

素養評量芻議

單維彰·民國 106 年 6 月 29 日

摘要

「素養評量」不是一種題型，而是測量素養導向之教學成效的工具。素養也像課綱一樣，必須分成內容和表現兩個向度來檢視。高級中學階段的數學學習內容，除了國民核心素養的教育目標以外，必須兼顧學科教育目標，為前者設計的評量即是「素養評量」。我們建議用「支持終身學習（的語言）」作為素養內容的判斷規準，而以銜接大學作為學科內容的判斷規準。至於素養的學習表現，則建議參照「國民數學素養」的精簡描述，「素養評量」應評估這些學習表現。落實在學測數學考科的範圍上，建議以 10 年級和 11 年級 B 類的學習內容為原則。

前言

今 (106) 年初，建國中學曾政清老師組織了數學學科中心「素養多元評量小組」，成員包含十多位教師同仁以及劉柏宏教授和筆者。自 5 月 17 日起連續四週，學科中心在建中舉辦小組工作與研討會議。筆者和與會的伙伴們，以三週時間切磋素養評量的測驗目標、評量方法以及實作例題。本文是筆者整理的綜合心得，為觸及更多高中數學同仁、徵求更廣泛的討論與意見、在同仁間達成大致的共識，故發表於數學學科中心的電子通訊。

以下各節，其實是「摘要」的逐句釋義，故全文一萬兩千多字的大意，就是「摘要」那 230 字而已。就電子報的習慣而言，本文太長，建議先讀摘要，擷取有興趣的分節閱讀。

一、素養評量不是一種題型

講到素養評量，大家可能立刻聯想到 PISA。確實如此，PISA 數學試題的確可以作為素養評量的典範，但是因為它的評量對象是 15 歲青少年，而我們現在的任務是探討高中階段之素養評量，所以它的助益有限。但 PISA 是一個不可迴避的典範，PISA 數學試題可歸納出兩大特色：

1. 題組式命題
2. 以情境入題

所以老師們很容易將以上兩大特色當作「素養評量」的定義，而誤以為所謂素養評量就是滿足以上特色的題型。這是我們首先想要避免的觀念。

事實上，以上兩大特色是 PISA 運用來實踐其評量目標的兩項技術。我們固然可以沿用這些技術，但更重要的是：先釐清評量目標。從小考（平常考）、段考、期末考、複習考到全國性評量（如學測），各有各的評量目標，不見得每一題都要刻意地符合上述特色。

以下兩個小節，分別藉著 PISA 數學試題的前述兩大特色，討論它們值得借鑑之處。

1-1. 題組式命題

題組的優點是比較容易分辨學生的概念與能力層次，而缺點是容易洩漏試題的用意或者限制考生的思維。其實所有工具都有其優點也有其限制，如果能掌握目標並且多加思考與練習，總是能盡量發揮工具的長處而避免其拙處。當評量目標希望兼顧個別概念、基本操作程序以及它們的綜合應用，而且意欲分辨考生的能力等級時，題組是個值得考慮的工具。

附錄 1 試將 106 年數學學測（單選）第 5 題拆成題組，權充一個具體範例，請老師們參考指教。反對題組的學者，可能有以下三種理由。

- (1) **作答時間變長。**以附錄 1 的題組對照原題，我們猜想多數答對原題的學生，本來就會經歷第 1 和第 2 小題的程序，所以增加第 1 和第 2 小題，不至於拉長太多作答時間。至於有多少天縱英明的考生，可以跳過小題的過程而直接看出原題的答案，則是一個有待研究的命題。
- (2) **引導學生作答。**附錄 1 的題組確實企圖引導學生思考，但這是採用題組的目的，不必然被解讀為缺點。根據大考中心公布的鑑別指數表，原題有效地鑑別最高 20% 和其餘 80% 的學生；如果評量的目的是篩選最高 20% 的學生，則原題是適當的試題，但題組有可能做更細緻的鑑別。至於題組的三個小題是否真有更多的鑑別效果，還需要實證研究。
- (3) **小題之間並不獨立。**試題之間的獨立性，是為了滿足某些試題分析之統計方法的理論性假設。而評量的目的，並不應該把統計的需求放在首要位置。數學概念的發展，本來就經常是一層套著一層，在某個層次斷掉，就難以接續到更高的層次。著名的布魯姆 (Bloom) 教學目標模型，也是將認知領域分解成上下相依的六個層次，而不是彼此獨立的。小題彼此獨立的題組，就好比「五個獨立是非題」的多選題，而後者已經被公認為不恰當的多選題。總之，實在沒有必要堅持題組之內各小題的「獨立性」。

以附錄 1 的題組為例，若第 2 小題答錯，而學生依據第 2 小題的圖形「正確」回答第 3 小題，則雖然學生具備第 3 小題欲評測的知識，卻答錯了。對於這種遺憾的狀況，有消極和積極兩種看法。消極的看法是，反正原題也會發生「一步錯，全盤墨」的遺憾，所以題組的品質並沒有比較差。積極的作法是，第 3 小題的評分可以根據考生的第 2 小題答案而決定；即使第 2 小題答錯了，只要根據其錯誤答案而一致地回答了第 3 小題，就算正確。

經過以上討論，作者想要肯定題組的效用。在適當的評量中採用題組，可以滿足某些評量目標。但是，素養評量的題目不一定非題組不可，而題組形式的題目，也不一定就能夠評量素養。

1-2. 以情境入題

PISA 歸納的四類情境—個人、職業、社會、科學—是頗有幫助的指引，幫助我們整理思緒或擬定思索的方向，而且 PISA 公布的示範試題也帶給老師們相當具體的參照典範。可是我們最擔心的就是：因為 PISA 的成功，導致大家把「情境

題」和「素養評量」畫上了等號，創造出為情境而情境的試題。虛偽的情境不但遠離了素養，更是數學的「反」教育：它就像所謂的「人工難題」，導引學生偏離了學習數學的旨趣，並且助長了「數學虛假而無用」的錯誤觀念。

舉例而言，106 年數學學測第 2 題就是一個虛假的情境：

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

試想，手機螢幕上顯示的是「數值」還是「數式」？如果是「數式」（這種程式應該很少見），題目就不必說「接近」 81^3 ，而且既然用戶能輸入數式，最後的答案也就不必是數值；但如果是「數值」，有多少人能看得出來某數（譬如 532000）「接近」 81^3 ？再者，試用 PISA 的規準，此題屬於哪一類的情境？恐怕不管說哪一類都難以令人信服。所以，上述情境是虛假的，無助於評量目標，甚至是誤導的。

此題的測驗目標應該是指數律，關鍵步驟有三：(1) 點擊三次之後應為 b^8 而不是 b^6 ，然後 (2) 使用分數的指數律得到 $b \approx 81^{3/8} = 3^{3/2}$ ，最後 (3) 估計 $\sqrt{27}$ 的數值。學測第 2 題是否要出三步驟的試題？這是一個值得探討的問題，但是本文不談。我們想要探討的是：撇開「情境」不談，此題的測驗目標是否符合素養評量？讓我們按照上述的解題三步驟來思考這個疑問。

(1) 做三次平方，得到 8 次方而不是 6 次方，算不算素養？根據大考中心公布的選項分析，超過 1/3 的低分組學生被「誘答選項」騙到了：他們選 $b = 9$ ，顯示這些學生可能錯在這一步，而第二步卻是會的。

(2) 用指數律求解 $b^8 = 81^3$ 並化簡到 $b = 3^{3/2}$ 算不算素養？

(3) 估計 $3^{3/2} \approx 5.2$ 算不算素養？

每位老師對以上三個問題都各有自己的看法，這就顯示我們有溝通而達成（大致）共識的必要。我們把這個議題按到後面再說，先請老師們思考：如果上述 (1) 和 (2) 都算素養，該考，那麼難道一定要把它們放在情境裡面考嗎？或者難道因為找不到適當的情境，就不能考嗎？這兩個看法，應該都是荒謬的。這就是為什麼我們主張素養評量的題目不一定非情境不可，而情境題目也不一定就能夠評量素養。這個主張，呼應張鎮華教授的提醒：

紮實的數學知識，也是素養。

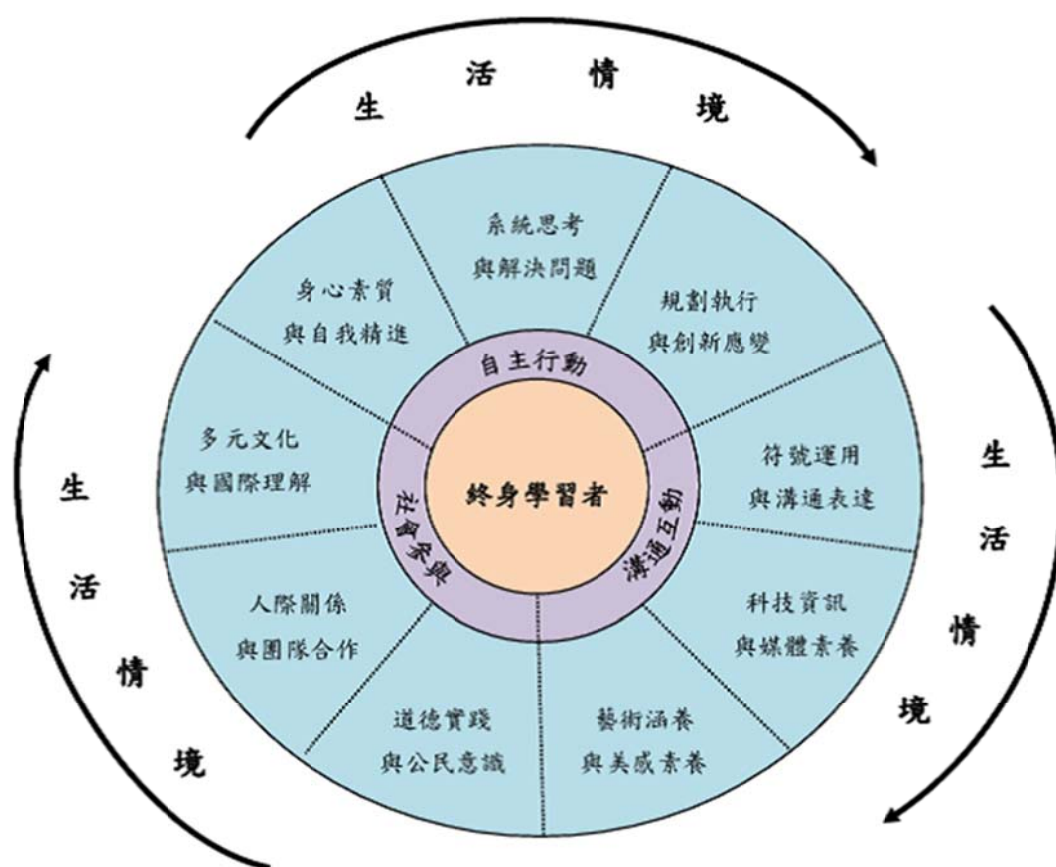
但是總不會「全部」數學知識都屬於素養，所以這個主張還有細緻說明的必要，讓我們接續到下一節的主題。既然「素養評量」不是一種特定的題型，它是什麼呢？

二、素養導向之教學成效

所有的學習評量，都應該肩負評判學習成效的任務。所謂「素養評量」也是學習評量，所以它還是要評判學習成效。有所不同的是，它特別要評判「素養導向之

課程與教學」的學習成效。所以「素養評量」本身不是目的，也不是一種題型，而是「素養導向之課程與教學」的評量工具。

「素」是白色或原色的意思，引伸成「平常的」。所以「素養」的字面意思可以解釋為「平常就具備（能表現）的學養與修養」。既然強調「平常」，看起來跟九年一貫課程標舉的「帶得走的能力」是一樣的理念。其實教育的總目標並沒有劇烈的改變，發展課綱的教育界同仁將「素養」定義為知識、能力與態度，而所謂「三面九項」的核心素養示意圖（如下），把「終身學習者」放在中心。於是我們可以這樣說：108 課綱和九年一貫課綱在理念上的字面差異，主要是「態度」和「終身學習」兩大項。有些老師可能認為這些話只是「作文」而不予留意，但是這些理念確實是所謂「素養課程」的基本理念，也是企圖思索「素養評量」的理論基礎，不宜完全忽略。



108 數學課綱（草案）的素養課程設計理念，跟總綱的理念一致，而這一份課綱的素養導向學習內容和學習表現，總括一句話來說就是：

為支持終身學習所需的數學知識、能力與態度

老師們肯定都了解數學課程所謂的「知識」和「能力」是什麼，但是「態度」本來就有太多意義，在數學課程的語境裡更是難以捉摸。雖然「態度」很難評量，但是要彰顯「素養課程」的概念，就非要理解「態度」概念不可。本文僅簡約地詮釋：數學課程要教育的「態度」可以分兩方面詮釋：一是一種「意識」，二是

特別的「數學思維方式」。「意識」是指教與學的過程中，隨時保持著關注「為什麼而學」與「如何運用它解決真實問題」的意識。數學的特長之一就是抽象，而抽象賦予數學真正的威力，所以數學的學習不可能完全依賴物質的真實世界；儘管如此，確知數學必與真實世界有所關聯，並且能夠有效解決問題的「意識」卻是數學教育的重要任務，這項任務可以和數學的抽象性並行不悖。至於「數學思維方式」的詮釋，按到後面再說。

素養評量不僅用在總結性評量（例如期末考和學測），也用在形成性評量。108 數學課綱（草案）有許多脈絡化的設計，包括老師們不太習慣的「螺旋式」設計（例如先用 10 的次方引進 \log 符號，然後才學習對數概念），以及現在比較少人運用的「親手做」設計（例如先用量角器和方格紙學習極坐標，然後連結廣義角的三角比），都是針對「意識」目標的課程設計。這部分的素養課程，不容易成為總結性評量的測驗目標，但卻是形成性評量的適當目標。

以上說明想要建議教師同仁：素養評量不只是學測和指考的責任，只要是測度「素養課程」學習成效的評量，都是所謂的素養評量。前一節末所說的「紮實的數學知識」，就是指「素養課程」中的學習內容；以適當的「態度」習得這些數學概念與操作能力，便是「素養課程」的學習成效。

前面對於 108 數學課綱（草案）之素養性的說明，或許還是頗為「作文」而較難掌握，但是本文無法深入詮釋課綱，也沒有篇幅深入詮釋素養。關於這兩者，還得請老師們參閱其他專門文件。但是在本節之末，提醒老師們注意寫在課綱最前面的五大基本理念（如下），它們是「素養課程」更具體一些兒的闡述。

1. 數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習
2. 數學是一種實用的規律科學，其教學宜重視跨領域的統整
3. 數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感
4. 數學應提供每位學生有感的學習機會
5. 數學教學應培養學生正確使用工具

「素養課程」的教材設計、教法原理、以及成效評量，都值得參酌以上理念，以及它們寫在課綱裡的闡釋。

三、素養的內容向度

前面說過 PISA 的評量對象是 15 歲青少年，因此它對高中階段的素養評量幫助有限。如果讀者早先讀到這個說法時，並無異議，表示您已經同意：素養須考慮其內容的程度差異。

先不管每個人心目中的「素養」定義為何，假如我們宣稱小學階段的所有數學課程內容都屬於素養，或許大家都同意；但是如果宣稱國中階段的數學課程內容全都屬於素養，或許有些人就會遲疑了。例如「三角形的內角和」可能在大家心目中屬於素養，但是「凸多邊形的內角和」可能就有人遲疑。再例如「比例式」可能在大家心目中屬於素養，但是「三連比」可能就有人遲疑。再舉一個極端的例子，假如我們設定十二年國教的目標，是要畢業生具備有如王國維的國文素養，

林語堂的英文素養，和陳省身的數學素養，豈不妙哉？但是大家都知道這只是「作文」說空話而已。由此可見，大家心中對於素養的內容程度是有一把尺的。

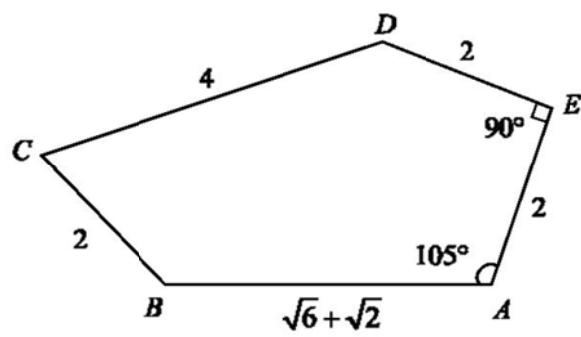
「素養」可以有各種層次，當我們用另一個名詞「國民」或「核心」加以限定，並且當作課程綱要之最高指導理念的時候，就有更明確的內容範圍了。前面說的「終身學習」便是素養課程之內容範圍的取捨依據：為支持終身學習之所需。

假設我們將素養課程的內容設定在「支持終身學習」的水平上，雖然還是有值得爭辯的課題，但是起碼有了一個堪稱客觀的標準。以這個標準來辯論「凸多邊形的內角和」和「三連比」是否屬於素養，雖然我不能預測辯論的結果，但是可以想像正反雙方將會提出哪些證據了。

假設（只是假設）國中數學老師決定「凸多邊形的內角和」和「三連比」不屬於「素養」內容，難道它們就該從國中數學刪除嗎？技術型高中的數學老師或許沒意見，但是普通高中的數學老師可就難以接受了。這個假設的情況彰顯一個概念：十二年國教的數學課程不能僅針對「素養」的目的，還要肩負「學科」的責任。

所謂「學科」(discipline) 內容並不是「數學系」的學習內容，而是為了下一階段的學習而預備的數學知識與能力。前面說過，小學階段的數學教育目標，可能全是為了「素養」，但是國中階段就未必了，高中階段更不能僅注重「素養」而忽略「學科」任務。

假設我們接著要討論「凸多邊形的內角和」和「三連比」算不算國中階段的「學科」內容？這個議題就不能僅在國中階段的範圍內討論，而要把視野轉移到高中階段的需求（技術型或普通型）。就普通高中而言，凸多邊形是經常運用的數學物件，就算不必背誦內角和公式，但是將多邊形切割成三角形的思維方法，卻是相當基本的。例如 106 年學測第 11 題以新發現的密鋪五邊形（如右圖）入題，考生就需要具備三角形切割的基本能力。所以我猜高中數學同仁應該會贊成「凸多邊形的內角和」是國中階段該學習的數學「學科」內容。



但是高中數學用到「三連比」嗎？有些老師可能用三連比來解釋空間向量的平行（係數積），也可能用三連比的符號來歸納二元一次聯立方程式的解數量：

$$\text{若 } a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 \text{ 則方程組 } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 有無窮多組解，}$$

$$\text{若 } a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \text{ 但是 } a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2 \text{ 則方程組無解。}$$

不知道高中老師們還有什麼例子？如果僅有這種層次的需求，高中老師或許認為可以在需要的時候自己教，而且可能不需要國中階段「將兩組比化為三連比」的技術。經過這樣考慮，或許「三連比」就不算學科內容了（僅為舉例）。順帶一

提，108 數學課綱（草案）將「三連比」從 7 年級挪到了 9 年級。

如果（只是如果）「三連比」既不算素養內容也不算學科內容，難道是說它完全無用嗎？當然不是，不只是「三連比」，哪怕是「九連比」都可能在特定專業裡有用，例如很可能是烹飪和烘焙的必備知能。別忘了「素養」和「學科」教育的後面，還有「專業」教育。分析這三種層次的教育，是課綱設計者的職責，本文不再多寫。

以上舉例，讓我們站在高中立場看國中階段的數學課程，現在要將同樣的思維類比到高中階段數學課程內容的討論。普通高中並不從事「專業」教育，所以普高的數學學習內容僅有「素養」和「學科」兩種目的。總結性的「素養評量」應該是針對「素養」部分的課程內容所做的學習評量。

前面指出課綱的第一條理念為「數學是一種語言」，而「素養」則著眼於支持「終身學習」。融合這兩個觀念，數學的「素養」內容以「終身學習所需的語言」為判斷原則，而 108 數學課綱（草案）的高中階段，大致把素養內容安排在 10 年級和 11 年級的 B 類課程。課綱（草案）的內容選擇，一定還有可商榷之處，也有許多對現實的妥協——例如虛數 i 、入門的推論統計和最單純的微積分觀念，都不在素養內容之列——這些議題值得我們持續地討論。

普通高中數學課程的「學科」內容，就像國中階段一樣，並不能侷限在高中階段本身來討論，而要考量下一階段的學習。普高學生幾乎全部成為大學生，高中數學的「學科」任務不是為了準備大學的數學專業，而是為了準備大學泛理工商管之專業學系需要的共同數學相關課程。就像國中數學的「學科」內容應該考量高中的需求，高中數學的「學科」內容也該考量大學的需求。大學雖然學系紛沓，但所需的共同數學基礎，本質上可歸納為以下四種課程：

微積分、線性代數、統計、計算機原理

它們有時候會被冠以其他名稱（例如管理數學、矩陣計算、計算機概論等），但本質上就是上述四門課的內容。108 數學課綱（草案）的高中階段，大致把學科內容安排在 11 年級的 A 類課程，和 12 年級的選修數學甲、數學乙。形成性的「素養評量」可以涵蓋這些內容，但是總結性的「素養評量」就不適合涉及這些「學科」內容了。

回顧第一節提出的疑問 (1) 和 (2)，根據以上論述，作者認為「做三次平方得到 8 次方」應屬國中階段的素養內容，而「求解 $b^8 = 81^3$ 」應屬高中階段的素養內容，因為它們分別是關於「次方」和「方程式」這兩個數學基本詞彙的最基本語言，如果不能掌握，則嚴重影響未來的終身學習。

四、素養的表現向度

既然整個課綱都是素養導向的，而課綱以「學習內容」和「學習表現」來陳述課程目標，「素養」也可以拆開「內容」和「表現」兩個向度來討論。前一節論述素養該有內容的層次，但這一節卻想要指出，素養的表現並無層次。雖然在掌握內容的高度和運用之妙的功力上，人人素養不同，但是素養的表現卻全都可以用

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏教授的「國民數學素養」來概括描述：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

想要深入了解上述不算太短的「數學素養」一句話定義，應該讀李國偉教授等人的完整報告。以下，作者針對高中階段的數學內容層次，抓出幾個關鍵詞，為「素養評量」做一些不算太長的闡述。

4-1. 個人的

合作固然重要，但素養是個人的。在學校裡，學生應該經歷各種合作學習與群策解決問題的活動，但數學素養的評量是個人的評量，不必刻意關注合作解題的能力。關於這一點，臺灣的評量向來如此，不必特別改變什麼。

4-2. 辨識

這是數學素養的一項關鍵能力和「態度」，以前卻鮮少置入評量。老師們或許會問：既然是數學考科，題目當然是數學的，哪有機會考學生「辨識」問題與數學的關聯？此言甚是，但考科之間不無互相串通的可能。例如今 (106) 年國中會考〈國文〉科試題第 22 題，幾乎是一道數學題；詳見附錄 2。這一題不見得需要數學的「辨識」能力，也不見得深獲國文、數學老師的共同讚許，但已經開啟了一種想像，令人期待未來的發展。在這個可能性上，「辨識」的評量是可想像的。

即便是在數學考科裡，也能設計「辨識」能力的試題。例如今年 (106) 數學學測的第 1 題，不論在內容上以及在行為上，都能算是「素養」導向的試題；只可惜命題委員操之過急，使得這一題難度過高（答對率 53%），雖然把它放在第 1 題，卻成為鑑別前 40% 考生的題目。附錄 3 試將它改編成題組，並試著置入非選題，除了呈現素養評量的可能樣貌以外，也同時嘗試將書寫作答的題型，分散置入題組之中的命題方法。

參閱附錄 3，第 1 小題屬於比較傳統的辨識，作者預期前 80% 的考生能夠選出正確答案，第 2 小題則較為開放，需要「辨識」能力；因為是書寫題，也評量了「溝通」能力。當然兩個小題都需要運用數學知識與技能，這就不在話下了。

4-3. 工具與資訊

在教學、學習、評量中引進「計算機」工具，是 108 數學課綱（草案）最關切的一項措施。我個人甚至以這個項目的成敗，判定本屆課綱變革的成敗。在現今社會，一個不含工具與資訊能力的教育，根本沒有資格談論「素養」。

所謂工具當然不僅於計算機 (calculator)，課綱同仁已經在許多媒體上表明心跡：為了讓全體學生一次到位，並顧慮大型考試的現實考量，也因為發展適切的

教材教法需要時間，本屆課綱只希望能在「計算機」上跨出第一步。不管這一步有多小，畢竟我們過去三十年都沒跨成。不論這一步有多小，總勝過裹足不前。

所謂資訊當然也不僅於維基百科和搜尋引擎。PISA 已經試辦上網評量，許多公私立評量機構與研究單位，也正在積極研發「安全的」網路評量平台。例如國家教育研究院前任院長柯華葳教授，曾經主持一個前導計畫，試圖創造一個「可搜尋、可交談」的網路評量環境。融入資訊的教學，可以盡情在課堂裡發揮，但是融入資訊的評量，目前的確非常困難。所以本文按住這個話題，不再談論。

在「計算機」融入教學方面，課綱（草案）已經在學習內容的「參考教具」中提示其用途，課綱《說明手冊》（初稿）會盡量闡述其用意，編撰教科書的同仁也已經在發展教材。

在「計算機」融入評量方面，我國的經驗甚少，需要積極向國外取經，也必須依據我國課綱內容和特殊品味，設計新的評量題目。但是，新題目固然指日可待，但最好還是能從現有的題目出發，逐步修改，拾級而上，在過程中累積老師們的命題經驗與創造力。以下建議四個修改舊題的步驟。

第一步：容許攜帶計算機。這是最不費力的一步，只要容許學生在大小考試使用計算機，就可以了。踏出這一步，至少讓老師注意哪些題目不必再問，而哪些題目最好換個方式問。例如，第一節提出的疑問 (3)，如果可以使用計算機， $3^{3/2} \approx 5.2$ 就僅是操作而已，是否還有評量的必要？得視評量目標而定。

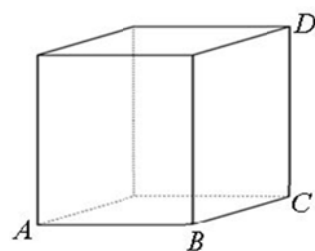
第二步：回答估計量值。數學處理「數」，但真實世界需要的經常是「量」，簡單的說，「量」就是「附加單位的數」。這個步驟就是在舊應用問題的最後，要學生在指定單位與指定精度下，寫出答案的估計值。此步驟幾乎不影響題目也不影響解題過程，只是在最後藉由作答的過程，提醒學生此題的現實意義而已。例如，一個應用問題的答案如果是 $\sqrt{72}$ ，單位是公尺，以前可能要求學生寫「 $6\sqrt{2}$ 公尺」，但比較符合情境的答案或許是「8.5 公尺」或甚至是「八公尺半」。

第三步：採用擬真數據。我們以前設計關於三角的題目時，總要精心規劃特殊角給學生作答。特殊角是教學過程中方便舉例的權宜之計，但是接近真實情境的問題，不一定總能使用特殊角。引進計算機之後，老師可以更留意情境的真實性與合理性（符合常識），而不必受到特殊角的拘束。

第四步：發揮新增物件。108 數學領綱（草案）因應計算機的融入而新增了少許物件，例如三角比的反查（不是反三角函數），還有角度的十進制與六十進制轉換（度分秒）。這些新物件都不是學習的「主題」，而是讓計算機搭配慣有課程，做一點點擴充，以提高數學課程與真實世界連結的可能性。

舉例而言，運用數學知識，我們以前就能計算某角的正弦、餘弦或正切。但是，真實情境可能想要估計那個角究竟有多大（或多小）？以前我們只能算到某角的三角比，然後就在那裡停止。此後，我們可以用計算機從三角比反查角的大小。

借用 106 年學測第 4 題的正立方體（如右圖），以 ABC 平面為參考水平面，若問從 B 點望向 D 點的仰角，則屬於國中階段內容的素養，即便准許使用計算機，可能大部分學生不用它也能回答。但是，若問從 A 點望向 D 點的仰角，恐怕就得藉助於計算機了。高中數學本來就有許多三角測量或空間向量的題目，需算出夾角的三角比；這些題目僅需很小的增修，就能融入反查三角比。



有些情境問題的夾角非常小，例如天文學中的「秒差」，以度為單位的量值並不適用，應該轉用「秒」為單位，例如 0.0007° 大約是 2.5 秒。這個步驟是計算機的一個簡單應用，而且僅是數學題目的一個小小延伸而已。

以上四個步驟是老師們可以將舊題目改編成容納計算工具之新題目的簡單作法。從這些簡單的改變開始，創新的題目將會如潮水般四溢。

4-4. 描述、模擬、解釋與預測

這四個動詞，可謂數學教育「無法承受的輕」。數學是如此的美好與實用，其威力與影響是如此之廣袤而深邃，但是因為在學習過程中，這四個動詞都被剝奪了它們的舞台，導致許多人心目中的數學，完全是偏見與誤解。作者個人的偏見是：我國過去的數學評量試題，完全沒有為這四個動詞設計題目的意識。所以，現在我們要一起為這四個動詞建立「問題意識」，其實這就是素養所謂「態度」的意思。除了自己思考以外，多參加志同道合的討論社群，多參考國外的考題，應該都有幫助。

附錄 3 題組的第 2 小題，透過書寫，或許搭上了「描述」與「解釋」的邊。再看 106 年學測第 4 題（原題在附錄 4），「描述」兩質點距離特色的方式之一，是「對稱於 0.5 秒的距離」。而「解釋」此對稱性的一種方式，是說明把立方體旋轉，使得 D 、 C 兩頂點與 A 、 B 兩頂點的位置互換，就可以看出例如 0.1 秒的距離和 0.9 秒的距離相等。

進一步的數學描述，譬如令 $f(t)$ 表示時刻為 t 的兩質點距離，如何以函數符號表述「 f 對稱於 $t = 0.5$ 」？另一個需要「解釋」的例子是， f 在立方體之內的定義域是 $0 \leq t \leq 1$ ，如果推廣 t 到所有實數，則 $f(t)$ 的意義為何？順著這個脈絡，要學生「預測」當 t 很小或很大的時候， $f(t)$ 是否仍然對稱於 $t = 0.5$ ？而當 t 越來越大， $f(t)$ 是會單調地越來越大、會大小震盪、還是會越來越接近某個定數？最後，「解釋」 $f(0.5)$ 發生最小值的方式之一，是 $f(t)$ 對稱於 $t = 0.5$ 且 $f(t)$ 在 $t \geq 0.5$ 嚴格遞增。（當然還應該討論 f 的連續性，在高中就可以免了。）

我們還可以把上述問題改成仰角，考慮在 AB 直線上等速運動的動點 P 望向定點 D 的仰角（相對於 ABC 水平面）。改成仰角，還是有數學素養的「描述、解釋、預測」可以做。

大多數老師（和高中同學）可能都用「參數式」解 106 年學測第 4 題（附錄 4），但是空間坐標與參數式應屬高中數學的「學科」教學目標，將來只有 11 年

級 A 類課程的學生學過。以上的解題思考過程，僅使用空間概念，應屬於 11 年級 B 類課程可達到的「素養」教學目標。經過適當的教學，而且題目經過適當的引導與設計，像 106 年學測第 4 題這樣的題目，可以改造為素養試題。而且，經過適當的引導，運用學科工具（參數式）的考生，不一定比運用空間素養（旋轉立方體）的考生更佔優勢。

4-5. 數學思維方式

非常籠統地說，數學思維方式的特長就在於數學模型的建立。數學模型可大可小，在高中階段因為缺乏微積分技能、也沒有足夠的程式寫作技能，所以很難想像大型數學模型的可能性。而小型的數學模型就是「公式」；我們雖然不主張學生「背公式」，但是說實話，數學真正的威力不就在於「公式」嗎？公式本身沒有錯，需留意的是我們教公式和考公式的「態度」。附錄 3 第 1 小題其實已經給了「全校師生玩過寶可夢比率」的公式，但那其實僅是原始數據的直接運用，而第 2 小題進一步運用間接數據追求「最簡公式」，雖然不是直接地評量數學思維方式，也算是體現了數學思維方式的特長。

數學思維方式的另一項特長是使用符號輔助思考；選對了符號，可以簡化思考的程序，還能增進思考的系統性。這件事說來簡單，但是它的深處潛藏著數學的成熟度，甚至可謂數學的品味與美感，是相當高層次的思維。譬如附錄 3 的改題，用大寫和小寫的字母 A 和 a 分別表示學生的總人數和玩過寶可夢的人數，相信是許多數學同仁會不約而同採用的符號系統，但是卻未必是高中生能表現的能力。數學教學與解題過程中，我們不斷地示範這種思維方式的特長，卻可能少了「臨門一腳」，沒讓學生意識到：符號的設計與運用，是數學課要學習的重點之一。106 年學測第 7 題，是一道無所謂公式而很需要善用符號做有系統之思考的問題，題幹如下：

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

（甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

（乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

這一題不到三成的答對率，僅有最頂端的 10% 考生能處理此題，顯見這方面素養的難度，也提醒我們更需要正視「數學思維方式」在教學過程與教育目標上的重要性。

上述所有考量，都難以透過選擇、填充題型來評量，因為它們本質上都需「數學溝通」，那也就是我要指出的最後一個關鍵詞了。

4-6. 溝通

如果要將數學素養的行為表現總括一個詞來講，我認為最重要最核心的，就是「溝通」了。國內已經注意到培育這項能力的重要性，而選擇、填充題型實在難以評

量此項，我們樂見國內大型考試逐漸「恢復」非選題。但是，非選題的閱卷成本（包含其公平性與可信度）也是必須考量的，行之多年的指考非選題配分方法，值得沿用；但指考的非選題數量太少，因此涵蓋的概念太少，配分又太重，不利素養評量的普遍性推展。因此 PISA 的題組式「簡答」題型，也是值得我們琢磨的命題方法。附錄 3 第 2 小題便是一個盼能拋磚引玉的初級嘗試。

五、學測數學考科

承接前面論述的所有意見，我們建議學測的數學考科應以「數學素養」的表現向度為主要評量目標，而將內容規範在 10 年級與 11 年級 B 類的必修課程裡。這項建議的關鍵之處在於不必考量 11 年級 A 類與 B 類課程的差異（以下簡稱 11A 與 11B），不必計較於 11A 和 11B 的交集，就直接以 11B 內容為準。

前面說過「學習內容」是有層次的，而不論採用哪種層次的數學內容，數學素養都是同樣的那些「學習表現」。既然 11A 是「學科」任務的必修課程，是為將來學習更多數學知能以解決更多實際問題而設計的，那些問題包含科學的與職業的情境，但是當然也包含個人的與社會的情境，而後者是 11B「素養」任務必修課程所預期培育的知識、能力與態度。如果假設接受 11A 課程的學生不能處理 11B 內容的問題，豈不是認定學習更多數學內容的結果，僅能解決科技專業裡的問題，反而不能解決生活周遭的問題，這怎麼說得通呢？

11B 僅有少量內容不在 11A 課程裡，那並不表示 11A 的學生不需要，而是假設他們還會在高三選修數學課，為了考量學習的效率而挪到後面去做更深更廣的學習。以下舉 11B 三項比較特殊的內容為例：

1. 球面上的經緯度，從球面投影到赤道面。對 11A 而言，這是空間概念與三角比的應用。
2. 圓錐曲線的基本認識。著重於它們在文化（或文明）脈絡中的意義，由於不在坐標平面上討論，所以沒有各種方程式和坐標的問題。對 11A 而言，這是空間概念裡的截痕或投影，以及從光學（點光源）和太空常識延伸出來的知識。
3. 連續複利。對 11A 而言，這是指數函數的一種延伸，也是運用計算機的實驗數據而獲得數學（極限）概念的前置經驗。

只要確定了以上學測考試的原則，教科書的編輯同仁，肯定來得及把 11B 的特殊內容，以例題或延伸學習的方式，搭配 11A 的學習進度，編進 11A 的教科書裡。而 11A 的學生，想必也能不太費力地學習這些搭配的內容。

結語

本文是根據民國 106 年 5 月 17 日至 6 月 7 日之間，作者在建國中學與劉柏宏教授、數學學科中心「素養多元評量小組」共同研習思考的結果，以及今年陸續在心測中心討論國中數學會考的發言（特別是張鎮華教授的發言），綜合而成。因為參與的人數甚少，而且沒有正式做成決議，更何況本人在會後增添了少許個人意見，所以本文畢竟只是一篇個人意見的陳述，盼能引起各方指教與討論。

最後，感謝曾政清老師籌辦前述工作小組，促成了這次合作的機會。也感謝蕭佑玟老師在 6 月 10 日寫給我一封長信，分享一些理念並且表達溫暖的支持。蕭老師的信，直接促使我開始寫本篇芻議。

附錄 1

106 年數學學測第 5 題。

· 原題

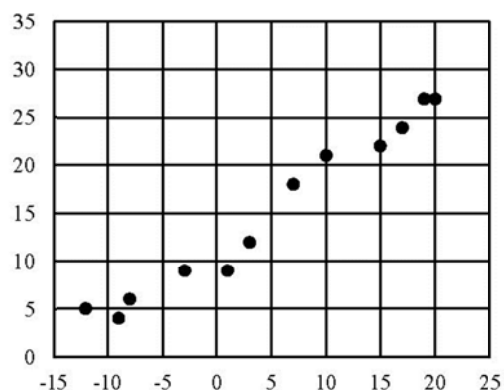
下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散佈圖。今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖。試依此選出正確的選項。

(4) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱。

· 題組

圖 A [圖略] 是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x ）與最高溫（縱軸 y ）的散佈圖。試據以回答以下問題。

1. 以下何者是圖一最下方三個點的數據？[選項略，各選項的數值皆為整數，評量目標是從散佈圖讀出數據。]
2. 若以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸繪製另一散佈圖，稱作圖 B，則以下何者是圖 B？[圖略，畫五幅散佈圖讓學生選，其中兩幅在 y 軸的分布與圖 A 不同，另三幅則相同，而且刻意不讓前三個資料點就能決定答案。評量目標是讀出數據之後重新製圖。]
3. 試依據圖 A 和圖 B，選出正確的選項。[選項略，就是原題的選項，評量目標是根據散佈圖判斷相關性，並比較兩幅散佈圖的相關性相對強弱。]

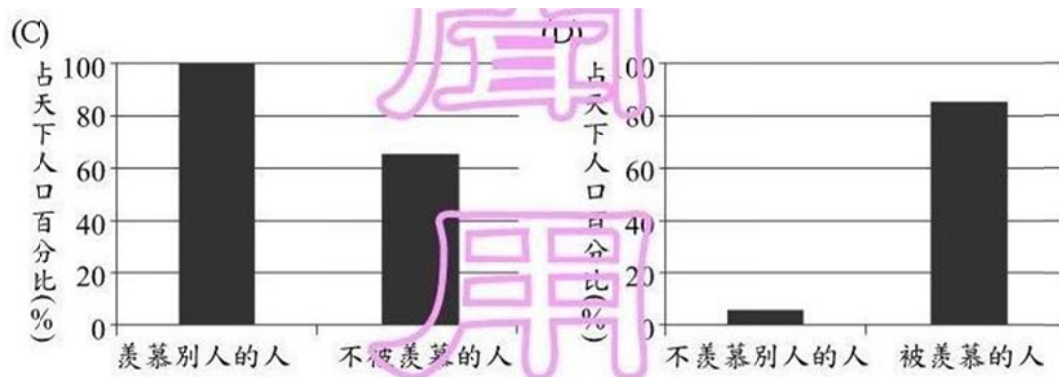


附錄 2

106 年國中國文會考第 22 題。

周老師在黑板上寫道：「天下沒有一個人從不羨慕別人，只有少數人從沒被別人羨慕過。」她請學生以圖表來表示這句話，下列哪一張圖表最恰當？





附錄 3

106 年數學學測第 1 題。

· 原題

已知某校老師玩過「寶可夢」的比率为 r_1 ，而學生玩過的比率为 r_2 ，其中 $r_1 \neq r_2$ ，由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。

- (1) 全校老師與學生比率 (2) 全校老師人數 (3) 全校學生人數
 (4) 全校師生人數 (5) 全校師生玩過「寶可夢」人數

· 題組

已知某校有學生 A 人，其中 a 人玩過「寶可夢」，有老師 B 人，其中 b 人玩過「寶可夢」。試回答以下問題。

1. 以下何者為全校師生玩過「寶可夢」的比率？

- (1) $\frac{a}{A} + \frac{b}{B}$ (2) $\frac{a+b}{A+B}$ (3) $\frac{a+b}{AB}$ (4) $\frac{ab}{A+B}$ (5) $\frac{ab}{AB}$

2. 令 $r_1 = \frac{a}{A}$ 為全校學生玩過「寶可夢」的比率，而 r_2 為全校老師玩過的比率，

其中 $r_1 \neq r_2$ ， $r = \frac{A}{B}$ 為該校之「生師比」。試從 A 、 B 、 r 、 r_1 、 r_2 之中挑出最少的資訊（兩個、三個或四個數），做出一條全校師生玩過「寶可夢」的比率公式，並解釋公式的正確性。

附錄 4

106 年數學學測第 4 題。

在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A, C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B, D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B, D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。

- (1) 兩質點的距離固定不變
 (2) 兩質點的距離越來越小
 (3) 兩質點的距離越來越大
 (4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
 (5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大

