對數：對應等比的等差數

單維彰・民國 113 年 11 月 28 日・12 月 8 日修

大多數讀者可能感覺自己跟指數（次方）很熟，卻感覺對數很陌生，甚至可怕。但是指數跟對數就像手心跟手背，明明是同一回事，為什麼卻在許多人心中留下迥然不同的印象？我認為根本的原因是：其實我們並沒有真的學習指數。

我們自以為熟悉的指數，可能僅限於正整數指數，例如 2 的 8 次方是 256、10 次方是 1024，九九 81，七七 49 等等。這些指數在生活與工作中還算常見，我們從具體的操作經驗獲得了「帶得走而且用得上」的知識——也就是成為我們的素養。有些人還記得負整數指數，例如 a 的 -1 次方是 a 的倒數，2 的 -3 次方是八分之一。但是許多人對指數的認識大概就到這裡為止；而整指數的經驗，不足以支持對數的學習。也就是說：正、負整數的指數經驗，不足以讓我們感覺指數與對數就像手心與手背。若要獲得這樣的感覺，還需要認識「零頭」指數（fractional exponents），也就是諸如 10 的 0.5 次方、0.3 次方、0.4771 次方之類。

搭配著正整數的質因數分解，例如 $108 = 2^2 \cdot 3^3$，以及在測量時常用的單位分數，例如 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$ 分別是 2 和 10 的 -1、-2、-3 次方，整指數可以說「天然地」出現在數學裡，可是零頭指數並不天然，它是人造的；事實上，在最早解釋如何建構對數的一本書裡（出版於西元 1619 年，明朝萬曆四十七年），就稱對數為「人造的數」。零頭指數並不「天然」，它是為了製造對數表而發明的。也就是說，零頭指數和對數是同時誕生的。

對數是拉丁字 logarithmorum 的對譯，這個字是一位蘇格蘭貴族約翰・納皮爾（John Napier）領主從一串描述此數的拉丁文中，抽取兩個關鍵字根組成的新字。中文也如法炮製，從它的描述：「對應等比（數列）的等差數（列）」抽出頭尾兩字，組成「對數」。但是在等比與等差對應以外，還要它們滿足一個算術關係：等比數列當中的兩數相乘除，要對應它們的對數相加減。

凡事皆有脈絡。納皮爾創造對數的前兆之一，是 Stifel（中譯施蒂費爾或斯迪富）創造了整指數觀念與符號。在他 1544 年出版的 *Arithmetica Integra*（不妨稱為《算術全義》）第 250 頁出現一個如表 1 的例子。[1] 表 1 的下列是等比數列，上列是等差數列，很明顯符合對數的第一個條件：等比與等差之間一一對應，例如表 1 等比數列中 4 對應的等差數是 2，8 對應的數是 3。再檢查第二個條件：

[1] F. Kline (1924)，*Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic , Algebra, Analysis*, 3rd ed。原著為德文，E. R. Hedrich & C. A. Noble 1932 年出版英文譯本；2004 年 Dover 重印。頁 147。〔致編輯：《科學月刊》不需要詳列文獻來源。我寫在這裡給自己留下記錄，月刊排版時可以刪除。〕

例如 $4\times 8=32$ 對應 $2+3=5$，而 5 是 32 的對數；又如 $2\div 8=0.25$ 對應 $1-3=-2$，而 -2 是 0.25 的對數。這張表揭示另一個重要的訊息：**負數不可或缺**：如果沒有負數，則像 $2\div 8$ 所對應的 $1-3$ 就不能算了。

表 1

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Stifel 在 1544 年出版的書裡已經預見表 1 的巨大潛力：它可以化乘除為加減。但是如果要讓它有實用價值，必須大幅擴充這張表，而這可能需要一個人投入畢生精力才辦得到，他自己不敢，只好留待來人。

如今我們看得出來：表 1 的下列是公比為 2 的等比數列 2^n，上列就是它的指數 $n=-3\cdots 6$。表 1 可謂史上第一幅對數表，但是它顯然沒有實用價值：因為它太「稀疏」了，也就是「解析度」不足。要提高它的解析度，也就是讓它變得比較「稠密」，則不能只放整指數，還要放零頭指數。在等差的 0 和 1 之間，還有好多好多零頭的數。譬如 $\frac{1}{2}$，誰的對數會是 $\frac{1}{2}$ 呢？根據第二個條件：假如 x 的對數是 $\frac{1}{2}$，則因為 $\frac{1}{2}$ 是 0 和 1 的等差中項（算術平均數），所以 x 必須是 1 和 2 的等比中項（幾何平均數）：也就是 x 滿足比例式 $1:x=x:2$，所以 $x=\sqrt{2}$。這就是為什麼要規定 $\sqrt{2}$ 就是 $2^{1/2}$ 的原因。

再看 $\frac{1}{3}$。$\frac{1}{3}$ 不能跟 0 與 1 形成等差數列，必須插入 $\frac{2}{3}$，才能造成等差數列 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$。同理，我們需要找兩個數 x、y，使得 $1, x, y, 2$ 形成等比數列。因此 x、y 要滿足連比例式

$$1:x=x:y=y:2$$

這正是古希臘遭遇倍立方問題時想出來的辦法（參閱本刊 113 年 3 月〈古希臘人對平方軌跡的探索〉），從這條連比例式誕生了立方根和拋物線。因為 $x=\sqrt[3]{2}$、$y=\sqrt[3]{4}$，他們的對數是 1/3、2/3，所以才需要規定 $\sqrt[3]{2}=2^{1/3}$、$\sqrt[3]{4}=2^{2/3}$。

依此類推，則 $2^{0.1}$ 是 $\sqrt[10]{2}$ 的意思，需求解 $x^{10}=2$ 才能獲得其數值。而 $2^{0.301}$ 是 $2^{301/1000}$ 也就是 $\sqrt[1000]{2^{301}}$ 的意思，按照原始定義，需求解 $x^{1000}=2^{301}$ 才能獲得其數值。這裡解釋的，就是零頭指數的意義，而它們是為了配合對數的需要而規定的。所以說：零頭指數和對數是同時誕生的。如今的中學課程，零頭指數來得太理所當然（took for granted），而且學生在不習慣使用計算機的數學教育裡，就

連零頭指數的運算以及應用都幾乎沒有操作機會，學生的實際經驗被侷限在整指數，並沒有機會獲得零頭指數的經驗，這就是後來難以學好對數的根本原因。如杜威指出的：「〔在學校無法獲得經驗的〕學生不得不在孤立無援的窘境下，趨於功利和狹隘，終而無法順遂地進行學習。」[2]

前述教學欠缺的狀況，是習慣累積的歷史共業，主要是由臺灣的數學教學文化造成的。108 課綱能幫忙的，只能把零頭指數和對數放在同一個單元，並且指定在教學與評量中使用計算機。但是課綱不能規範教科書的教材設計，就像教科書也不能規範教師實際的教學方法，而我們所有人更管不著的，是大考中心的考試題目。直到現在大考與會考仍然不准使用計算機（電算器），前述 108 課綱期待的對數教學，僅只在很少的教室裡發生。

文化只能緩慢地漸變，否則大家都很痛苦。而文化的改變，需要很多人發自內心的共識。這篇文章就希望能轉變更多人的心態。但其實一直都有想要改善對數教學的老師，例如在 108 課綱之前，蘇俊鴻（2003）和林倉億（2010）老師都想要提供學生真實的經驗；108 課綱改變對數教學單元之後，林倉億（2020）老師又重新設計了一次。[3] 我們期盼將來有越來越多人一起重塑教學文化。

話說前面提起的方程 $x^{10}=2$ 和 $x^{1000}=2^{301}$ ，在十六世紀可能真的沒有人嘗試過，一則因為真的太麻煩，但真正的原因可能還是沒有需求，也就沒有動機。雖然每個時代都有像嗜好般純粹出於興趣的數學，但是真正引起共鳴並且傳到今天的（例如對數），畢竟還是有需求的數學。前面兩個方程反而是在有了對數之後才求解的（數值近似解）：第一題的解是 $x=10^b$ ，其中 $b=\log 2\div 10$ ；第二題的解也是 $x=10^b$ ，此時 $b=0.301\cdot\log 2$ 。

前面的 $\log 2$ 是 2 的（常用）對數，意思是使得 10 的某次方等於 2 的那個指數。我們暫時不知道它是多少？只能從零頭指數的經驗得知，有某個介於 0 與 1 之間的小數，能讓 10 的它次方等於 2（在概算的意義下），寫不出它的數，就用 $\log 2$ 代表它。這個情況就像我們知道有某數的平方等於 2，不知道它是多少或者沒必要寫出它的數值時，我們以 $\sqrt{2}$ 代表它。

前面的 b 顯然也不是整數，於是 10^b 實際該怎麼算？成了另一個問題。但我們說指數和對數就像手心和手背，其實只要對數表夠「稠密」，譬如在（常用）對數表的對數欄（等差數列那一欄）查得到 b，則跟它對應的數（等比數列那一欄）就是 10^b 。可見，如果有對數表，則我們感到束手無策的計算，只要查表就好了：例如先查出 $\log 2$ ，做個簡單的計算得到 b，然後再查表得到 10^b 。只要有

[2] 杜威（1902c，頁 296）〈教育情境：中等教育篇〉，引自單文經《杜威的課程理論》尚未出版。
[3] 蘇俊鴻（2003）數學史融入教學—以對數為例，HPM 通訊 6(2,3)。林倉億（2010）數學史融入教學—以對數表為例，HPM 通訊 13(12)。林倉億（2020）對數教學的 4.5 節課，HPM 通訊 23(4)。

「表」，困難得令人望而生畏的計算，就變得易如反掌——手心翻手背，手背再翻手心。

說得輕鬆，這張理論上存在的對數表，要怎樣算出來？要知道次方與對數都沒有公式，只能從算術的基本原理，搭配各式各樣因事制宜的巧思，硬算。這個情況像極了托勒密面臨的「弦表」（參閱本刊 113 年 9 月〈九章算術缺少的臨門一「角」：角度、弦表與三角函數的發展〉）。當年托勒密給自己設定的目標是：從半度起，每半度算一條弦長，直到 180 度，總共要算 360 個弦長，每根弦的精確度是 60 進制的第 3 位小數。而（常用）對數表想要有實用價值，最初的計畫是算出一千萬以內自然數（7 位數）的（常用）對數，每個對數算出 14 位小數，也就是精確度為一百兆分之一。到底是誰提出這麼瘋狂的計畫？又是哪個傻瓜有勇氣執行這個計畫？

簡單說：提出計畫的是納皮爾領主。他可能在西元1614年出版第一種對數之後，才明白他花費二十年光陰製作的對數太「特殊」，想出了更自然更容易使用的第二種對數，因而萌生這個計畫。但他自知年事已高無力完成，正在感傷時不我予，接到一位倫敦格雷瑟姆學院的數學教授亨利．布里格（Henry Briggs）來信，不但深刻理解自己的傑作，還提出相似的改善想法。他們在1615年夏季會面，布里格承諾實踐這個想法。據一位陪客轉述，他們會面時「彼此懷著仰慕之情緊握雙手，不發一語地沈浸在感動之間達十五分鐘之久」。[4] 此情此景就像柳永描述的「執手相看淚眼，竟無語凝噎」。事實上，這正是我起心探究這段歷史的動念，我想要體會：這兩個男人究竟在感動什麼？

納皮爾生活在動盪的宗教衝突時期，他個人支持路德和喀爾文的宗教改革。他在 1593 年發表過轟動一時的文章，不但捍衛基督新教教義，還「證明」當時的教宗其實是一名反基督。[5] 在那麼不安的社會環境中，潛心做大量計算可能也是安頓身心的方法。

為什麼納皮爾想要算 7 位數的對數？可能因為托勒密的弦表經過一千年的進步，當時正弦表（sine table）的解析度提高到每分（60 分之一度）一個數值，而精確度提高到 7 位數，也就是令半徑為 1000,0000，除了 $\sin 90^\circ$ 以外，其他正弦都以 7 位整數呈現。[6] 至於為什麼想要用兩倍位數（14 位數）作為對數精度？可能是已經預估 10^6+1 的對數是 $6.00\cdots 00x\cdots$，希望像這種大數的對數還是有夠多非零的小數可用。

---

[4] 洪萬生主編（2024）。數之軌跡Ⅲ：數學與近代科學，三民。頁 23。此句的原譯出自蘇惠玉（2014），看注 7。

[5] M. Kline (1962). *Mathematics: A Cultural Approach*. Addison-Wesley。頁 200ff。

[6] D. Roegel (2021). A survey of the main fundamental European trigonometric tables printed in the 15th and 16th centuries. LORIA Universite de Lorraine, CNRS, INRIA. 2024/12/1 取自 https://hal.science/hal-03330572

因為 $\log 1 = 0$，第一個需要算的對數是 $\log 2$。高中數學有一道標準習題：問 2^{100} 有幾位數？這個習題要學生利用對數 $100 \times \log 2 \approx 30$ 推論 2^{100} 有 31 位數。有了對數，這個習題比反掌還容易。真正讓人感佩的是：其實這是納皮爾想出來，讓布里格計算 $\log 2$ 的辦法！

讓我們從簡單的數值來了解原理：$2^{10} = 1024$ 是 4 位數，寫成科學記號便是 1.024×10^3。根據 $\log 2$ 的定義：$2 = 10^{\log 2}$，得知

$$10^{10 \cdot \log 2} = 1.024 \times 10^3$$

1.024 也是 10 的某次方，不知道「某」是多少，但是不要緊，我們確定它不足 1——因為 $10^1 = 10$ 超過了 1.024——假設 $1.024 = 10^{0.x\cdots}$，則

$$10^{10 \cdot \log 2} = 10^{0.x\cdots} \times 10^3 = 10^{3.x\cdots}$$

所以兩邊的指數應該相等，也就是

$$10 \cdot \log 2 = 3.x\cdots$$

把 10 除到右邊，得到 $\log 2$ 的一位小數估計值：$\log 2 = 0.3\cdots$

接著，布里格將 2^{10} 自乘，得到

$$2^{20} = 10,48576$$

再將 2^{20} 自乘，得到

$$2^{40} = 109,95116,27776$$

因為布里格想要知道的是位數，所以他沒有用英國習慣的三位一節逗點，而是五位一節；可見 2^{20} 有 7 位，2^{40} 有 13 位。接下來他要將 2^{40} 自乘，而且此時他已經確定只需要算出最大的十五位數，第十六位以下的數不至於影響最後的位數，可以省略不算。他算出來

$$2^{80} \approx 12089,25819,61463 \times 10^{10} \text{ 共 25 位數}$$

最後他算 $2^{80} \times 2^{20}$ 獲得

$$2^{100} \approx 12676,50600,22823 \times 10^{16} \text{ 共 31 位數}$$

所以他知道

$$10^{100 \cdot \log 2} = 1.2676\cdots \times 10^{30}$$

同理於前面的解釋，他得到 $\log 2$ 的二位小數估計值：$\log 2 = 0.30\cdots$。[7]

---

7 H. Briggs (1624)，*Arithmetica Logarithmica*，頁 8。

布里格承諾納皮爾的是十四位小數，他要算 $\log 2$ 到小數點下十四位。為了這個承諾，布里格需要知道

$$2^{10000,00000,00000}$$

有幾位數？請讀者暫停，想像一下，有沒有勇氣做下去？布里格做了：它有 3010,29995,66399 位數！因此

$$\log 2 = 0.3010,29995,66398,\cdots$$

布里格還用同樣方法算出 $\log 7$。但是如果這樣做下去，可能他自己的一輩子也不夠算。布里格教授發明了另一種算法，那是非常接近現代數值分析思想的算法，也可以說是「微分」思想的前兆；雖然還是很苦，但至少比納皮爾的算法輕鬆一點。布里格把之前算出的 $\log 2$ 和 $\log 7$ 當作正確答案，用來確認自己的新算法有效。他在 1616 年夏天，帶著 $\log 2$、$\log 7$ 和他的新算法第二度赴蘇格蘭拜訪領主，納皮爾確認了布里格的算法可行。[8] 布里格回倫敦之後算出前 1000 個自然數的對數（每一個都算到十四位小數），本來要在 1617 年夏天帶給領主鑑賞，可是納皮爾在四月過世了，得年 67 歲。

納皮爾身後，布里格協助他兒子整理其遺稿，在 1619 年出版，就是前面提過的第一本建構對數的書。那本書解釋的是納皮爾的第一種對數，當時並沒有公佈製作的方法。納皮爾和布里格一起發展的第二種對數，才是我們學習的對數。第一種對數可能只有研究數學史的人才會學習了。

伴隨對數而生的，還有兩個重要概念：科學記號以及有效位數。在處理大數的過程中，科學記號應運而生，而且它和對數緊密相扣。這是 108 課綱指定對數單元要連結科學記號的原因。如今我們知道不存在有限小數 b 使得 $10^b = 2$。納皮爾和布里格應該不確知此事，但是從他們的計算經驗，應該感覺到算不出一個數 b 使得 10^b 等於整數的 2。於是他們設定有效位數為 14，要在計算過程中確保 14 位。只要能找到一個數 b 使得 10^b 落在 $2 \pm 5\times 10^{-15}$ 範圍內，就可以認為 $b = \log 2$ 了。此外，在正查、反查對數表時，也處處需要有效位數觀念。如今的中學生已經完全沒有這種經驗，因而缺少了某些數學概念，我們不知道這會造成什麼長遠的影響？

布里格在 1624 年出版了常用對數，但是他畢竟算不完一千萬個數，他公佈了前兩萬，以及九萬到十萬這些自然數的對數，並公佈了詳細的算法。空缺的七萬個對數，被荷蘭人弗拉克（Adriaan Vlacq）和他的夥伴補足，但是他們務實地將精確度降為 10 位數。十萬以內的完整對數表於 1628 年（明朝崇禎元年）由弗

---

[8] 蘇惠玉（2014）在 HPM 通訊 17(6) 發表的文章〈布里格斯的《對數算術》與對數表的製作〉對此新算法有詳細的翻譯與解釋。

拉克出版。納皮爾和布里格都沒有從對數表獲利（他們獲得名譽），具企業家精神的弗拉克倒是抓住了機會，藉由出版對數表以及其他數學表賺進好幾桶金。這份對數表經過歷代修訂增補，一直用到二十世紀中葉才被電腦取代。歐美的中學大約從 1980 年代開始取消對數表的教學，那是因為他們用計算機取代了查表。我國數學課程也跟隨世界潮流取消了查表教學，但是並沒有引進計算機；沒有人知道這會造成多少傷害？

雖然製造對數的人吃足了苦頭，可是一旦公佈了對數表，許多難得讓人望而生畏的計算變成易如反掌，造福了科學、工程與金融發展。可惜多數學生沒有獲得這樣的經驗，大多學生的經驗恰好相反：他們認為對數是給自己找麻煩的。這真是數學教育的一樁大冤案。「以簡馭繁」不僅是數學內部的價值觀，更是數學對社會與文化的真正價值：數學使得原本複雜難解的事情，變得簡單可行。我們很需要用心讓學生獲得這種數學經驗。

對大英國協（包括蘇格蘭在內）而言，納皮爾還有另一層象徵意義。在紀念納皮爾對數 300 周年的專文裡，英國劍橋數學教授 Hobson 指出：在納皮爾之前的數學進展中，英國人無足輕重，納皮爾好似幸運的領頭羊，在他身後拉起一串人才，使得英國在短短百年之內躋身數學領域的最前沿。[9]

[9] E. W. Hobson (1914). *John Napier and the Invention of Logarithm 1614*. Cambridge University Press. pp.47–48.