FEB 2025
662

科學月刊
SCIENCE MONTHLY

焦點新聞・解開地球能量收支不平衡的關鍵

科學映像・藍紫色與紅棕色羽毛的相互交織—琉球松鴉

經典專欄・如何計算行動電源裝了多少「電」？

狙擊禽流感

面對病毒不斷變異，我們該如何全力阻止禽流感的進擊？

NT$280
ISSN:0250-331X


(Adobe Stock)

製造「對數表」比算對數更難？

對數表誕生的漫長旅程

單維彰
中央大學數學系、師資培育中心、文學院學士班合聘教授。

Take Home Message

- 指數與對數的關係密切，但很多人只熟悉整數指數而對零頭指數陌生。零頭指數（例如 $10^{0.5}$）是為了製造對數表而發明，兩者可說是同時誕生。
- 對數表是由納皮爾提出，目標算出 1000 萬以內自然數的對數，每個算到 14 位小數。布里格後來承接這項工作，開發新算法來完成這項龐大計畫。
- 對數表的發明讓許多複雜計算變得簡單，對科學、工程與金融發展有重大貢獻。可惜現代學生缺乏使用對數表的經驗，反而覺得對數十分困難。

大多數讀者可能會覺得自己和指數（次方）很熟，卻跟對數很陌生，甚至覺得它很可怕。其實指數與對數就像是手心與手背，明明是同一回事，為什麼卻會在許多人心中留下迥然不同的印象？筆者認為根本的原因是，我們並沒有真的學習到指數。

我們以為熟悉的指數，可能僅限於正整數指數，例如 $2^8 = 256$、$2^{10} = 1024$、$9\times9 = 81$、$7\times7 = 49$ 等，這些指數常見於生活與工作中。有些人可能還記得負整數指數，例如 a^{-1} 為 a 的倒數，2^{-3} 為 $\frac{1}{8}$，但許多人對指數的認識大概就到這裡為止。而我們對正、負整數指數的經驗不足以支持對數的學習，也無法讓我們感覺到指數與對數就像手心與手背。若想要獲得這樣的感覺，還需要認識零頭指數（fractional exponents），也就是像 $10^{0.5}$、$10^{0.3}$、$10^{0.4771}$ 等。

整數指數可以說是「天然」地出現在數學裡，搭配著正整數的質因數分解，例如 $108=2^2\times3^3$，以及在測量時常用的單位分數，例如 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$分別是 2^{-1}、2^{-2}、2^{-3}、10^{-1}、10^{-2}、10^{-3}。可是零頭指數並不天然，它是人造的；事實上，在 1619 年出版最早解釋如何建構對數的一本書裡，對數就被稱為「人造的數」。零頭指數並不天然，它是為了製造對數表而發明，也就是說，零頭指數和對數都是因人發明而誕生的。

零頭指數的重要性

對數是由蘇格蘭貴族納皮爾（John Napier）從一串描述此數的拉丁文中，抽取兩個關鍵字根組成的新字（logarithmorum）。中文也如法炮製，從它的描述：「對應等比（數列）的等差數（列）」抽出頭尾兩字，組成「對數」。但是除了需要在等比與等差對應以外，還要滿足一個算術關係：等比數列中的兩數相乘除，要對應它們的對數相加減。

在納皮爾創造對數之前，德國僧侶兼數學家施蒂費爾（Michael Stifel）創造整數指數觀念與符號。在他 1544 年出版的《算術全義》（*Arithmetica Integra*）第 250 頁有一個表格（表一），下排是等比數列，上排是等差數列，明顯符合對數的第一個條件：等比與等差之間一一對應，例如表一等比數列中 4 對應的等差數是 2，8 對應的數是 3。再檢查第二個條件：例如 $4\times8=32$ 對應到 $2+3=5$，而 5 是 32 的對數；又例如 $2\div8=0.25$ 對應 $1-3=-2$，而 -2 是 0.25 的對數。這張表揭示另一個重要的訊息——負數不可或缺，如果沒有負數，則像 $2\div8$ 所對應的 $1-3$ 就不能算了。

施蒂費爾在 1544 年出版的書裡已經預見表一的巨大潛力，也就是它可以化乘除為加減。但如果要讓它更具有實用價值，必須大幅擴充這張表，而這可能需要一個人投入畢生精力才辦得到，他自己不敢，於是建議後人努力。

如今我們可以看到，表一的下列是公比為 2 的等比數列 2^n，上列就是它的指數 $n=-3\cdots6$。表一可謂史上第一幅對數表，但是顯然沒有實用價值，因為它太「稀疏」了，也就是「解析度」不足。要提高解析度，也就是讓它變得比較「稠密」，則不能只放整數指數，還要放零頭指數。在等差的 0 和 1 之間還有好多零頭的數，例如$\frac{1}{2}$。根據第二個條件：假如 x 的對數是$\frac{1}{2}$，則因為$\frac{1}{2}$是 0 和 1 的等差中項（算術平均數），所以 x 必須是 1 和 2 的等比中項（幾何平均數），也就是 x 需滿足比例式 $1:x=x:2$，因此可知 $x=\sqrt{2}$。這就是為什麼要規定$\sqrt{2}$為 $2^{1/2}$ 的原因。

再來看 $\frac{1}{3}$。$\frac{1}{3}$ 不能跟 0 與 1 形成等差數列，必須插入 $\frac{2}{3}$，才能形成等差數列 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$。同理，我們需要找兩個數 x、y，使得 $1, x, y, 2$ 形成等比數列。因此 x、y 要滿足連比例式 $1:x=x:y=y:2$，而這也正是古希臘人遭遇倍立方問題時想出來的

表一

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

方法（延伸閱讀 1），從這條連比例式誕生了立方根和拋物線。因為 $x=\sqrt[3]{2}$、$y=\sqrt[3]{4}$，他們的對數是$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$，所以才需要規定$\sqrt[3]{2}=2^{1/3}$ 、$\sqrt[3]{4}=2^{2/3}$。

依此類推，則 $2^{0.1}$ 是$\sqrt[10]{2}$的意思，需求解 $x^{10}=2$ 才能獲得此數值。而 $2^{0.301}$ 是 $2^{301/1000}$ 也就是$\sqrt[1000]{2^{301}}$的意思，按照原始定義，需求解 $x^{1000}=2^{301}$ 才能獲得此數值。此處解釋的就是零頭指數的意義，它們正是為了配合對數的需要而被規定的，因此零頭指數和對數可說是同時誕生。但在如今的中學課程，零頭指數來得太理所當然，且學生在不習慣使用計算機的數學教育裡，就連零頭指數的運算及應用都幾乎沒有接觸的機會，使他們的實際經驗被侷限在整數指數，沒有機會學習零頭指數，這就是後來難以學好對數的根本原因。

為什麼需要對數表？

方程式 $x^{10}=2$ 和 $x^{1000}=2^{301}$ 在 16 世紀可能真的沒有人嘗試過求解，或許是因為真的太麻煩，但真正的原因可能還是沒有需求，也就沒有動機。雖然每個時代都有嗜好般純粹出於興趣的數學，但是真正引起共鳴並流傳到今天的還是以需求的數學（例如對數）為主。前述的兩個方程式反而是在有了對數之後才求解的（數值近似解）：第一題的解是 $x=10^{b}$，其中 $b=\log 2\div 10$；第二題的解也是 $x=10^{b}$，此時 $b=0.301\times\log 2$。

log2 是 2 的（常用）對數，意思是使得 10 的某次方等於 2 的指數。我們暫時不知道它是多少，只能從零頭指數的經驗得知，有某個介於 0～1 之間的小數，能讓 10 的某個次方等於 2。而寫不出它的數時，就用 log2 代表它。

方程式中的 b 顯然也不是整數，那麼 10^{b} 該怎麼計算？由於指數和對數就像手心和手背，只要對數表夠「稠密」，例如在（常用）對數表的對數欄查得到 b，則跟它對應的數就是 10^{b}。可見如果有對數表，則令人感到束手無策的計算，只要查表就好了，在這個範例中，可以先查出 log2，做個簡單的計算 log2÷10 得到 b，然後再查表得到 10^{b}。

但說得輕鬆，這張理論上的對數表，要怎樣算出來？要知道次方與對數都沒有公式，只能從算術的基本原理，搭配各式各樣因事制宜的巧思去硬算。這個情況像極了托勒密（Claudius Ptolemy）

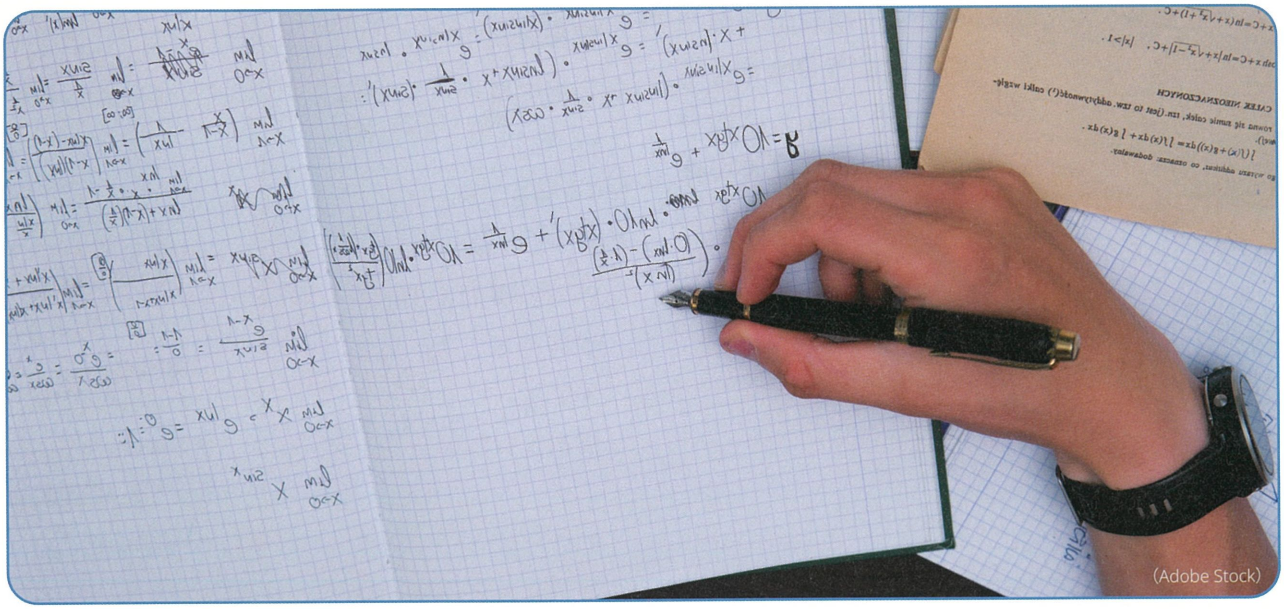
(Unknown author, public domain, Wikimedia Commons)

面臨的「弦表」（延伸閱讀 2）。當年托勒密製作弦表時給自己設定的目標是從半度起，每半度算一條弦長，直到 180 度，總共要算 360 個弦長，每根弦的精確度是 60 進制的第三位小數。而（常用）對數表想要有實用價值，最初的計畫是算出 1000 萬以內自然數（七位數）的（常用）對數，每個對數算出 14 位小數，也就是精確度為一百兆分之一。到底是誰提出這麼瘋狂的計畫？又是哪個傻瓜有勇氣執行這個計畫？

提出此計畫的正是納皮爾。他可能在 1614 年出版第一種對數之後，才明白他花費 20 年光陰製作的對數太「特殊」，想出了更自然且容易使用的第二種對數，才因而萌生這個計畫。但他自知年事已高無力完成，而後他收到英國格雷瑟姆學院（Gresham College）的數學教授布里格（Henry Briggs）來信，布里格不但深刻理解自己的傑作，還提出相似的改善想法。他們在 1615 年夏季會面，布里格承諾未來將會製作出對數表。

為什麼納皮爾想要算出七位數的對數？原因可能是托勒密的弦表經過 1000 年的進步，當時正弦表（sine table）的解析度已提高到每分（1/60 度）一個數值。而精確度提高到七位數，也就是令半徑為 1000 萬時，除了 sin 90°以外，其他正弦都以七位整數呈現。 至於為什麼想要用位數的兩倍（14 位數）作為對數精度？可能的原因是他已經預估 10^6+1 的對數是 6.00…00x…，希望像這種大數的對數還是有夠多非零的小數可用。

因為 log1 ＝ 0，因此第一個需要算的對數是 log2。高中數學有一道標準習題「2^{100} 有幾位數？」，此習題要學生利用對數 100×log2 ≈ 30 推論 2^{100} 有 31 位數。有了對數表之後，解出這個習題比反掌還容易。但真正讓人感佩的是這是納皮爾想出來，讓布里格計算 log2 的辦法！


（Adobe Stock）

製作對數表

讓我們從簡單的數值了解原理。$2^{10}=1024$ 是四位數，寫成科學記號便是 1.024×10^3。根據 log2 的定義：$2=10^{\log2}$，得知 $10^{10\times\log2}=1.024\times10^3$。

1.024 也是 10 的某次方，不知道「某」是多少，但是不要緊，我們可以確定它不足 1，因為 $10^1=10$ 超過了 1.024，因此假設 $1.024=10^{0.x\cdots}$，則

$$10^{10\times\log2}=10^{0.x\cdots}\times10^3=10^{3.x\cdots}\ 。$$

所以兩邊的指數應該相等，也就是：

$$10\times\log2=3.x\cdots\ 。$$

把 10 除到右邊，得到 log2 的一位小數估計值：

$$\log2=0.3\cdots\ 。$$

接著，布里格將 2^{10} 自乘，得到：

$$2^{20}=10{,}48576\ 。$$

再將 2^{20} 自乘，得到：

$$2^{40}=109{,}95116{,}27776\ 。$$

因為布里格想要知道的是位數，所以他沒有用英國習慣的三位一節逗點，而是五位一節；可見 2^{20} 有 7 位數，2^{40} 有 13 位數。接下來他要將 2^{40} 自乘，而他此時已經確定只需要算出最大的 15 位數，第 16 位以下的數不至於影響最後的位數，因此可以省略不算。他計算出 $10^{80}\approx12089{,}25819{,}61463\times10^{10}$，共 25 位數。最後他算 $2^{80}\times2^{20}$ 獲得 $10^{100}\approx12676{,}50600{,}22823\times10^{16}$，共 31 位數。所以他知道：

$$10^{100\times\log2}=1.2676\cdots\times10^{30}\ 。$$

同理於前面的解釋，他得到 log2 的二位小數估計值：$\log2=0.30\cdots$。

由於布里格承諾納皮爾的是製作有 14 位小數的對數表，因此他要算 log2 到小數點下 14 位。為了這個承諾，布里格需要知道 $2^{10000,00000,00000}$ 有幾位數？請讀者先想像一下自己有沒有勇氣做下去？布里格做出來了，它有 3010,29995,66399 位數！因此 $\log2=0.3010{,}29995{,}66398\cdots$。

布里格還用同樣方法算出 log7。但是如果這樣算下去，可能他的一輩子也不夠算。因此他發明了另一種算法，此算法非常接近現代數值分析的思想，也可以說是「微分」的前兆，雖然算的方式還是很辛苦，但至少比納皮爾的算法輕鬆一點。布里格把之前算出的 log2 和 log7 當作正確答案，用來確認自己的新算法有效。1616 年夏天，布里格帶著 log2、log7 和他的新算法赴蘇格蘭拜訪納皮爾，請納皮爾確認了他的算法可行。布里格回倫敦之後，算出了前 1000 個自然數的對數（每一個都算到 14 位小數），本來要在 1617 年夏天帶給納皮爾鑑賞，但納皮爾在該年 4 月過世，得年 67 歲。

伴隨對數的數學

伴隨對數而生的，還有兩個重要概念──科學記號與有效位數。在處理大數的過程中科學記號應運而生，而且它和對數緊密相扣，這也是 108 課綱指定對數單元要連結至科學記號的原因。

如今，我們知道不存在有限小數 b 使得 $10^b=2$，而納皮爾和布里格應不知此事，但是從他們的計

算經驗，應該能感覺到算不出一個數 b 使得 10^b 等於整數的 2。於是他們設定有效位數為 14，要在計算過程中確保 14 位。只要能找到一個數 b 使得 10^b 落在 $2\pm5\times10^{-15}$ 範圍內，就可以認為 $b = \log2$ 了。此外，在正查、反查對數表時，也處處需要有效位數觀念。現在的中學生已經完全沒有這種經驗，因而缺少了某些數學概念，不知道這會造成什麼長遠的影響？

布里格在 1624 年出版了常用對數表，但是他畢竟算不完 1000 萬個數，他公布了兩萬以前，以及 9～10 萬之間自然數的對數和詳細的算法。中間空缺的七萬個對數，被荷蘭人弗拉克（Adriaan Vlacq）和他的夥伴補足，但是他們務實地將精確度降為十位數；十萬以內的完整對數表也於 1628 年由弗拉克出版。納皮爾和布里格都沒有從對數表獲利，但具有企業家精神的弗拉克倒是抓住了機會，藉由出版對數表及其他數學表賺進好幾桶金。這份對數表經過歷代修訂增補，一直用到 20 世紀中葉才被電腦取代。

雖然製造對數的人吃足了苦頭，可是一旦公布對數表，許多讓人望而生畏的計算變得易如反掌，造福了科學、工程與金融發展。可惜多數學生沒有獲得這樣的經驗，大多恰好相反——他們認為對數像是給自己找麻煩，這真是數學教育的一樁大冤案。「以簡馭繁」不僅是數學內部的價值觀，更是數學對社會與文化的真正價值，能使得原本複雜難解的事情變得簡單可行，期許我們能在未來的教育中讓學生們獲得這種數學經驗。

延伸閱讀

1. 單維彰（2024）。古希臘人對平方軌跡的探索。*科學月刊*，*651*，46–51。
2. 單維彰（2024）。〈九章算術缺少的臨門一「角」：角度、弦表與三角函數的發展〉。*科學月刊*，*657*，42–47。

20 世紀的常用對數表