

## 計算機的輸出

單維彰 · 民國 108 年 2 月 14 日

本文意欲解釋以下兩項計算機輸出的現象：

- (1) 計算  $2 \div 3$  的結果是  $0.6\overline{6}$ ，尾數沒進位；但  $5 \div 3$  的結果是  $1.6\overline{6}$ ，尾數進位了。
- (2) 計算  $2 \div 3$  之後，如果立即輸入  $\times 3$  會還原為  $2$ ；但如果輸入  $0.6\overline{6} \times 3$  並不會還原為  $2$ 。

以下全用 E-More fx-127 機型為例，其他具有同樣輸出現象的機型，原理皆同。

### 先備知識

先約定一個名詞。我們有兩種表現整數或有限小數的方法，一種是大家都知道的「科學記號」表示法，相對地，我們稱另一種為「日常記號」。例如 3000、3000.1、0.0031 都是日常記號。零只有日常記號，沒有科學記號。

計算機內建一套機制，用來決定使用哪種記號輸出計算結果，這不是本文關心的事。只要知道：不論哪種機制，計算機都不會顯示沒有意義的 0，例如 20000.00 僅顯示  $20000$ ，而  $20000^3$  則顯示  $8.12$ ，表示  $8 \times 10^{12}$ 。這是符合習慣的數字記法，並不需要詳細解釋。

計算機實際做運算的電子電路 (ALU: Arithmetic and Logic Unit)，用的是二進位浮點數 (binary floating-point numbers)；但是這也不是本文關心的事，也許以後再寫。請讀者理解的是：ALU 只能在某個範圍內做計算，在該範圍內，它「保證」單一步驟計算結果的「相對誤差」不超過  $2^{-34} \approx 5.8 \times 10^{-11}$ 。

最後兩個約定：一，此後的計算舉例，都不再贅述  $\div$  符號，請讀者自行補上；二，以下所談，都排除 0。

### 計算與輸出

計算機裡面的數（不論顯示成什麼樣子），全都是十二位係數的科學記號數字。例如輸入 20000.00 的過程中，在螢幕上看到  $20000.00$ ，但它只是輸入過程的回應 (echo) 而已，讓人看了安心（否則會以為計算機壞了）；按下  $\div$  或者其他一元、二元運算功能鍵之後，它才進入計算機之內，而計算機將它記為  $2.00000000000 \times 10^4$ ，再輸出到螢幕上；因為不顯示沒有意義的 0，所以僅顯示  $20000$ 。

計算  $2 \div 3$  的結果，在計算機的內部其實是  $6.66666666667 \times 10^{-1}$ ；類似地， $5 \div 3$  的結果其實是  $1.66666666667 \times 10^0$ 。根據前面說的「相對誤差」，正確的數值分別在以下範圍內：

2/3 在  $6.66666666667 \times 10^{-1} \pm 3.8 \times 10^{-11}$  範圍內<sup>1</sup>

5/3 在  $1.66666666667 \times 10^0 \pm 9.7 \times 10^{-11}$  範圍內

雖然我們知道真正的誤差比以上估計的範圍更小，但它們僅為特例；一般的情形，計算結果的科學記號第十二位係數（係數的末位數）是不值得採信的，就連第十一位係數都可能誤。因此，在 ALU 算出結果之後，計算機先將它在第十位係數做四捨五入，也就是在小數點下第九位做四捨五入，然後才準備它的輸出。<sup>2</sup> 例如 2/3 準備輸出的數是  $6.666666667 \times 10^{-1}$ ，而 5/3 準備輸出的數是  $1.666666667 \times 10^0$ 。

做好輸出的準備之後，計算機根據指數的大小，決定採用日常記號還是科學記號。如果用日常記號，則最多顯示十位數字。先用指數決定前置的 0，例如  $6.666666667 \times 10^{-1}$  需要前置的 0，後面跟著九位數字，就從  $6.666666667 \times 10^{-1}$  提出前九位，所以我們看到 0.666666667；但是  $1.666666667 \times 10^0$  並不需要前置的 0，提出全部的十位數字，所以我們看到 1.666666667。這就解試了前面的現象 (1)。

同理， $2 \div 30$  的輸出是 0.066666667，而  $32 \div 3$  的輸出是 10.66666667。原因是它們的 ALU 計算結果依序為  $6.6666666667 \times 10^{-2}$  和  $1.0666666667 \times 10^1$ ，準備輸出的數值依序為  $6.666666667 \times 10^{-2}$  和  $1.066666667 \times 10^1$ ；以日常記號輸出時，前者取了係數的前八位，後者取了全部的十位係數。

如果採用科學記號輸出，則係數部分最多顯示八位，直接取出準備輸出的前八位係數即可。例如，在計算機顯示 2/3 和 5/3 的日常記號數字之後，按  $\boxed{F \leftrightarrow E}$  即轉換成科學記號，看到的輸出，依序是 6.66666666E-01 和 1.66666666E00。因為準備輸出的數在第十位係數才是 7，所以取前八位出來，全都是 6 而沒有拿到 7。<sup>3</sup>

雖然  $2 \div 3$  的結果顯示為 0.6666666666，但是計算機裡面記錄的數，其實是  $6.66666666667 \times 10^{-1}$ 。因此，這時候如果立即輸入  $\boxed{\times} 3$ ，ALU 做的計算是

$$(6.66666666667 \times 10^{-1}) \times 3 = 2.00000000000 \times 10^0$$

準備輸出的數是  $2.000000000 \times 10^0$ ，以日常記號輸出十位數字，捨棄無意義的 0，就還原成了 2。可是，如果我們輸入 0.666666666  $\boxed{\times} 3$ ，ALU 做的計算是

$$(6.66666666000 \times 10^{-1}) \times 3 = 1.9999999800 \times 10^0$$

<sup>1</sup>  $3.8 \times 10^{-11}$  是  $(2/3) \times 2^{-34}$  的概數， $9.7 \times 10^{-11}$  是  $(5/3) \times 2^{-34}$  的概數。

<sup>2</sup> 按照《數學領綱說明手冊》的約定，在小數點下第  $k$  位做四捨五入，意思是如果第  $k+1$  位小於 5 則捨棄，否則進位。

<sup>3</sup> 按鍵  $\boxed{F \leftrightarrow E}$  的意思是「定點」(Fixed-Point) 記號和「指數」(Exponent) 記號的切換。

準備輸出的數就是  $1.99999998 \times 10^0$ ，所以輸出的答案是 1.99999998。這就解釋了前面提出的現象 (2)。

雖然計算機在內部用十二位數字作計算，可是它卻最多只接受我們輸入十位數字，不論小數點在哪裡。例如，即使我們輸入 0.6666666666 (小數點下十個 6，共十一位數字)  $\times$  3，ALU 仍然只拿到前十位數字 (和小數點)，所以結果跟之前輸入九位小數 0.666666666  $\times$  3 的計算結果一樣，是 1.99999998。這時候如果改用科學記號輸入法，可以多偷到一位數值。我們可以輸入 6.666666666 (十個 6)  $\boxed{\text{EXP}}$  1  $\boxed{\pm}$   $\times$  3，這時候 ALU 做的計算就成了

$$(6.6666666660 \times 10^{-1}) \times 3 = 1.9999999980 \times 10^0$$

而準備輸出的數就成了  $2.000000000 \times 10^0$ ，以日常記號輸出則還原為 2。