。素養教育的理念包括真實的理解和意義的體認，唯有如此才有機會成為素養。這裡要提出的商榷是：難道僅有引導式或發現式的教學，才能達到這個目的嗎？可能並非如此。例如，由奧蘇貝爾（David Ausubel）發起的「有意義學習理論」（Meaningful Learning Theory）同樣源起於皮亞傑的建構論，就提出前導架構（Advance Organizer）來協助學生對學習目標產生意義感，而不贊成獨尊發現式教學法。此理論認為數學的原理不像自然領域的觀察對象，期待學生自行發現數學原理的教材教法，若不是不可靠的，就是難以隨著年齡與學習目標的增長而持續進行的。奧蘇貝爾的理論認為，學生必須在心理上認知所學之知識、技能是「有意義」的，學習才會發生，而教師可以提供前導架構，讓學生將新知識與既有的舊概念聯結成有意義的網絡。

建構數學的前車之鑑，或許是過度地獨尊一術，而它不能符合許多數學教師和數學家的自身經驗。現在，或許值得在建構式的認知理論前提下，兼容學生主動和教師展演這兩大類的教學法，合力達成素養導向的教學。

五、從帶得走的能力到素養

既然素養是指一般人平常就能表現得出來的知識和行為，十二年國教當然繼續注重「帶得走的能力」，而九年一貫雖然以能力指標為撰寫形式，也無意貶損知識內涵。所謂素養，是在知識與能力之外，還關注態度。就中學數學教育而言，對數學的理想態度可以在個人感受的情意面以外，著重在學生心中建立以下意識：

- (1) 數學是「有用」的。
- (2) 數學對科技文明的貢獻良多。
- (3) 對周遭事物或現象多加敏察，很可能發現數學可以協助解決問題。
- (4) 數學是文化表現之一，它影響一個人的思維方式和處世傾向。

十二年國教的數學領綱以「知、行、識」作為課程設計的架構，意即設計教案時，以這三個向度來協助考量一份教案的均衡。此架構以知、行對應素養所謂的知識和能力，以「識」包裹「態度」。在教學中關注「識」的向度，持續而具體地在學生的心中建立前述意識（單維彰，2018）。

肆、變與不變的啟示

我國的現代教育是從西方引進的，至今也才剛滿百年，所以受到歐美影響本是無可厚非的。以數學教育而言，有三次從美國引進新課程的經驗：民國 37 年至 51 年的隨機教算，以及前面談過的新數學和建構數學，三次都以不算歡喜的方式收場（陳梅生，2000）。最近的九年一貫和十二年國教課程，則是從澳洲和歐洲參考而來。可是教育畢竟是國家社會的事務，它必須要回應當地的需求、解決當地的問題。

以下出自常燕生的這番批評，發表於民國 16 年：

教育界...今天這個制，明天那個制，今天這樣教學法，明天那樣教學法...因為崇拜外人投合驚新的心理起見，凡是西洋有一種新制出來，必有人大介紹特介紹，是否於實際情形切合不問也。結果弄得**教育自教育，實際自實際**，兩者渺不相關。（陳正茂，2016：135）

我國的教育變革，是否過於頻繁且缺乏統貫的脈絡？是否切合此時此地此民的需求與價值？確實仍然是值得研究的問題。作者探索近 50 年以來中學數學課程的變與不變之後，獲得以下兩點啟示。

第一，歷史的研究可以獲得課程變革的知識。臺灣的數學教育曾經受到幾波外來理念的吸引，而朝向理想課程發展的脈絡，幾乎就是在各種極端理念之間謀求中庸之道的探索歷程。誠如單文經教授所言：

[謀求中庸的歷程]並不是在相反對的兩造之間求取妥協，也不是『找出一條中間路線』，當然更不是作一些折衷的修補，而是掌握『執兩用中』的精神，斟酌實際的狀況，採取最適宜的辦法。（單文經，2014：108）。

課程的歷史研究，有機會讓我們淬取共同關切的思想，進而解決自己的問題。

第二，數學教育同仁針對本國需求所做的研究，顯得不夠。同仁所做的研究，是為了滿足研究者自己之學術需求的成分多？還是回應我國之學生學習與教師教學需求的成分多？是同仁們需要面對的問題。

參考文獻

- 水心 (1962)。算術教學的重要原則。《國教之友》，12。取自水心 (1979)，《國民教育論叢》，頁 122-124。臺北市：臺灣商務印書館。
- 【Shui, H. (1962). Major principles for teaching arithmetics. *Friends of Elementary Education*, 12. In Shui, H. (1979) *Essays on elementary education*, pp. 122-124. Taipei: The Commercial Press.】
- 水心 (1968)。美國小學算術教學的新實驗。《中國一周》，928。取自水心 (1979)，《國民教育論叢》，頁 160-173。臺北市：臺灣商務印書館。
- 【Shui, H. (1968). New experiments of arithmetics teaching in American elementary schools. *China Weekly*, 928. In Shui, H. (1979) *Essays on elementary education*, pp. 160-173. Taipei: The Commercial Press.】
- 呂溪木 (2007)。民國 75 年之前我國數學課程演變。取自臺灣師範大學科學教育研究所編輯，吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會論文集。臺北市：編者。
- 【Leu, H.-M. (2007). Taiwan's mathematics curricula before 1986. In Graduate Institute of Science Education of National Normal University (ed.) *Proceedings for the conference of science education in honor of the 100th birthday of late Dr. Ta-You Wu's*. Taipei: Editor.】
- 教育部 (1983)。高級中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 【Ministry of Education (1983). *Curriculum standards of senior high schools*. Taipei: Cheng-Chung Book.】
- 教育部 (2013)。教育部提升國民素養專案計畫報告書。臺北市：作者。取自 <http://literacytw.naer.edu.tw/data/cht/20140801/20140801u4v194.pdf>。
- 【Ministry of Education (2013). *Report of the project on improving national literacy*. Taipei: Author. Retrieved from <http://literacytw.naer.edu.tw/data/cht/20140801/20140801u4v194.pdf>.】
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。臺北市：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php>。
- 【Ministry of Education (2018). *Curriculum guidelines for 12-year basic education: Mathematics*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php>.】
- 陳冒海 (1989)。我國國民中學數學課程之發展。《教育資料集刊》，14，157-194。
- 【Chen, M.-H. (1989). Taiwan's mathematics curricula for secondary schools. *Bulletin of Educational Resources and Research*, 14, 157-194.】
- 陳梅生口述，董群廉、陳進金訪談撰稿 (2000)。《陳梅生訪談錄》。新北市：國史館。
- 【Chen, M.-S. (speaker), Tung, L.-C. & Chen, J.-C. (editors) (2000). *Interview with Mei-Sheng Chen*. New Taipei City: Academia Historica.】

陳正茂（編輯）（2016），**被遺忘的學者--常燕生教育政治論文集**。臺北市：獨立作家。

【Chen, C.-M. (ed.) (2016). *Essays on politics and education from a forgotten scholar Chang Yansheng*. Taipei: Independent Author.】

單文經（2014）。教材心理化與邏輯化爭論的平議。《課程與教學季刊》，17(4)，85-112。

【Shan, W.-J. (2014). A Commentary on the Debate of the Psychological and Logical Aspects of Subject Matter. *Curriculum & Instruction Quarterly*, 17(4), 85-112.】

單維彰（2016a）。素養、課程與教材—以數學為例。《教育脈動》，5（電子期刊）。

【Shann, W.-C. (2016a). Literacy, curriculum and teaching materials. *Pulse of Education*, 5. (electrical)】

單維彰（2016b）。**數學教材為支持素養學習所需之解構與重構**。論文發表於國家教育研究院「我們的教育，我們的未來」國際學術研討會，臺北市。未出版。

【Shann, W.-C. (2016b). *The deconstruction and reconstruction of mathematics curriculum in order to support literacy*. Conference on “Our education, our future”, National Academy for Educational Research, New Taipei City. (unpublished)】

單維彰（2018）。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。《臺灣教育評論月刊》，7(2)，101-106。

【Shann, W.-C. (2018). Nurturing literacy by a curriculum construct of knowing, doing and seeing—take mathematics as an example. *Taiwan Educational Review*, 7(2), 101-106.】

游自達、陳淑娟（2015）。**理念演變的機與變：1960-80年代國小數學教科書之課程觀與知識論分析**。論文發表於國家教育研究院主辦之「臺灣中小學教科書知識論與課程觀的演變」論壇，臺北市。未出版。

【Yiu, T.-D. & Chen, S.-J. (2015). *Change and chance of ideology: an analysis of the epistemology and curriculum views in mathematics textbooks for elementary schools from 1960 to 1980*. Forum on “The evolution of the epistemology and curriculum views in Taiwan’s elementary and secondary school textbooks”, National Academy for Educational Research, New Taipei City. (unpublished)】

游自達、陳淑娟（2016）。臺灣解嚴前後國小數學教科書的發展與改變：黃敏晃口述史之分析。收錄於周淑卿、歐用生、楊國揚主編（2016），**臺灣國民中小學教科書課程觀的演變：口述史的研究**（頁 73-122）。新北市：國家教育研究院。

【Yiu, T.-D. & Chen, S.-J. (2016). Developments and changes of mathematics textbooks for elementary schools before and after Taiwan’s martial-law-era: an analysis on the oral historical interview with Huang Min-Huang. In Chou, S.-C., Ou, Y.-S. & Yange, K.-Y. (eds) (2016). *Evolution of the curriculum views in Taiwan’s elementary and secondary school textbooks: the study of oral history*. New Taipei City: National Academy for Educational Research.】

劉柏宏 (2004)。從美國「數學戰爭」看台灣的數學教育。《數學傳播》，28(4)，3-16。

【Liu, P.-H. (2004). A reflection on Taiwan's mathematics education by the Math War of USA. *Mathmedia*, 28(4), 3-16.】

臺灣新生報社主編 (1962)。《兒童升學問題與國民教育》。臺北市：編者。

【Taiwan Shin Sheng Daily News (editor) (1962). *National education and problems concerning placement examinations for pupils*. Taipei: Editor.】

Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. In W. D. Reeve (Ed.), *The teaching of arithmetic* (10th yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics), pp. 1-31. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

CCSS Initiative (2016). *Key Shifts in Mathematics*. Retrieved from www.corestandards.org/other-resources/key-shifts-in-mathematics/

Kaur, F. (2018). *Preparing mathematically literate future ready citizens*. Presented in “The tenth international conference on technology and mathematics education”, Taiwan Association for Mathematics Education and National Taipei University of Education, Taipei. (unpublished)

Larson, M. R. & Kanold, T. D. (2016). *Balancing the equation: A guide to school mathematics for educators and parents*. Bloomington, IN: Solution Tree.

Lee, K.-H. (2018). *Creativity in mathematical literacy education*. Presented in “The tenth international conference on technology and mathematics education”, Taiwan Association for Mathematics Education and National Taipei University of Education, Taipei. (unpublished)

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: NCTM.