

2011 APME
October 18-19, 2011

亞太地區
高中數學教育研討會

Asia Pacific Region Conference On
High School Mathematics Education

研習手冊

指導單位

教育部、臺北市政府教育局

主辦單位

教育部高中數學學科中心
(臺北市立建國高級中學)
國家教育研究院

協辦單位

國立臺灣師範大學數學系
臺灣數學教育學會
臺中市政府

時間：100年10月18-19日

地點：國家教育研究院臺北分院

APME 2011

2011 亞太地區高中數學教育研討會

Asia Pacific Region Conference on High School Mathematics Education

研習手冊

指導單位：教育部、臺北市政府教育局

主辦單位：教育部高中數學學科中心(臺北市立建國高級中學)
國家教育研究院

協辦單位：國立臺灣師範大學數學系、臺灣數學教育學會
臺中市政府、臺中市立惠文高中



2011 年 10 月 18-19 日

中學數學人才的培養

丘成桐

美國哈佛大學教授、中央研究院院士

今日參加會議的著名中學很多，包括了台灣的建國中學和我的母校培正中學。各校在歷史上培養了很多人才，我在這表示欽佩。我今天來到這裡，主要想結合我自己的親身經歷來談談我對中學教育尤其是中學數學教育的看法。其實我沒有受過教師的訓練，也沒有在中學教過書，但我也著實有興趣和孩子們交流，純潔可愛的孩子總是令人喜悅。我想分幾個部分來解釋我的看法。

一、家庭教育

我在1960年通過考試到香港培正中學讀書。我的小學教育則是香港的鄉村完成的，連最基本的英文和算術都不夠水準，所以念中學一年班需要比較用功才能追上培正的課程。但是在鄉下的學校閒散慣了，始終提不起很大的興趣。當時的班主任是一位女老師叫葉息機老師，培正當時每學期有三段考試和老師寫評語，第一期葉老師說我多言多動，第二期說我仍多言多動，最後一期結語說略有進步，可見我當時讀書的光景。

所幸先父母對我管教甚嚴，甚至我的姊姊們也幫忙引領我進入正途。先父丘鎮英，1935年廈門大學政治經濟學專業畢業，翌年進入日本早稻田大學大學院深造，專攻政治制度與政治思想史。先父當學院的教授時候，學生常到家中論學，使我感受良多。我10歲時，父親要我和我的大哥練習柳公權的書法，念唐詩、宋詞，背誦古文。第一篇讀劄記《嗟來之食》，然後練《五柳先生傳》，“百里溪，五羊皮”，《孔子世家》等短文，我們愛看武俠小說，父親覺得這些小說素質不高，便買了很多章回小說，還要求孩子們背誦裡面的詩詞。因為讀了很多遍，到現在我還記得《紅樓夢》裡的詩詞。到中學一年級，父親讓我讀魯迅、王國維的著作，還有馮友蘭的《新原道》、《新原人》等哲學著作。西方的書籍如歌德《浮士德》，也試著讓孩子們讀。先父在哲學和文學的教導，影響了我以後在數學的研究和看法。

我至為感激我父母從來沒有鼓勵我去找尋物質的享受，總是希望我們有一個崇高的志願。他在哲學上的看法，尤其述說希臘哲學家的操守，和尋求大自然的真和美，使我覺得數學是一個高尚而雅致的學科，好的數學家也能留名後世。父親在所著《西洋哲學史》的引言中引用了《文心雕龍·諸子》篇的一段：“嗟夫，身與時舛，志共道申，標心於萬古之上，而送懷於千載之下。”這一段話激勵我，使我立志清高，也希望有所創作，能夠傳諸後世。我父親一直關心著國內大事，

常常教育子女，做人立志必須以國家為前提。我也很喜歡讀司馬遷的詩詞。司馬遷的“究天人之際”正可以來描述一個讀書人應有的志向。一個人的成長就像魚在水中游泳，鳥在空中飛翔，樹在林中長大一樣，受到周邊環境的影。歷史上未曾出現過一個大科學家在沒有文化的背景裡，能夠創造偉大發明的例子。一個成功的學者需要吸收歷史上累積下來的成果，並且與當代的學者切磋產生共鳴。人生苦短，無論一個人多聰明，多有天份，也不可能漠視幾千年來偉大學者共同努力得來的成果，這是人類瞭解大自然，瞭解人生，瞭解人際關係累積下來的經驗，不是一朝一夕所能夠成就的。所以一個人小的時候博覽群書是非常總要的。

在小學那段學習的數學不能引起我的興趣，除了簡單的四則運算外，就是雞兔同籠等問題，因此大部分時間花在看小說和到山間田野去玩耍。也背誦先父教導的古文和詩詞，反而有益身心。

在中學一年班，開始學習線性方程，使我覺得興奮。因為從前用在雞兔同籠公式可以用線性方程來解答，不用記公式了。我覺得很是興奮，成績也比小學的時候好，家父也比較欣慰。我父親在我讀9年級（初中三年）的時候就去世了。先父的去世使我們一家陷入困境。但我母親堅持認為孩子們應該繼續學業。儘管當時我有政府的獎學金，但仍不夠我支付吃飯的錢。因此我會業餘出去教小孩們數學來掙錢。有一次我教了一個6年級的孩子。她家很富有，但是她數學很不好，幾乎得零分。我發現她完全弄不明白雞和兔子腳的問題。所以我認為解決這個問題的唯一方法就是教她線性方程。她媽媽對此很震驚。她認為她女兒6年級的數學還一塌糊塗，我卻教她7年級的數學，她認為這是荒唐的。我請她耐心點，給我一個月的時間。她極不情願，但還是讓我試試，這女孩開始在我的幫助下學習線性方程。奇蹟出現了，她完全不費勁地能解決這些關於腿的問題。她得了滿分。她家非常高興，決定讓我教他們女兒所有的學科，包括之前我沒有教的英語。從這個故事裡面我想說明的是，教育者在教育孩子的時候方法要靈活。這種觀點是我們孔子率先提出的，要根據各人的長處和背景來因材施教。

我參考了歷史上著名學者的生平，我發覺大部分成名的學者都有良好的家庭背景。人的成長規律很多，奧秘也很多，相關的學術觀點也是莫衷一是。但是良好的家教，無論如何都是非常重要的。童年的教育對一個孩子的影響是重要的，啟蒙教育是不可替代的，它往往奠定一生事業的基礎。一位家長可能受教育的程度不高，但是他在孩子很小的時候就能夠培養孩子的學習習慣和學習樂趣。對孩子們來說，學到多少知識並不是最重要的，興趣的培養，才是決定其終身事業的關鍵，我小學的成績並不理想，但我父親培養了我學習的興趣，成為我一生中永不枯竭的動力，憑著它，可以學到任何想學的東西，相比之下台灣式的教育往往注重知識的灌輸，而忽略了孩子們興趣的培養，甚至有的人終其一生也沒有領略到學習的樂趣，“那是多麼可悲的事情”。

無論如何，孩子回家以後，需要有溫習的空間和時間，遇到挫折的時候，需

這也是我的個人經驗！

要安慰和鼓勵。這是很重要的事情，所以家長和老師需要有一個良好的溝通管道，才會知道孩子遇到的問題。現在有些家長都在做事，沒有時間教導小孩，聽任小孩放縱，反而要求學校負責孩子的一切，這是不負責任的。

反過來說，由於只有一個小孩的緣故，父母很寵愛小孩，望子成龍。很多家長對小孩期望太高，往往要求他們讀一些超乎他們能力的課程，略有成就，就說他們的孩子是天才，卻不知害了孩子，畫虎不成，反而不妙。

家長對學校的要求和期望甚殷固是好事，但往往不見得瞭解自己孩子的能力和在學校的品行，對學校的無形壓力不見得是好事。我個人覺得家長和老師中間需要建立一個暢通的橋樑，一方面家長需要尊重老師在課堂上處理學生的辦法，不宜認為自己的孩子都是天才，反過來說，老師教授學生，無論在學業上和品德上都需要因材施教，不宜過速，也不宜過緩。現在很多學校在家長的壓力下，儘量地將課程內容減輕，教育部也順應潮流，很多重要的課程都受到刪除。結果學生考試成績很好，但學習的內容大為減少，在讀大學時反而不見得能夠適應該讀的課程。

二、課本和課程的選擇

我在中學二年級學習平面幾何，第一次接觸到簡潔優雅的幾何定理，更詫異於它們可以由五個簡單的幾何公理來推度，使我讚歎幾何的美麗。歐氏幾何原本流傳兩千多年，是一本流傳僅次於聖經的著作。這是有它的理由的，畢竟牛頓的名著力學原理的想法，就是由歐氏幾何的推理方法來構想的。用三個力學原理推導星體的運行，開近代科學的先河。而愛因斯坦的統一場論的基本想法也與這個想法有關。

平面幾何所提供的不單是漂亮而重要的幾何定理，更重要的是它提供了在中學期間唯一的邏輯訓練，是一個年輕人所必需的知識。我很驚訝地聽說，很多數學教育家們堅持不教證明，原因是學生們不容易接受這種思考，誠然，從一個沒有邏輯思想的小孩，到接受這種訓練是有代價的，但這種代價恐怕比中學其他學科更為重要，無論做科學家，做政治家，做一個成功的商人，都需要有系統有邏輯的訓練，我希望我們中學繼續這個訓練下去。

至於三角代數方程，概率論和簡單的微積分都是重要的學科，這對於以後想學理工科或經濟金融的學生都極為重要。

另外我還想談談體育、音樂、美術以及這些課程與數學的關係。柏拉圖於《理想國》中以體育和音樂為教育之基，體能的訓練讓我們能夠集中精神，音樂和美術則能陶冶性情。從古代希臘人和儒家教育都注重這兩方面的訓練，他們對學問和人格訓練至為重要。

唯一“認真而純粹的”Logic訓練！但如今看來，初中是否嫌早？高中又無暇。怎麼辦

從表面上看，音樂美是用耳朵來感受，幾何美是用眼睛來感覺，但是對美的感覺都是一種身心感受，數學本身就是追求美的過程。二十世紀偉大的法國幾何學家 E. Cartan 也說：“在聽數學大師演說數學時，我感覺到一片的平靜和有著純真的喜悅。這種感覺大概就如貝多芬 (Beethoven) 在作曲時讓音樂在他靈魂深處表現出來一樣”。

美術，是以一定的物質材料，塑造可視的平面或立體形象，來反映客觀世界和表達對客觀世界的感受的一種藝術形式。而數學家也極為注重美的追求，也注意到美的表現。偉大的數學家 Herman Weyl 就說過：假如我要在大自然的真實和數學裡面的美做一個選擇的話，我寧願選擇美。很幸運的是：自然界的真理往往是極為美妙的。普林斯頓高等研究所的徽章是真和美，左手面是裸體的女神，右手面是穿著衣服的女神。無論文學家、美術家、音樂家和數學家都在不斷的發掘美的意義，和如何去表達他們由大自然眾生誘導出來的美。

現在來談談體育。無論希臘哲學也好，儒家哲學也好，都注重體魄的訓練。亞里斯多德認為希臘人有超卓的意志 (High-mindedness)，意旨希臘人昂昂然若千里之駒，自視甚尊，憐人而不為人憐，奴人而不為人奴。正如孟子所謂「富貴不能淫，貧賤不能移，威武不能屈。」綜觀古今，大部分數學家主要貢獻都在年輕時代，這點與青年人有良好的體魄有關。有了良好的體魄，在解決問題時，才能集中精神。重要的問題往往要經過多年持久集中精力才能夠解決。也正是因為這樣，學者對自己追尋的學問必須要有濃厚的熱情，正如荷馬史詩裡面描述的英雄，不怕艱苦，勇往直前，又或如玄奘西行，有著無比的毅力，才能成功。

還有熱情
和「無畏」

這為我一貫的
主張找到了
大師的加持

現在我來談談如何教好數學這個學科，這是一個有意義的問題。有很多教育學家反對學生記熟一些公式，凡事都需推導它的根源，我想這是一個很錯誤的想法，即使大學問家也不能凡事都由最基本原理去推導，必須基於前人做過的學問來向前發展，然後再反覆思考前人的學問才有整個學問的宏觀的看法。當年我們都背乘數表，很快就懂得四則運算，而事實上任何一個科學家都懂得如何去推導乘數表，物理學家或工程學家大量利用數學家推導的數學公式而不發生疑問，然而科學還是不停地進步。可見學習的過程有時不見得漸進，有時也容許突進。

最出名的一個例子，就是 $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ ，我們不難推導它，但是有些學者堅持中學生要找到它的直觀意義，可說是忽略了符號運算的威力了。

很多中學都不教微積分，但是美國比較好的中學都有微積分的課程，其實中世紀的科學革命的基礎在於微積分的建立，而我們的孩子不懂得微積分，等於是回復到中世紀以前的黑暗時代，實在可惜。很多中學生喜歡參加的奧數競賽就不考微積分，所以有不少奧數金牌的學生以後沒有能力成為好的數學家。

另一個數學中比較重要的概念就是“群”，它是人們從自然界的對稱當中抽象出來的。這個概念今天已經貫穿到現代數學和物理及其他自然科學，工程應用等許多領域。我個人認為，即便在目前應試教育的非理想框架下，有條件的好學生也應該在中學時期就學習並掌握微積分及群的基本概念，並將它們運用到對中學數學和物理等的學習和理解中去。牛頓等人因為物理學的需要而發現了微積分。而我們中學物理課為什麼難教難學，恐怕主因就是要避免用到微積分和群論，並為此而絞盡腦汁，千方百計。這等於是背離了物理學發展的自然和歷史的規律。

我聽說很多小學或是中學的老師在想讓學生只用一種方法去學習或得到老師所問問題的答案，如果學生不是用老師所希望的方式回答，就認為該學生回答錯誤。這實際上是非常悲哀的事情。

學生需要自信，並且坦率地講任何能得到正確答案的方法都是正確的方法。如果老師認為學生提供的方法不正確，老師可以用很多方式改變問題，問其他相關的問題，學生們依然可以用他（她）的方法來回答，這就意味著學生瞭解他自己的方法，這個方法是好的。當我們知道如何用一些方法來解決某個問題的時候，即使是學生不明白為什麼這個方法有效，這也是非常好的一件事情。實際上，很多工程師甚至物理學家有時並不嚴格地理解他們用來解決他們問題的方法，但是他們知道如何去用這個方法。對於那些關心如何嚴格推導數學方法的數學家來說，他們只有瞭解了這個方法才能知道如何去做。但是我至今還不認識如果只是假設某些結論成立，就不往前邁步的這樣的數學家。那又為何要強迫小孩在他們學習過程中要推導出每一個公式呢？

2)

三、學習的興趣

物理學的基本定律說物體總是尋找最低能量的狀態，在這種狀態下才是最穩定的。孩子的學習態度基本也有同樣的狀況，他們希望找到各種理由，使得他們有時間去做其他他們喜歡的事。就如電子在一定軌道上運行，因為這是它的能量所容許的，但有其他能量刺激這些電子後，它可以跳躍。對孩子的學習，我們也需要有新的能力使它跳躍。

[能量]

這種能力可從老師在課堂上的刺激，例如考試的分數，例如一些有趣的問題，例如因為歷史上數學故事的描述而引起孩子的興趣，例如比賽時引起的競爭心理。但這種刺激，最好還是順其自然。讓他們覺得學習是有意義的，要培養他們濃厚的好奇心，去發掘數學的妙處和數學在日常生活或其他學科的用處。學生都喜歡聽故事，歷史上有趣的數學故事很多，值得學生們學習。

美國的中學者注重通才教育，數學以外的學科，例如文學、物理學、哲學，都會刺激學生的思考能力，值得鼓勵。

四、群體的訓練

假如學生在學校裡不能學習與人相處，並享受到它的好處，就不如在家裡請一位家庭教師來教導。現代社會乃是一個合群的社會，學生必須學習與同學相處。現代社會乃是一個合群的社會，學生必須學習與同學相處共同學習，並尊重有能力有學問的老師和同學。學生必須懂得如何尊重同學的長處，幫忙有需要的同學，而在這種環境中去訓練自己。

美國的教學體系，有很多值得我們學習，雖然這也不是一個理想化的體系。比如美國的高中和大學對成績就不給出分數，只給出 A, B, C, 和 F。這不是件壞事情。這可以消弱台灣小孩之間不必要的競爭。為分數的斤斤計較以及爭奪班裡的第一名，會破壞學生們之間的合作，集體的力量得不到尊重。這個應該有所改變。

五、人格的培養

在國外，中小學教育裡特別注重於對學生獨立人格和品性的培養，學生的個性和個人特點也受到充分的尊重和被肯定。不少學校把對個人品德的要求按頭一個字母縮寫成 "pride" (榮譽)，即 perseverance (堅持)，respect (尊重)，integrity (正直)，diligence (勤奮)，excellence (優秀)，作為學生自我要求的基本要點。學校裡也很注重對學生的口頭表達能力及與他人溝通合作能力的培養。獨立思考的能力，團隊協作的精神，對周圍眾人和對社會的責任感等等，都得到充分的發展，而不是整天被包圍在題海般的作業之中，使童趣和人與生俱來的求知慾和創造性被湮滅，個性被扭曲。