回「消失的重複組合數」

單維彰　民國 106 年 6 月 5 日

感謝蕭鈞元老師在數學學科中心《高中數學電子報》第 122 期分享「消失的組合數」，將重複組合數 H_m^n 定義為 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 之非負整數解個數，並解釋其值等於 C_m^{n+m-1} 的思考與教學方法。我想藉用蕭老師奠定的基礎，接在後面介紹另一種思考方法：因為

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$$

之非負整數解個數，等於

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m+n$$

的正整數解個數，那又等於要在 $m+n$ 個球的 $m+n-1$ 個間隙中，放置 $n-1$ 個加號，所以有 C_{n-1}^{n+m-1} 種選擇。這就是前面說的 H_m^n。

以上思考方法，是我在大約民國 97 年從中央大學數學系的黃華民教授（現已退休）那裡學到的，而他說那是交通大學應用數學系黃光明教授（現為退休講座教授）的想法。

用黃教授的思考方法所獲得的組合數 C_{n-1}^{n+m-1} 在形式上並不符合舊的習慣 $H_m^n=C_m^{n+m-1}$。但是老師們都知道，重要的是思考方法，一旦掌握了方法，知道 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 有 C_{n-1}^{n+m-1} 個非負整數解，誠如蕭老師所言：

> 我們可以放心的告別重複組合數 H_m^n，它將以自然而優雅的
> 姿態引退，消失在數學符號之海

既然已經不需要 H_m^n 符號，那又何必計較 C_m^{n+m-1} 和 C_{n-1}^{n+m-1} 的形式差異？

以上是思考方法，老師們肯定能夠發展匹配的教學方法。請容我提出畫蛇添足的初步建議。原則上，建議先教「數學模型」，等到模型的概念與操作都穩固之後，才引進應用的範例。此處的數學模型便是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的解個數。先考慮：

$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 之正整數解個數

這是一個非常容易連結「固有」組合問題的模型，就是 m 個球要分成 n 堆的模型問題（不允許「空」堆），或者想像有 m 顆連成一串（不是一環）的浮球，要剪斷成 n 串，每串至少一顆。總之答案是 C_{n-1}^{m-1}。

以上問題是一個「墊腳石」，很容易連結典型的組合問題，相信學生並不難理解（理解之後就容易記憶了）。然後考慮

$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 之非負整數解個數

思考的訣竅是：假如我們先給每個 x_k 加上一，則它們通通變成了正整數，只是它們的和就不再是 m 而是 $m+n$ 了。數學上

$$(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_n+1)=m+n$$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的一組非負整數解，就等於是 $x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=m+n$ 的一組正整數解，其中 $x_k'=x_k+1$。求出

$$x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=m+n \text{ 之正整數解個數}$$

之後，$x_k=x_k'-1$ 就是原來想要問的非負整數解的個數。就好像我們先各借一塊錢當資本，等它們湊足 $m+n$ 之後，再各索回那一塊錢。如此一來，我們把新問題降回舊問題了，大家知道答案是 C_{n-1}^{n+m-1}。

最後一個模型是

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\le m \text{ 之非負整數解個數}$$

思考方向還是希望能用剛才學會的招式：「借貸」。老師是個慈善家，只要 x_k 的錢湊不足 m，老師一定把它補足到 m。所以前述問題的解個數等於

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+T=m \text{ 之非負整數解個數}$$

數學模型穩固之後，學生要學習辨識問題的本質等價於哪種數學模型？「模型」是數學素養的重要學習內容，「辨識」是數學素養的重要學習表現。