

# 樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較

許哲毓<sup>1</sup>、單維彰<sup>2</sup>、劉柏伸<sup>3</sup>

中央大學學習與教學所博士生<sup>1</sup>、中央大學數學系副教授<sup>2</sup>、中央大學數學所碩士生<sup>3</sup>

## 摘要

機率論據傳起源於紙牌、錢幣等博弈遊戲，是一種相當生活化的知識。對於大眾而言，機率是預測不確定性事件之基準，我們能從中獲得符合理論依據的訊息，做出相對有利的決策。在機率的教學中，為讓人理解並習得上述能力，樹狀圖常被用來釐清事件的種類。

「樹狀圖」在機率中，具備處理事件樣本之功能，它能系統化的細分主題、區分階層、觀看整體，並做邏輯性的列舉。我們能從精簡的樹狀結構和節點中，判斷兩個不同事件之組合情況。對於初學機率的學生來說，本身的機率知識是較為模糊的，思緒容易混淆，而樹狀圖能有效地幫助學生，將事件做細緻的分析；這樣的能力亦是日後學習「排列組合」的基礎。因此，本研究將參酌臺灣與英國中學數學教科書，探究其樹狀圖之教學與學習內容，比較兩者的異同。

研究發現，臺灣教科書在樹狀圖的教學上，採用系統化的思考去釐清事件，以直觀思考列舉或窮舉的方式找尋事件之樣本，將他們從模糊的概念轉換成有邏輯規則的排列，藉以確立機率問題中的樣本空間與事件。在上述過程中，臺灣教科書並未觸及關於機率的知識，將樹狀圖的功能限定在單純的計數上。相對地，英國教科書在樹狀圖的使用上，除了也有系統化的分類、尋找事件的總數以外，更將事件發生之機率紀錄在樹狀圖上，使得樹狀圖可以成為表現機率概念的模型。進一步觀察，可發現樹狀圖的結構內含互斥觀念，可直觀引導出聯集與獨立事件的概念，並能根據圖上的關聯性，做正確的推論。

臺灣數學課程在高中階段，以正規的數學關係來定義事件的獨立性，而英國則在國中階段就直接從情境脈絡引進獨立觀念，並以乘法來處理其機率計算（以加法處理互斥的聯集事件）。臺灣的國中數學課程沒有獨立概念，但是在國中自然領域的生物遺傳內容中，早有獨立事件之概念，而且學生在此情境之中似乎也沒有認識獨立性的困難。這些初步的證據顯示，事件的獨立概念及其機率演算原理，在國中階段不無處理獨立事件的可能。

本文建議臺灣可借鏡英國教科書中樹狀圖之教學法，不只將樹狀圖作為一種計數工具，也作為機率概念的模型，引導學生思考樹狀圖中每個階段隱含的資訊，用來推論複合事件的機率。換言之，在中學階段的樹狀圖教學上，我們不該限定於列舉事件之類的程序執行能力，而應著重於建立複合事件之機率概念，並提供以機率推論解決問題的學習機會。

關鍵字：樹狀圖、數學教科書、機率教學

# **Application of tree diagram in probability teaching - A Comparison of mathematical textbook in Taiwan and the United Kingdom**

Hsu Che-Yu<sup>1</sup>, Shann Wei-Chang<sup>2</sup>, Liu Bo-Shen<sup>3</sup>

## **Abstract**

Content analysis is engaged on the topic of the tree diagram in the context of probabilities for maths textbooks in Taiwan and England at the level of secondary schools (grades 7—9). The contents are classified into the levels of drawing the tree diagram to systematically list everything, put the probability on the branch, and the intuitive recognition of independent events and the multiplication of probabilities.

Calculating probabilities can be hard, especially for novices, sometimes we add them, sometimes we multiply them, and often it is hard to figure out what to do. Tree diagrams are particularly useful in probability since they record all possible outcomes in a clear manner. A tree diagram also used in strategic decision making, valuation or probability calculations. In textbooks of England, tree diagram starts at a single node, with branches emanating to additional nodes, which represent mutually exclusive events. A tree diagram is simply a way of representing a sequence of events and provides a strategic media to calculate the probabilities. It allows us to see all possible outcomes of an experiment and calculate their probabilities. Each branch in a tree diagram represents a possible outcome. Drawing tree diagram is a way for novices to visually see all of the possible events and avoid making mathematical error. But the textbooks of Taiwan limit students to draw the tree diagrams without exploring the extra benefits provided by them.

The analysis suggests that Taiwanese textbooks tend to stress on the whole tree diagram of probability, just like England. Basing on the findings of this study, we also suggest the curriculum to pay more attention on tree diagrams and to add a dimension of calculation on this subject.

## 一、前言

機率論據傳起源於紙牌、錢幣等博弈遊戲，是一種相當生活化的知識。隨著科技與社會的演進，我們對於預測事件之精確度也隨之提高，上述這些知識皆涉及「衡量」事件的思維，由於在有限的認知下，無法完全掌握事件的所有情況，我們只能以過去的經驗揣摩或猜測。而機率即是解析未知事件發生的基準。機率論發展至今，是嚴謹且邏輯性的知識，改變了大眾對評估、決策的觀點。透過機率處理了不確定性之事件，是很重要的一件事，根據機率的預測了解這個世界，進而做有利的決策。因此，機率具備跨領域應用之特色，協助我們判斷或決策，理解不確定狀況之輪廓。

在臺灣教育現場中，機率被教授於數學課程中。它不像一般的數學知識，由公式或定理去做定量的推導，而是需要足夠符合事件的資訊，才能做出最佳的解釋。Glencross (1998) 發現往往學過數學的人，對機率與統計並非有一定程度的瞭解，在面對數據科學的資料上仍會產生恐懼，抱持負面態度。對於初學的學生來說，本身的機率知識是較為模糊的，思緒容易混淆，「如何衡量事件」成了首要的知識。我們希望能從一個混亂且複雜的事件中，一層一層的釐出我們所期望的資訊，依序歸類。如此邏輯化地推算機率模式，做出有效預測。因此，需要一種能分門別類的工具，用來簡化這類的問題。而我們發現如今最常被使用的工具是樹狀圖，它能有效地幫助學生，將事件做細緻的分析，提高學習機率概念的效能。

研究者也從西方國家中，發現英國的中小學教育中，亦有應用樹狀圖解決機率問題的課程內容。英國教科書內容採用螺旋式課程設計，機率內容分佈在不同年級中，屬於資料處理 (data handing) 的大主題。英國的機率內容篇幅與臺灣有所差異，研究者揣測英國對於樹狀圖的應用，有不同角度的觀點，並在教學中實踐這樣的模式。而 Floden (2002) 也指出教科書在教學中扮演著決定性的重要角色，影響層面包涵教師教學與學生學習，三者之間關係密切。因此，本研究將參酌臺灣與英國中學數學教科書探討：

1. 兩國教材在樹狀圖概念層次上之分佈為何？
2. 根據上述分佈並舉例分析其相異之處，釐出樹狀圖如何解決機率問題，延伸出何種機率概念？

## 二、文獻探討

### 2.1 機率

關於機率這門源自考慮賭博中的機運科學，必將成為人類知識中最重要的一部分 (Laplace, 1812)，且生活中大部分的重要問題，將都會引導至機率層面的知識 (黃文璋, 2003)。研究者認為在未來社會中，學生確實需要具備處理「不確定性」知識之能力。

回顧機率發展，黃文璋 (2003) 指出機率論的發展可粗略的分為三個階段。在第一階段是為了解決一些實際上所遭遇的問題，此時人們只求將這些問題的解答找出來。。

第二階段，建立抽象的系統，將原有的問題變成此系統之特例。這些問題明確地進入數學的領域，但是這些從實際經驗所產生的問題，仍然與直覺有密切的關係。第三階段，即數學機率，逐漸將問題抽離它們實際的來源，取而代之建立一些公理，經由這些公理，可推導出許多結果，因而對我們探討的一些實際的問題，可有更清晰的概念。

Shaughnessy (1992) 將機率大略分為四種，而吳靜瑜 (1999) 的研究將其統整分述如下：

- 1、主觀機率：指機率的大小，是依照個人的信念或主觀的觀點的呈現，尚有賴於將它化成數學方式來判斷。
- 2、古典機率：機率是假設在隨機的試驗中，每一事件發生的機會均等，數學家稱此種是唯一均勻的機率分配，亦稱為理論的機率或先驗機率。
- 3、實驗機率：機率的計算是藉著觀察重複試驗的不同結果的相對次數，亦即是根據實驗設計的觀察結果來決定事件發生的可能大小，故也稱為次數機率。
- 4、形式機率：利用數學法則或定理來計算機率，有時也稱為客觀的或標準的機率。

綜上所述，面對複雜事件，直覺很難正確評估對應的可能性，機率的數學學習凸顯出它的重要性。因此，學生對於機率的學習是值得我們探討的議題 (黃文章, 1999)。目前臺灣從九年級下開始安排不確定性的課程。這樣的安排，與世界的趨勢略有出入，值得思考我國在機率與統計上的設計。而本文針對應用樹狀圖之機率做分析，故不對統計部份做討論。

## 2.2 機率教學

Konold (1991) 指出人們處理的資訊能力是有限的，為了從大量的資料中，迅速做出決定，人們必須運用自身經驗來進行判斷。Shaughnessy (1992) 亦指出我們對於事件發生的頻率，都存有自我中心的印象 (egocentric impressions)。這些都會影響學習機率的概念。研究者認為機率概念雖不困難，如同 Bognar 和 Nemetz (1977) 指出學童在未接受機率教學之前，可從生活經驗中了解機率的簡單概念。但機率的評估容易被經驗所影響，導致與機率論不同之結果。有些學者亦指出類似證據，例如 Kahneman 和 Tversky (1972) 指出人們的判斷不同於已被公認的機率理論，而 Tversky 和 Kahneman (1973) 指出，人們在進行機率判斷時常會使用一些策略，這些策略時常造成快速且大致上合理的結果，但卻往往和機率理論相違背。Amir 和 Williams (1994) 報告指出，態度、信念、經驗、語言都可能影響孩子的機率思維。

在機率學習中，Shaughnessy (1992) 發現直觀、先備概念、迷思概念、錯誤、非正式的解釋，都已經充斥在機率與統計的學習裡，亦認為條件機率的語言讓學生感到困擾，導致迷思概念的產生。因此，研究者認為給予學生正式的機率教學，是有意義的，Green (1983) 也指出在機率與統計的教學中，運用有系統的方法是必要的，能避免學生產生與該主題有關的迷思概念。Fischbein (1975) 認為兒童對於機率的初步直覺經驗仍很薄弱，需要經過正式機率教學來協助其發展與增強。藉由教學，可以教導兒童機率

概念或改正兒童的機率迷思概念。

研究者認為學生機率概念的發展，應具備一項工具，就是樹狀圖。根據《牛津英語詞典》，樹狀結構與樹狀圖這兩個名詞，在 1965 年首次出現在諾姆·喬姆斯基的著作 *Aspects of the Theory of Syntax* 中。「樹狀圖」是一種能系統化的細分主題、區分階層、觀看整體，做邏輯性的列舉，並以圖象方式表現出來的方法。我們運用樹的象徵來表現出構造之間的關係，樹狀結構只是一個概念，沒有限定單一形式來呈現。樹狀圖都是一個有方向性且無循環的圖形，我們能從精簡的樹狀結構和節點中，判斷兩個不同事件之關聯性。

蔡文煥（1998）引用 Green（1987,1988）對於兒童在皮亞傑機率發展階段之研究，發現在 3000 名十一歲到十六歲的英國學生之中，大部份學生尚未發展到形式運思期，即沒有思考抽象化知識的能力。亦發現學生對樹狀圖和乘法原則均不甚瞭解，因此 Green 建議在學校中藉由廣泛，有系統的教學課程，以建立正確的機率觀念。如今，四分之一世紀之後，我們發現在英國 Pearson 版本的教材中，將樹狀圖和乘法原則以螺旋式設計導入課程，經由系統化的教學後，推論現代的英國學生應有具備此能力，並培養出正確的不確定性思維。相較之下，臺灣在過去 20 年間，僅在 9 年級教科書中有樹狀圖的介紹外，學生仍然未接受到乘法原則的正式教學，在機率的學習中，進度明顯較英國不足。

### 2.3 教科書

教科書是重要的教學媒介，教材內涵影響學生的學習，對教材進行深入的分析與比較有助於學生的學習（Yang, Reys & Wu, 2010）。而課程一般分為兩類，其一認為課程就是學科或是科目的總合；其二是課程為學生在學校學習的總經驗（Beane, Toepfer & Alessi, 1986）。楊龍立（2006）指出各國公布的課程標準是具有計劃特性的課程組織，其構成成分及順序安排，是一種人為計劃性的設計，學科亦可視為一種計劃性的知識體系，故課程的「組織」特性及「計劃」特性是不可或缺的。而臺灣的教科書乃根據課程綱要而編製，符合「組織」特性及「計劃」特性。在機率課程上，陳欣民、劉祥通（2002）指出，課程設計若能以學童的機率迷思概念出發，藉此引導學童修正自身的迷思，而教師又能於教學中適時察覺並破除學童的機率迷思，將使學童之機率概念發展合宜。尤欣涵、楊德清（2010）在臺灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計比較中，以「情境設計與佈題方式」、「解題策略的發展方式」、「連貫性與延伸性」三種學習議題上的角度分析，發現臺灣情境單一，教材多為教師示範例題，學生模擬其解題策略單元，最後並無延伸性題型。研究者發現文獻中除了機率課程的安排，將影響學生對於機率的學習外，上述研究多針對學習理論上的思維，缺少機率論在數學知識上的探討，因此，本研究選用臺灣與英國兩套數學教材，探討在機率知識方面的差異性為何，需更深入的進行分析。

### 三、研究方法

歐用生（1994）認為內容分析法為融合量化與質性的分析，採客觀與系統的態度，進行資料內容的探究，藉以推論內容之意義性。在教育研究上，透過試題的分析或文件資料的彙整能獲得核心價值（徐偉民、徐于婷，2009）。本研究目的欲針對臺灣九年級數學教科書（南一、翰林）與英國 Pearson 版本 Exploring Maths Tier6 教材在機率的樹狀圖教材作比較，故採用內容分析法。

本研究以教科書內用來教學或舉例的「題」作為分析單位，又將樹狀圖教材內容概念層次分為「樹狀圖建立」、「具有獨立性」以及「在樹枝上呈現機率」以及「機率相乘」等四部份，呈現兩國在樹狀圖教材之差異性。

#### 研究對象

本研究以立意取樣的方式，選取臺灣兩版本教材與英國 Pearson 版本教材為研究對象，進行教材內容的分析比較。以下，說明臺灣教材與英國 Pearson 版本教材的樹狀圖課程發展背景及內容。

#### 1.1 英國 Pearson 版本 Exploring Maths Tier6

英國的國定標準課程 1—11 年級，在時程上，11 年的國民義務教育分成四個階段（Key Stages）；1,2 年級是第一階段（Key Stage 1），3,4,5,6 年級是第二階段，7,8,9 年級是第三階段，10,11 年級是第四階段。本研究所選 Tier6 適用於 7-9 年級之學生，但每位學生的數學能力有所不同，使得每位學生所學之進度有所不同。國定課程將學科粗分為核心科目（Core Subjects）和基礎科目（Foundation Subjects）兩大類，其中數學屬於核心科目之一。英國的數學教育強調「溝通」，能正確使用數學詞彙與符號，精確使用數學語言（包括統計數據）的溝通。這樣的思維亦在教科書中實踐。本研究針對應用樹狀圖解決機率問題之教學例題作為研究樣本，共選出 26 題。

#### 1.2 臺灣教科書（南一、翰林版本）

本研究選取的兩版本教科書，皆是依據 97 年「九年一貫數學領域課程綱要」的能力指標編寫而成。臺灣現今強調帶得走的能力，其內容多採用真實生活情境，自身日常經驗引導學習，教導學生數學基本概念，並期望學生能在未來真實生活中，應用數學知識解決所遭遇之問題。本研究針對應用樹狀圖解決機率問題之教學例題作為研究樣本，共四題。

### 四、教材內容分析結果

針對我國教材與英國 Pearson 版本教材在機率內容方面，首先呈現臺灣與英國在各層次上之分佈，再針對一、樹狀圖建立；二、具有獨立性；三、在樹枝上呈現機率；四、機率相乘等四個樹狀圖概念層次做比較，分析臺灣與英國教科書在樹狀圖之教材上的差異。

如下表 1，臺灣數學教科書關於應用樹狀圖的機率部分，共有四題，且概念層次都是屬於層次一、樹狀圖建立，英國 Pearson 版本共有 26 題，概念分布上四者皆有。題

數上，臺灣明顯少於英國，教師的教學上比重難免也會有所差異，且學生缺乏練習樹狀圖的機會。

表 1 樹狀圖之概念層次表

	1. 樹狀圖建立	2. 具有獨立性	3. 在樹枝上呈現機率	4. 機率相乘	總數
英國	5	10	5	6	26
臺灣	3	1	0	0	4

#### 4.1 樹狀圖建立

A. 英國 Pearson 版本教材例題如下：

這裡有一些紅色襪子、藍色襪子、綠色襪子在抽屜中，Natalie 從抽屜中選出 2 隻襪子，請利用樹狀圖畫出所有可能的結果。

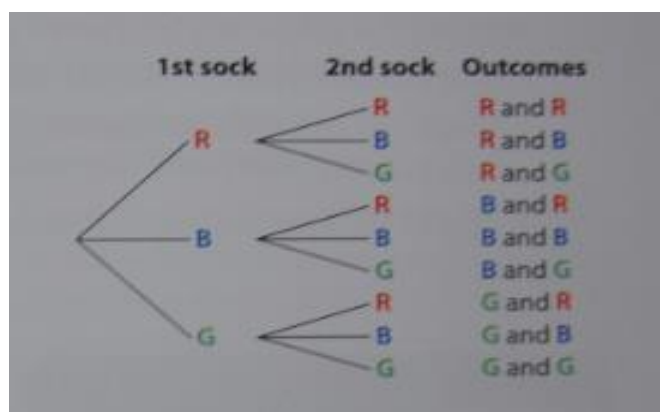


圖 1 英國 Pearson 版本 Tier6

此題的最後一句，明確指出建立一個樹狀圖以呈現可能發生之情況，屬於樹狀圖建立。佈題上，以真實生活生為主軸，未有情境，條件與訊息清晰，數字與敘述合乎常理邏輯。

B. 臺灣教材（南一與翰林版）例題如下：

**例題 5 投擲骰子的機率**

連續投擲一顆公正的骰子兩次，已知第一次出現的點數為奇數，第二次出現的點數為質數，則：

- (1) 試以樹狀圖列出所有可能的情形。
- (2) 第一次的點數小於第二次的點數的機率是多少？

圖 2 臺灣教材（南一與翰林版）

此題的第一個問題，明確指出建立一個樹狀圖以列出所有可能，屬於樹狀圖建立。佈題上，題目的數字與敘述皆是數學概念，雖非困難的知識，但較顯得生硬，缺乏生活經驗的連結。

**例 5** 利用樹狀圖求某事件的機率

班長想要對小妍、小霖、小真三位同學進行三字經抽背，若抽背的順序是任意選定的，則：

- (1) 總共有幾種不同的順序？
- (2) 小霖是最後被班長抽背的機率是多少？
- (3) 班長對小妍抽背完後，接著對小真抽背的機率是多少？

圖 3 臺灣教材（南一與翰林版）

此題的標題明確指出利用樹狀圖求某事件的機率，屬於樹狀圖建立。以真實生活佈題，具有情境，題目敘述用字明確與合理。

**4.2 具有獨立性：在完成樹狀圖的繪製後，導入獨立性之概念。**

A. 英國 Pearson 版本例題如下：

覆盆子冰淇淋和藍莓冰淇淋都銷售比為 1:2。每一個結果的機率都相同，都是 1/9，樹狀圖中呈現所有可能之結果。

a. 兩名顧客挑選不同口味之機率為何? ( $\frac{4}{9}$ )

b. 至少挑選一次藍莓冰淇淋之機率為何? ( $\frac{8}{9}$ )

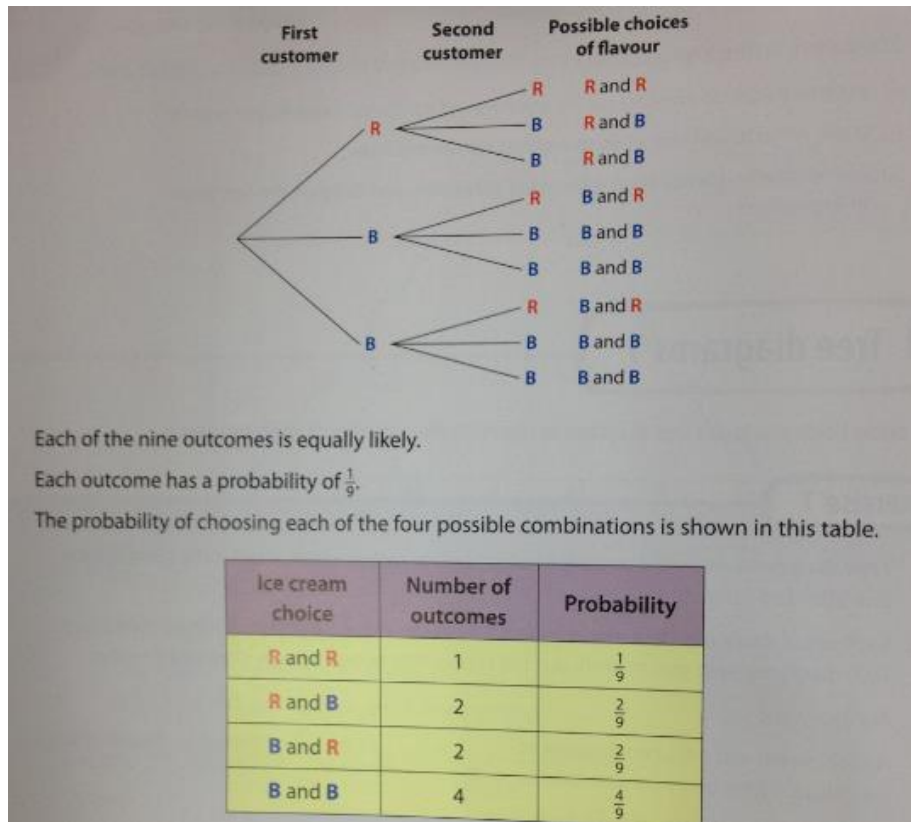


圖 4 英國 Pearson 版本 Tier6



題目的表中，明確指出每個事件之發生機率都不互相影響且機率和為1，對照其樹狀圖，更可以發現，每一層樹枝所代表之事件都不影響第二層樹枝，所以具有獨立性。佈題以真實生活敘述情境，題目敘述用字明確與合理，數字經由精心設計，學生能將重心放在機率學習，而非數字計算上面。

B. 臺灣教材（南一與翰林版）例題如下：

### 例題 5 投擲骰子的機率

連續投擲一顆公正的骰子兩次，已知第一次出現的點數為奇數，第二次出現的點數為質數，則：

- (1) 試以樹狀圖列出所有可能的情形。
- (2) 第一次的點數小於第二次的點數的機率是多少？

圖 5 臺灣教材（南一與翰林版）

此題的樹狀圖中，每條樹枝所代表之事件結果皆互相不受影響，屬於具有獨立性。

### 4.3 在樹枝上呈現機率：在完成上述兩項後，將機率加註到樹狀圖的樹枝上。

A. 英國 Pearson 版本教材例題如下：

Sally 和 Craig 將去搭火車，Sally 提早到的機率為 0.8。Craig 提早到的機率為 0.3。兩事件具獨立性。

a. 建立樹狀圖並將機率在樹枝上呈現

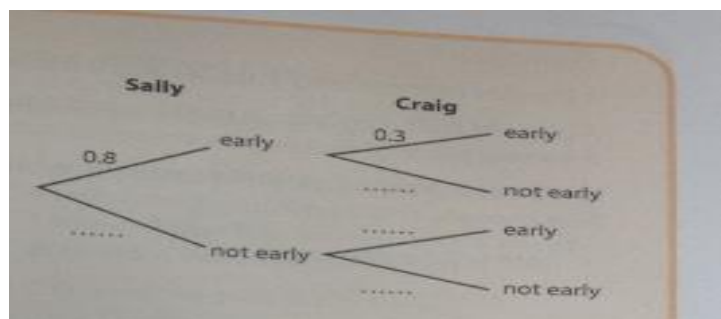


圖 6 英國 Pearson 版本 Tier6

在樹狀圖的樹枝上填入每條樹枝所代表事件之機率，屬於在樹枝上呈現機率。整個樹狀圖更能清楚表達其機率上的意義，明顯與樹狀圖之分類事件功能區分出來，能由每一條樹枝瞭解其事件的機率，也能比較不同樹枝所代表之事件之差異性。佈題以真實生活建構情境，敘述流暢且用字明確。此題之解答如下：

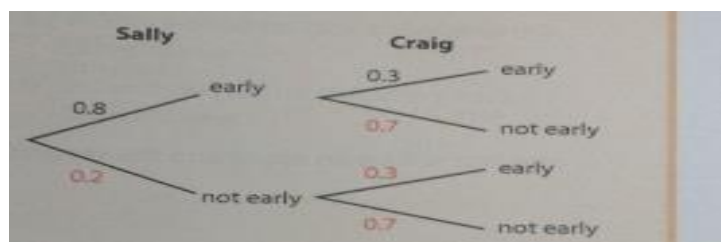


圖 7 英國 Pearson 版本 Tier6

B. 臺灣教材例題如下：無此概念。

#### 4.4 機率相乘：由樹狀圖上的機率，將事件所發生之機率求出。

A. 英國 Pearson 版本教材例題如下：

承接上例題，另有兩道問題 b. Sally 和 Craig 同時提早到達之機率為何？c. 只有一人提早到之機率為何？

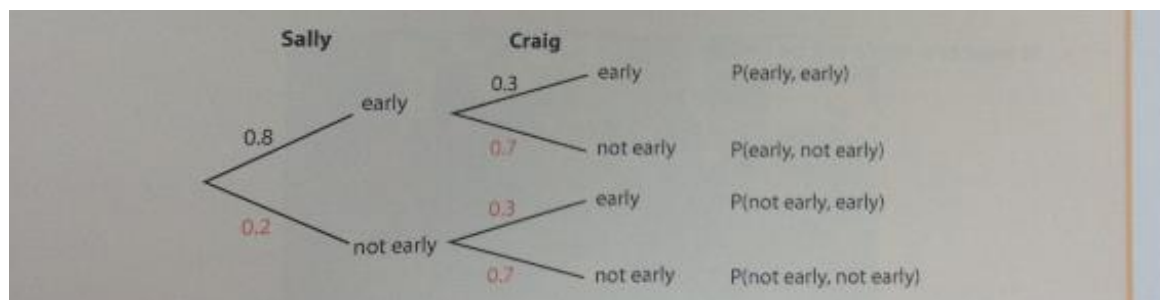


圖 8 英國 Pearson 版本 Tier6

經由樹狀圖上的機率，求出每一條樹枝之機率，屬於機率相乘。

B. 臺灣教材例題：無此概念。

## 五、結論

在題數上，臺灣的樹狀圖教學例題明顯少於英國，影響教學時間的比例分配，導致教師可能較不重視樹狀圖的概念，其次，學生在樹狀圖上的練習機會也受限制；雖然樹狀圖的機率問題並非困難的概念，但在臺灣課綱現況，學生為初次學習機率內容，理應規劃較多時間來做練習。臺灣教材傾向將樹狀圖作為特定機率問題的解題工具，而非建立樹狀圖與機率之概念。英國方面則可能有充裕的教學時間，教師可能充分完整的教授，將樹狀圖如何應用在機率解題帶給學生，而學生也可能有足夠的時間作練習，有條理地建立此概念。

在樹狀圖概念層次上，臺灣只在層次一和層次二有例題分佈，顯示臺灣對於樹狀圖的使用，只關注在分類事件上，並沒有針對樹狀圖做延伸之用途。臺灣教師在解決機率問題上，只以計數方式來確定事件發生之數量，沒有將機率填入樹狀圖的樹枝上，這使得樹狀圖停留在一般的使用，不能將其轉換為機率的樹狀圖，如此亦無法針對獨立事件或是機率相乘之概念做應用，

英國在四個層次上皆有例題分佈，從一開始如何建立樹狀圖，導入獨立事件，將機率填在樹枝上，最後由完整的樹狀圖闡述機率相乘之概念。不只是將樹狀圖視為一種解題工具，而是將樹狀圖應用在獨立性與機率相乘概念上，其中又以將事件發生之機率填入每條樹枝上最為關鍵，它能使整個樹狀圖轉變為針對機率問題而建立，而非一般的事件分類圖。這樣的觀念轉換，讓我們在看樹狀圖時由於每一樹枝所代表之事件都是互不影響，更能確立獨立性的概念。沿此脈絡下，機率相乘的概念及導入其中，也變得自然。

## 六、建議

根據研究結果，我們發現臺灣與英國之間，對於機率的重視程度是有相當的差距，主因歸咎在臺灣現行 97 課綱中，提及機率的部分只有一條：「能在具體情境中認識機率的概念」，使得有關機率的例題數甚少。相較於英國教科書，教學時間與學習比重都較顯充足，以螺旋模式安排機率課程，嚴謹的結合學科結構與學生之認知發展，提供一套具有邏輯先後順序的概念組合，讓學生循序漸進探究一套逐漸加深加廣的機率內容。上述課程設計亦提供教師明確的教學架構，可以依此做精緻的教學設計，發展完備的教學模組。

在應用樹狀圖解決機率問題之脈絡下，他們除了建立樹狀圖外，更導入互斥的聯集、獨立性以及機率相乘，這些都是臺灣九年級的教材沒有的內容。在教學上，產生極大的差異性。未有機率的樹狀圖就如同一般的分類圖示，沒有機率概念融入其中，而英國卻能在樹狀圖教學中，確實結合機率概念，使其圖示能直接說明用來計算機率，使得初學者也能透過圖示理解機率概念，不需經由繁複的數學模式下理解，如集合論與排列組合。

此外，互斥的聯集事件機率相加，以及獨立事件的機率相乘，臺灣教科書都是在高中階段由集合觀點來詮釋。我們發現英國在學習機率前，並沒有學習過集合的操作，也就是說這些機率內容，並非一定要經由集合論才能夠被解釋、教導，這與當前臺灣課綱或是教科書，對於機率論的前備知識有相當認知上的不同。更有甚者，臺灣慣於將排列組合作為機率的先備知識，但英國不用數學理論證明這些概念，而是藉由樹狀圖結構呈現互斥，再由整體模型呈現獨立性，以視覺化方式讓學生理解。

綜上所述，本文建議我國在應用樹狀圖解決機率問題的教材上，應以另一角度思考，為何我們非要限定將集合論與排列組合作為機率論的先備知識，又固定用學習數學的方式來學習機率？機率這門最貼近真實生活的學問，應以最具溝通性的方式教授，我們也可借鏡英國教科書中，看到樹狀圖這項特色，具邏輯性地將互斥聯集與獨立性等概念完整呈現，引導學生思考樹狀圖中每個階段隱含的資訊，用來推論複合事件的機率，讓學生體會圖形視覺化的學習，減輕其數學理論的負擔。再者，我們也認為九年級學生，有可能利用樹狀圖，學習機率的互斥性機率相加與獨立性機率相乘。

以臺灣在 TIMSS 或是 PISA 的機率統計主題成績來看，世界排名前三，也超越英國。且臺灣在國中自然領域的生物遺傳內容中，早有獨立事件之概念。臺灣學生是有這樣的概念，也有足夠的能力，學習上述機率知識。換言之，在中學階段的樹狀圖教學上，我們不該限定於列舉事件之類的程序執行能力，而應著重於建立複合事件之機率概念，並提供以機率推論解決問題的學習機會。

## 七、參考文獻

1. 尤欣涵、楊德清 (2010) 臺灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較。臺灣數學教師電子期刊, 22, 34-57。
2. 左臺益 (主編) (2015)。國民中學數學 (初版, 第六冊, 三上)。臺南市: 南一。
3. 吳靜瑜 (1999)。國小六年級學童機率概念之研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文, 未出版, 嘉義。
4. 徐偉民、徐于婷 (2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析: 臺灣與香港之比較。教育實踐與研究, 22 (2), 67-94。
5. 張幼賢 (主編) (2015)。國民中學數學 (初版, 第六冊, 三上)。臺南: 翰林。
6. 陳欣民、劉祥通 (2002)。從兒童機率迷思概念之文獻分析談機率單元的教學與課程。科學教育研究與發展季刊, 26, 40-51。
7. 黃文璋 (2003)。機率論。臺北: 華泰。
8. 楊龍立 (2006)。論課程的本質意義。教育學報 (香港中文大學), 34卷1期, 97-116 頁。
9. 歐用生 (1994)。教育研究法。臺北: 師大書苑。
10. 蔡文煥 (1998)。國小統計教材機率初步概念之設計理念與實際。國小新課程概說 (高年級)。頁 257-266。臺北: 教師研習會。
11. 蔡欣潔、葉啟村 (2004)。國小六年級學童機率概念表現之研究。93 學年度師範校院教育學術論文發表會, 1361-1390。
12. Amir, Gilead S., & Williams, Julian S. (1994). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18<sup>th</sup> conference for the Psychology of Mathematics Education 2 (pp. 24-31). Lisbon: Universidade de Lisboa.
13. Anita, S. (Ed.). (2009). Exploring Maths: Tier 6. England: Pearson Longman.
14. Bean, A., Toepfer, C.F.Jr. & Alessi, S.J.Jr. (1986). Curriculum Planning and development. Boston: Allyn and Bacon.
15. Bognar, K. & Nemetz, T. (1977). On the teaching of probability at secondary level. Educational Studies in Mathematics, 8, 399-404.
16. Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
17. Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. In A. C. Porter & A. Gamoran (Eds.), Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement (pp. 231-266). Washington: National Academy Press.
18. Glasersfeld (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education (139-165). Holland: Kluwer.

19. Glencross, M. J. (1998) Understanding of chance and probability concepts among first year university students. In L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee & W-K. Wong (Eds.) (1998) Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. Voorburg: ISI Permanent Office, Vol. 3, 1091-1095.
20. Green, D. R.(1987). Probability concepts : Putting research into practice. *Teaching Statistics*, 9 ( 1 ) , 8–14.
21. Green, D.R.(1988). Children's understanding of randomness : Report of a survey of 1600 children aged 7–11 years. In R. Davidson & J. Swift (Eds.). *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, B. C. : University of Victoria.
22. Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective probability : A judgment of presentativeness. *Cognitive psychology*, 3, 430-454.
23. Kahneman, D. & Tversky, A. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, 5, 207-232.
24. Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von.
25. Laplace, P. (1812). *Th éorie Analytique des Probabilit és*. Courcier, Paris.
26. Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* ( pp.465-494 ) . New York: Macmillan.
27. Yang, D.-C., Reys, R. E., & Wu, L.-L. (2010). Comparing the development of fractions in the fifth-and-sixth grades' textbook of Singapore, Taiwan, and the U.S.A. *School Science and Mathematics*, 110(3), 118-127. doi:10.1111/j.1949-8594.2010.00015.x.