排列組合的高中課程

李國偉・單維彰

2009-01-14 α-version

2009-04-08 α_1-version

根據大考中心的試題研究報告，排列組合是個『困難』的課題。在指定考科中，不論怎麼出題，排列組合的答對率或得分率經常不到 25%。但是，檢視近三年 (95–97) 的三大考試：學測、數甲和數乙，以教師和學者的客觀眼光看來，實在不算困難：那些比較需要思考的題目，答案都不超過 30，甚至不超過 10，只憑列舉就能解決問題；那些數值較大的題目，都是乘法原理的最直接運用，只有一題外加了環狀排列的觀念。

面對排列組合長期的以及整體性的挫折，我們必須改變思考的方向，認為這可能不只是教與學的問題，課程本身的結構也需要調整，使得排列組合可以安置在一個比較有利的位置上。99 課綱做了結構性的修訂，把排列組合提前到第二學期，而不是放在幾乎所有課程都完成之後的第四學期。這樣的改變，期望在排列組合的內容上，能夠更接近基礎素材，有更多的機會與其他的核心課題相結合；也期望在教學的過程中，能夠更常採取基本的策略，讓學生從比較具體的經驗開始建立排列組合的觀念與技術。

排列與組合，以及數列規律性的觀察與操作，就像所有數學課題一樣，是威力強大的思考工具。要掌握這幾項工具，必須系統性地建議思考的策略。我們藉由排列組合想要教給學生的，是一套新的思考方法，當然並不是對付幾種題型的解題技巧。因此，課綱的結構性改變，除了教材需要重組，也期望教法能夠適當地調整。

配合 99 課綱數學 II 的設計，這篇討論涵蓋了「發現數列的規律性」課題，也特別闡述了「遞迴」。以下，我們從現實層面最具體的考題開始，闡述學生被期望解決的問題典型，並作為教材設計的參考標的。然後闡述新課綱的課程設計，如何定位為「基礎」，又如何與其他核心課題相結合。最後是幾項關於教法與教學理念的建議。

1. 考試領導了教學嗎？

本節列舉 95–97 年度學測、數甲和數乙關乎有規則的數列、遞迴、與排列組合的題目。雖然在此節中稍事討論，在後面幾節還有更多的討論，並將以題號指稱。從以下

題目，應可檢討高中教材或慣用的參考書籍與講義中，是否投入了太多時間在做繁瑣而失去目標的練習？

1.1 有系統地列舉

在形式上可能屬於非例行的題目，答案的數值夠小，可以在合理的時間內窮舉所有情況而解決問題。在窮舉的過程中，需確認沒有重複也沒有遺漏，需要有系統地列舉。

[**Q1**] 新新鞋店爲與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢—買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格 (例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一)。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有幾種？ (95 學測)

這一題用不上公式，單純是按照甲、乙、⋯、辛的定價列舉能夠搭配的鞋款數，然後以加法原理加成答案 21。

[**Q2**] 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有幾種不同款式的「阿民」公仔。 (96 學測)

這一題的文字負荷頗重，像是「閱讀測驗」了。確實了解了文字意義之後 (特別是白色球衣的條件)，這題幾乎只用列舉即可，依序按照球帽的顏色列出它們分別能搭配的球衣和球鞋，然後以加法原理加成答案 25。

[**Q3**] A 城到 B 城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如下圖所示。

[A 到甲，甲丙丁戊正方形，乙在上，甲乙丙三角形，丙到B]

今從 A 城出發走向 B 城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有幾種走法？ (96 數乙)

這一題可以僅由列舉而得，只是列舉需要謹慎地維持系統性。題意的了解也很關鍵，有數學溝通的成分在內。學生稍微嘗試之後就會相信，有選擇的岔路只在甲和丙發生，然後有系統地試走看看，就會發現後續的路線很單純，共有 6 種走法。

[**Q4**] 趙氏與錢氏兩對夫妻，以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位置坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有幾種？ (97 數乙)

這個題目只有四個座位要安排，答案只有 10，根本不需要任何公式。在技巧上，因為趙太太已經有一個位子不能坐，由她的座位來討論比較方便。在三個不與趙先生相鄰的座位上，依序討論若趙太太坐下，其他三人入座的可能性，再以加法原理加在一起，就是答案。可是，只有 20% 考生答對。

在觀念上，**Q4** 並不那麼單純，學生還必須了解環狀排列的特徵，不論趙先生和孫先生繞著圓桌坐在哪兩個位子，都不會增加不同的就座排列。而趙先生和孫先生的左右關係也不該讓答案乘以 2，因為那只是順時針排列或逆時針排列的兩種看法而已。99 課綱明文排除了環狀排列，大考中心「依法」不應再出需要這種觀念的題目。

[**Q5**] 一個「訊息」是由一串 5 個數字排列組成，且每位數字都只能是 0 或 1，例如 10010 與 01011 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義爲此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串 10010 與 01011 在第 1, 2 及 5 三個位置不同，所以訊息 10010 與 01011 的距離爲 3。試問以下哪些選項是正確的？

(1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息爲 11101

(2) 任兩訊息之間的最大可能距離是 4

(3) 與訊息 10010 相距爲 1 的訊息恰有 5 個

(4) 與訊息 10010 相距爲 2 的訊息恰有 9 個

(95 數乙)

這一題應該可以歸類為「數學溝通」的「閱讀測驗」。選項 (1) 和 (2) 說不上數學的觀念與計算。選項 (3) 和 (4) 需要最單純的組合觀念，即使沒有也可以用列舉而確定 (3) 是正確的。就命題技巧而言，這一題稍微不仁慈的地方是，故意讓這個複選題只有一個答案，學生容易動搖信心而犯錯。

[**Q6**] 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分

成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖 [圖略]。根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均爲 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率是多少？四捨五入到小數三位。(96 數乙)

這一題的排列組合部分，需要知道第一回合分成兩組比賽，共有幾種分組方法？就此而言，不需要公式，只要列舉就行了：只有三種可能，其中兩種可能造成甲乙對決。因此甲乙對決的機率是 $(2/3) \times (0.5)^2 \approx 0.167$。

1.2 計數原理的直接應用

數值較大而不適合列舉的問題，都是基本計數原理的例行性應用，沒有陷阱也不隱晦。只有一題需要環狀排列的觀念，但屬於最直接的型態。

[Q7] 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台，4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有幾種？(95 學測)

這一題需要排列公式。但是因為同類型要相鄰，只是最標準的乘法原理的應用。而體育類已經被固定，額外的觀念負擔，只是綜藝類和新聞類可交換。答案是 $2! \times (2 \times 4! \times 3!) = 576$。

[Q8] 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼爲 O 以外的英文大寫字母，後四碼爲 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如 AA1234, AB4434 爲可出現的車牌號碼；而 AO1234, AB3444 爲不可出現的車牌號碼。則所有第一碼爲 A 且最後一碼爲 4 的車牌號碼個數爲何？

(1) 25×9^3 (2) $25 \times 9^2 \times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999

(97 學測)

這一題數值雖大，卻不需要計算，所需要的觀念，包括 (a) 英文字母有 26 個，(b) 字母與數字的組成要用乘法原理，和 (c) 數字要用加法原理扣除不可以的情況，亦即 ?44。而 ? 有 10 種可能，故共有 $25 \times (1000 - 10) = 25 \times 990$ 種車牌號碼。

[Q9] 如下圖所示，某摩天輪等分爲 6 個全等的區域。爲了夜間的燈光造景，6 個區域分別採用不同顏色的燈光裝飾。若有 7 種不同顏色的燈光可供使用，則此摩天輪正面的夜間燈光造景共有幾種不同的顏色排列方式？[圖略] (95 數乙)

這一題可能不適於列舉，需要排列公式，此外還需要環狀排列對於相同排列的觀念。特別强調「正面」而阻止了翻轉的可能。答案是 $P^7_6 \div 6 = 840$。99 課綱明文排除了環狀排列，大考中心「依法」不應再出需要這種觀念的題目。

[Q10] 從集合 $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \text{ 爲 } 0, 1, 2 \text{ 或 } 3 \right\}$ 中隨機抽取一個矩陣，其行列式爲 0 的機率是多少？(97 數乙)

這一個離散機率的問題，包含了排列組合的成分。牽涉的數量或許超出列舉的可行範圍，但母群體的數量 (題目中的集合元素個數) 是乘法原理的基本形式，而行列式為 0 等於計算 $a = 0$ 或 $c = 0$ 的子集合元素個數，則是取捨原理的最基本形式。這麼基本的題目，得分率也只有 25%。

[Q11] 甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3, 4, 5 個班級。從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機抽取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？(1) 21% (2) 23% (3) 25% (4) 27% (5) 29%
(98 學測)

這一個離散機率的問題，但是主要的程序是排列組合。因為抽出的班級有順序的不同，所以本該是排列，但是問題只關心兩班是否在同一所學校，所以其實是組合。因此，兩班的分別 (考國文或考英文) 只是徒增這個題目的障礙而已。幸好，學生不論用排列還是組合的想法，只要是一致的，所得答案相同。這一題是基本的組合 (或排列) 概念，配上典型的加法原理，答對率超過了 30%，但仍然未達 45%，是中偏難的題目。

1.3 發現數列的規律或歸納一般項

以問題導向，描述一個定義清楚的程序，從程序中導出數列，並由具體的程序發現數列的關係。它們的關係總是可以由一階遞迴式描述，藉由遞迴關係導出一般項；或者，有些問題可以直接觀察前幾項而歸納一般項。有規律的數列包括等差和等比數列，但不僅於此。

[Q12] 用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

(以上依序是第 1 個，第 2 個和第 3 個圖形，0 是白色 1 是黑色。) 拼第 95 個圖需用到幾塊白色地磚？(95 學測)

這可以用遞迴形式發現數列的規律性 $a_n = a_{n-1} + 5$，也可能直接歸納出一般項 $a_n = 3 + 5n$，而得到答案 478。

[**Q13**] 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排 (即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有幾個座位？(96 學測)

這一題需要連加公式。因為題目已經明白指出等差數列了，所以在觀念上已經沒有「發現數列的規律性」的必要。學生有幾種公式可以代入，但是都不是必須的，此題仍然可以在不使用公式的情況下，發現數列的規律性並以解題。

[**Q14**] 平面上坐標皆爲整數的點稱爲格子點。我們將原點以外的格子點分層，方法如下：若 (a, b) 是原點 $(0, 0)$ 以外的格子點，且 $|a|$ 和 $|b|$ 中最大值爲 n，則稱 (a, b) 是在第 n 層的格子點 (例如 $(3, -4)$ 是在第 4 層；$(8, -8)$ 是在第 8 層)。則在第 15 層有幾個格子點？(96 數乙)

這一題在發現數列的規律性以外，也包含數學溝通的成分。其規律性可以用遞迴方式，表現為 $a_n = a_{n-1} + 8$，也可能直接歸納一般項 $a_n = 4(2n + 1) - 4$ 或者純粹由數字規律而歸納 $a_n = 8n$。總之 $a_{15} = 120$。

[**Q15**] 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠			
每邊 2 個鋼珠		[圖略]	
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形和正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。求 m 與 n。(97 數甲)

這一題除了發現數列的規律，並歸納一般項以外，還要解方程式。若 a_n, b_n, c_n 依序是每邊 n 個鋼珠的正三角形、正方形和正五邊形的鋼珠總數，則 $m = a_n + b_n$ 且 $m = c_n + 9$。題目提供了 $n = 1, 2, 3, 4$ 的初始範例，對 a_n 應該不難以遞迴方式寫出前

後兩項關係，然後發現 $a_n = 1+2+\cdots+n$。至於 b_n 則應該很容易歸納 $b_n = n^2$。c_n 較麻煩，是這一題的關鍵。可能不容易直接歸納 c_n，比較容易發現 $c_n = c_{n-1} + (3n-2)$，然後解 c_n。解題步驟中難免需要基本的 $\sum k$ 公式。

> [**Q16**] 已知 a_1, a_2, a_3 爲一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 爲一等比數列，且此六數皆爲實數。試問下列哪些選項是正確的？
> (1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立
> (2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立
> (3) 若 $a_1 + a_2 < 0$，則 $a_2 + a_3 < 0$
> (4) 若 $b_1 b_2 < 0$，則 $b_2 b_3 < 0$
> (5) 若 b_1, b_2, b_3 皆爲正整數且 $b_1 < b_2$，則 b_1 整除 b_2
> (97 學測)

這一題放在這裡當作對照，這是道地的等差數列與等比數列的問題，並不歸類為「發現數列的規律性」。

1.4 遞迴思考的策略

前面以遞迴形式寫出的數列關係，乃是將遞迴視為數列的規律，未必將遞迴視為一種思考的策略。這種思考策略的範例，在高中課程中並不常被提出，在考試中也不常出現。

> [**Q17**] 不透明箱內有編號分別爲 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和爲偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，求 r 與 s。 (95 數甲)

這看起來是一個完全屬於機率的題目，但是卻在思想上需要遞迴觀念。其他看似遞迴的題目，僅是把遞迴當作一種數列的規律，這一題卻表現了遞迴的思想策略：$n+1$ 個編號總和為偶數，是前 n 個總和為偶數且第 $n+1$ 個是偶數，或者前 n 個總和為奇數且第 $n+1$ 個是奇數。所以

$$P(n+1) = P(n) \times \frac{4}{9} + (1 - P(n)) \times \frac{5}{9} = \frac{5}{9} + \frac{-1}{9} P(n)$$

2. 結構性的重建

有些學生不能辨識 $1+x+x^2+x^3+x^4$ 是一個等比級數，用這種方式表現的，就只能是多項式，而用 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 表現的才是級數。更嚴重的迷思是，認為只有無窮級數才是級數。這些現象，都是因為忽略了具體的操作而太快進入抽象觀念或公式操作所造成的。

3. 有系統地列舉

排列組合的教學，就是要『有系統地列舉』。

太快進入算法而略過列舉，就好像當小孩在五歲學習數數兒的時候，禁止他點數而要求立即說出總數一樣，顯然是多數父母不會選擇的教學策略。更何況，當排列組合的知識真的要在科學或工程中應用的時候，經常是要一五一十列出所有可能，而不只是算出總數而已。課程中忽視列舉，是排列組合教學的一大失誤。我們希望新的課程，在排列組合階段，重視列舉而不是求總數；到了離散機率，才發展到求總數 (然後計算機率) 的階段。

其實，中大英文系的林文淇教授很早以前告訴我一件往事。他參加民國 70 年的大學聯考，當時他是自然組考生。但是他自認為數學是放棄的科目，打開考卷瀏覽全局之後，決定只挑兩題做，其他的全部放棄。一題關於幾何的選擇題，他用圓規直尺 (忘了有沒有量角器) 盡量精確地作圖，然後作答。另一題就是排組，他用了整張考卷列舉所有狀況。他只做了這兩題，卻都做對了。他考進中央大學機械系，一年後正式放棄理工路線，轉進英文系。現在是國內頗有名氣的英文教授，下個學期還會應芝加哥大學邀請擔任一學期的客座教授。

可見：只要頭腦清楚，即使是民國 70 年代的聯考排組題目，也是可以用列舉方法做的。

至於，什麼是『有系統』? 這個學問可大可小，為初學者設計的高中排列組合課程，理應從「小」做起。最小的，就是列舉，確實地列舉。從列舉中發展『有系統』列舉的策略，再從發展出來的系統中發現算法。

闡述課綱 p.58。最基本的高維度系統是表格，樹狀圖可以拓展表格。但樹狀圖要留意其 edges 所代表之意義。

4. 認知的負擔

排列組合教學的另一項特色，是過份注重情境。這使得此課題在數學課程中更像個「異類」。有些情境太過虛偽，例如幾件上衣配幾條褲子有幾種穿法的習慣情境，根本

是虛假。衣著的選擇是衛生、校規和美學的問題，從來都不是數學問題。有些情境只是徒增認知的負擔，例如以下題目：

> 航空公司推出優惠機票，可以在以下九個城市中任意停留五處：倫敦，巴黎，波昂，布拉格，雅典，羅馬，蘇黎世，馬德里，法蘭克福。小明希望倫敦進，雅典出，中間要經過巴黎，請問共有幾種旅途安排的方式？

且不論題目的意思是否明確，光是九個歐洲城市名稱，就已經是認知的負擔。學生不容易在短時間內，在認知上分辨哪些是必要的資訊？哪些可以被符號化？而符號化之後，又如何把情境轉換成數學模型？在在都是困擾。成人，特別是熟悉這些城市 (至少熟悉城市的名稱) 的成人，很難體會。如果您想要體會一下，請看以下這首英文詩：

'Twas brillig, the the slithy toves
    Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogoves,
    And the mome raths outgrabe.

"Beware the Jabberwock, my son!
    The jaws that bite, the claws that catch!
Beware the Jubjub bird, and shun
    The grumious Bandersnatch!"

這是 Lewis Carroll 的 *Jabberwocky* 之中兩闕。無論您的英文字彙有多豐富，裡面一定有您不熟悉的字。試想，您如果要對上面的句子做文法分析，進而認知其意義，是不是很困難？當學生面對排列組合題目時，如果題目當中有太多不熟悉的成分 (譬如有的題目出現去氧核糖酸，有些出現氨基酸)，學生的感覺就像這樣！

還有些題目的困難也不在排列組合本身，也算是一種認知困難：語言的意義。例如以下這題：

> 黄家養了一隻米格魯—露露，天氣冷了要將露露四條腿穿上襪子，再穿上鞋子，若襪子均視爲相同，鞋子亦均相同，則露露有幾種穿戴順序？

題目其實是要考四條腿不同，而且每條腿都是先穿上襪子再穿鞋子，所以得轉換成 AABBCCDD 的排列。學生光是繞在腿與鞋襪間就已頭昏了 [SLM]。

數學課程中，從來沒有像排列組合這樣故意注重情境的。這就彷彿告訴學生一個潛規則：其他的數學都是無應用的 (而排列組合總在處理生活中不重要的瑣事)。其實，排列組合也是一門數學，它也要發展一套有系統的內容與方法，它也有數學內部

的意義與目的。它應該和其他數學課題一樣，在適當的動機指引之後，就進入數學內部來發展；在數學工具足夠了之後，在課程單元的最後，再適可地舉幾個典型的例子，淺嚐這些數學工具的用途。它真正的應用，就像平面幾何、三角函數和微積分的應用一樣，不可能在高中數學課程中完成，也顯然不是高中數學教育的目標，而是個人進入將來的專業之後再去發展。

5. 數學溝通

但是，另一種語文問題卻是數學教育本身應該處理的問題。例如 **Q10** 就是一個典型範例。就自然語言的常識來解讀，甚至就排列組合的術語而言，集合內的敘述確實有些模糊。但是就描述一個集合的數學術語而言，這個說法是合慣例的。據大考中心的研究報告，有考生誤解集合內的敘述為『不可重複』的排列，大考中心沒有統計因此做錯的考生有多少；可能為數也不少。

這個題目提醒我們注意：課堂中，教師經常忽視數學溝通的重要性，而學生們也經常不讀課文。數學溝通的閱讀方面，最基本的教育就是讀書 (閱讀數學課本)。教師就算不以課本講課，也該安排學生閱讀課本的習慣。三年的閱讀，自然就能熟悉數學慣例的用語，就實用來說，也就比較能夠讀懂數學考卷的題目 [HJN]。

6. 遞迴作爲一種數列的規律

99 課綱破壞了過去的結構，也讓遞迴的教學有了新的生機。在課程到達遞迴之前，學生只在九年一貫正式學過有限項等差數列，並在前一個學期透過指數函數「按比例增長」的觀念接觸了有限項的等比數列，但是並沒有以數列的觀念理解該課題。在第二學期數學課程的開端，恰好可以透過遞迴的思考策略，來重新認識等差，並且從這個角度引入等比數列。而排列的程序也可以用遞迴導入：如果 $n-1$ 個人已經排好了隊，第 n 個人有幾種被安插的方式？固然課程還沒正式教排列，但是，課程的發展可以有適當重複，就像小說劇情可以有「伏筆」一樣。

闡述課綱 p.57。

課綱限定一階，就是為了能夠先把注意力放在這個思考策略上，不要被二階 (或更高) 模糊了焦點。所以，以下問題就不恰當：

樓梯一共有九級，若每次可以走一級或二級，共有幾種上樓梯的走法？

而眾所皆知的費波那契數列，在課綱中也為了聚焦在單一觀念與思考策略上而割愛了。二階或者更高階的遞迴數列，請勿正式出現於高中課程，大考中心「依法」也不

應評量這些觀念與技術。

Fibonacci 數列是我們最捨不得割愛的二階遞迴關係。還好它可以被列為數學欣賞的題材，在欣賞的層面上，教師可以補充。但是教科書和評量的考試，都只好割愛了。

限定一階遞迴的另一個課程設計上的理由，是它自然地連結了數學歸納法。在這個架構下，數學歸納法可以被放在「驗證遞迴策略之正確性」的意義上，而不只是用來證明已經給定的數論公式。數論既然已經完全移出高中必修課程，數學歸納法也就自然跟著弱化。希望不必再練習缺乏動機的恆等式證明題，而是以具體情境、產生程序、發現規律性、驗證規律性或一般項的原則，來發展這方面的教材。

一旦確立了一階遞迴關係 $a_n = sa_{n-1} + t$，如果 $s = 1$ 則可以用列出等式，兩側相加，消去 $a_1 + a_2 + \cdots a_{n-1}$ 的手法求一般項公式。這個方法可以比較直覺。但是，遇到像 **Q17** 那樣的關係，還是需要回到遞迴的本義：層層代入。例如

$$P(n) = \frac{-1}{9}P(n-1) + \frac{5}{9} = \frac{-1}{9}\left(\frac{-1}{9}P(n-2) + \frac{5}{9}\right) + \frac{5}{9} = \cdots$$

在這裡，等比數列和等比級數，都會再度發揮它們具體的用處。

7. 遞迴作爲一種思考策略

遞迴的策略當然可以使用量少的特例來歸納，例如『n 條直線可以把平面分成幾個區域』的問題。我們稱由 $n = 1, 2, 3$ 特例找通式的思考策略為歸納，但是，遞迴畢竟不等於歸納。即使正確畫出了特例，學生也要學會如何從特例中找到通則的遞迴思考策略；那就是專注在「如果三條直線已經把平面分成了最多區域，第四條該畫在哪裡？」，然後發展「如果 $n-1$ 條直線已經畫分好了，第 n 條可以多畫出多少區域?」的遞迴關係。

遞迴的觀念，不只是提供「另一種代數形式」而已，而是要教導一種威力强大的「思考方法」！一階遞迴的思想就是『如果有個黑盒子可以處理少一個的狀況，我可以怎麼利用它？』過去，可能遞迴出現得比較晚，以至於在課堂和教科書上，它以「等差或等比數列的另一種形式」呈現，而教學的邏輯經常比較像「神奇的辦法」而沒有形成一個思考的策略。

表現遞迴策略之威力的標準範例，應該就是「河內塔」；採用遞迴想法之後，別管 $n-1$ 個環要怎麼搬，如果它就是可以神奇地完成，那麼 n 個環就可以用一個程序完成。

在前面的考題範例中，機率問題 **Q17** 其實需要這個層次的遞迴思維。或者有些學生會把 $P(1)$ 和 $P(2)$ 計算出來，而在處理 $P(2)$ 時並未意識到遞迴關係，然後用插值多項式的方法決定 r 和 s。

8. 分組問題

例如 **Q6**，學生常以為分組的第一人有 n 種選擇，但事實是，第一人可以根本不算。這個現象最好由小數量的實例確實列舉。但是解釋的方法，以及思考的模型何在？

9. 模型的轉化：沒有與至多

闡述課綱 p.59 球與籃子模型。建立基本模型。

課綱建議不必另造 H_k^n 的符號，而是擴展組合的模型。把 10 朵花送給 3 個人，不設每人得到的上限與下限，與從 4 種口味中挑選 7 顆糖果，不設每種口味的上限與下限，都適用同一種抽象的組合模型。這個模型擴展「不得為 0」的組合模型，而擴展的手法是：增加虛擬的物件，把「容許有 0」的組合問題轉化成「不得為 0」的問題，用老方法解決之後，再每組扣除 1。而從 4 種口味中挑選至多 7 顆糖果的作法，可以增加一種虛擬的口味，轉化成「恰有 7 顆糖」的老問題。

按照「先數學再應用」的原則，這種問題的數學模型是問 $x+y+z=10$ 的正整數解有幾組？它的非負整數解有幾組？還可以推廣到 $x+y+z\le 10$ 的正整數解有幾組？這些問題的思考策略固然可以系統化，卻不見得是課綱建議的基本課題。

10. 結語：數學內部連結

在實務上，因為某些公式或觀念重要，所以教師需要較多的重複。為此，教師可能採取多做習題的策略，所以思索或蒐集許多題目。但是，這個策略卻可能造成越來越複雜的人造難題，逐漸流失了原本強調基礎公式或觀念的初衷。另一個可以採取的策略是，在課程進行中，不斷地找到舊經驗的類比或重現。例如 $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1-x^{n+1}$ 的多項式看法，對照 $1+r+r^2+\cdots+r^n=(1-r^{n+1})/(1-r)$ 的等比級數看法。例如 $1+2+3+\cdots+n$ 的遞迴看法和等差級數看法，還可以根據這個經驗知道 $f(n)=1+2+3+\cdots+n$ 是 n 的一次函數，故可以用 $f(1)=1$ 和 $f(2)=3$ 求 $f(n)=an+b$ 的係數 a 和 b。又例如，$b^2-4c\ge 0$ 可判斷 $x^2+bx+c=0$ 有實根，若 p,q 是兩正根，由根與係數關係又可以驗證算幾不等式。這種策略稱為「數學內部連

結」，此策略不但達到複習與重複强調的效果，更增强數學的內部結構，也可以避免過多而且越來越複雜的人工難題。