

108高中數學課綱草案 擇要說明

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系
數學領域課程綱要高中組召集人

民國107年6月25日

單維彰 (2018) 108 高中數學課綱草案
說明

1

概說

- ◆ 數學領綱以「五項理念」呼應素養
- ◆ 「文」與「商」的分離
- ◆ 從高二起分軌，三類課程終點
- ◆ 自然且常態地使用 Calculator
- ◆ 螺旋的理由：有意義的學習
先計算與操作，再代數與函數
(具體→半具體→抽象)

單維彰 (2018) 108 高中數學課綱草案
說明

2

古德拉的課程五層次

- 理想的課程 ← 理念
- 正式的課程 ← 課綱、教科書
- 理解的課程 ← 教師研習
- 實施的課程 ← 教材、教法、教案
- 體驗的課程 ← 學習成效

Goodlad, J. (1979). *Curriculum Inquiry*.
New York: McGraw-Hill.

中文翻譯取自黃毅英編(2016)。《教書？教數？
育人？--數學教科書論述》，頁 26。
香港：香港數學教育學會。

單維彰 (2018) 108 高中數學課綱草案
說明

3

數學課程的「理想」

- 半個多世紀以來，一直是
- 有意義的學習 (Meaningful 或 Sensible)
 - 連結 (實際或可想像的) 生活經驗
 - 有試驗與探究的機會
 - 理解數學本身的意義
 - 知道並能實踐數學的實用價值

單維彰 (2018) 108 高中數學課綱草案
說明

4

舉一隅：民72 高中課標

高中數學課程目標有三方面：

素養、訓練、應用

其中數學素養解釋為

了解數學的一般內容、方法與意義

單維彰 (2018) 高中數學課程綱要
說明

5

呂溪木的詮釋

不論是在國小、國中或高中的教材中... [不該] 發現突如其來的定義、公設或定理；無法理解而必須死記的內容... [應該] 在提出一個數學概念或名詞之前，必先提出一個學生經驗所及的實際問題加以觀察... 最後將整個過程所牽涉到的數學概念與方法抽象出來成為定義或定理。... [讓] 學生... 對於問題的來龍去脈以及解決的過程都有充分的理解。... 對於學生無法達成『完全學習』的教材內容，全部加以刪除。

單維彰 (2018) 高中數學課程綱要
說明

6

莫愁莫慌莫著急

素養導向的數學課程，
是一脈相承之數學理想課程的持續發展。

教育的興革不能（也不該）太急，
同仁們有脈絡的持續努力，
承續現況，細部微調。

單維彰 (2018) 高中數學課程綱要
說明

7

呼應數學素養的數學領綱

數學領域課程綱要的五項「理念」，
就是承續理想而呼應新時代素養的課程理念。

- 數學是一種語言
- 數學是規律性的科學
- 數學具有人文價值
- 數學課程應提供有感的學習機會
- 數學教學應包含工具的使用

單維彰 (2018) 高中數學課程綱要
說明

8

數學是一種語言

數學素養的最基本意涵：

數學掃盲

- 掃除數盲
- 準備終身學習之所需
- 準備下一階段學習之所需

數學作為一種語言

- 1—4年級：母語的學習
 - 搭配自然語言的日常意義而學習
- 5—10年級：基礎外語的學習
 - 輔以母語的第二語言學習
 - 以支援終身學習（掃盲）為原則
- 11—12年級：專業外語的學習
 - 專業或博雅導向，不必假扮動機與情境
 - 目標清楚、鷹架完整、講究效率

數學作為專業外語

- ◆ 普通高中→理工商管社醫農
為

微積分、線性代數

統計、計算機概論/原理

奠定基礎

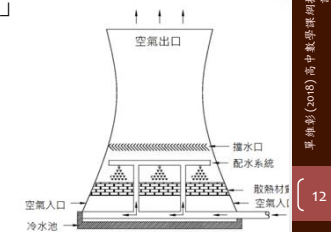
- ◆ 普通高中→文史法政藝美：

素養教育、博雅教育

數學語言舉例

圖中的散熱煙囪

- 雙曲線繞共軛軸形成的旋轉面
- 貫軸平行於地面（水平面）
- 點到地面的距離稱「高」
- 與高為 x 之水平面的截痕半徑為 $r(x)$



數學是規律性的科學

- 應有機會試驗與探究
- 發現規律性並猜想一般性的關係
- 以演繹性質的思維理解規律性
- 數學知識的特徵

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

13

規律性舉例

- 正整數相關規則：試驗、觀察、猜想，最後使用數學歸納法。
- 幾種不同的三角形居然有同樣內角和，其實三角形的內角和是定值。
- 直角三角形的相似性可解決測量問題，其實關鍵是對應邊的「比值」。
- 正數可做任意小數的次方，例如 10 可做 0.30103 次方；而每個正數皆為 10 的某次方。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

14

數學具有人文價值

- 「人文」不是狹義的文學、音樂、美術，而是相對於「崇拜神祇或權威」的理性。
- Humanism：由「相信人有能力藉由理性而獨立思考」的基本信念而發展的思想體系。
- 數學是人的思想創造，是理性思考的典範。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

15

理性思考舉例

- 數學中，沒有永遠、絕對正確的神或權威。
Ex：有理數固然稠密，卻不能填滿數線。
- 說話寫字不要「自欺欺人」，每句話都講明白了，數學差不多就完成了。
- 溝通時，確認彼此用詞的
定義：根據已經確認的觀念而延伸
或
公設：彼此同意而約定的共識
是相同的。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

16

應提供有感的學習機會

- **Sensible**：有必要學習的對象，或有需要處理的問題。
- **Meaningful**：學習與思考都是辛苦的，而吃這些苦頭是值得的。
- **Make Sense of**：數學觀念的彼此呼應，可以建構一個易於思考的系統。

17

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

有感學習舉例

- 沿長方形對角線剪下的直角三角形，內角和是 180 度。
- 直角三角形千百種，居然內角和恆定。
- 非直角的三角形也像這樣嗎？
(直角三角形都可以從長方形切半嗎?)
- 關我什麼事？
 - 跨文化的欣賞：從希臘誕生的西方文化特質。
 - 人文的體會：人類居然可以獲致肯定的知識。
 - 測量的利器：測兩角則知第三角（正弦定律）。

18

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

數學教學應包含工具的使用

方格紙、直尺、三角板、圓規、量角器；
計算機、電腦、手機、平板。

- 支援試驗與探究的機會
- 連結生活經驗：
生活經驗離不開計算與資訊工具
- 解決實際問題：
解決問題少不了計算與資訊工具

19

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

使用工具舉例

- 在方格紙上繪製相似於真實尺度的直角三角形，可以解決大尺度的測量問題。
- 相似的直角三角形之間，對應邊長的比值是定值，精確作圖可以估計此比值。
- 前人已經做出那些比值，計算機燒在晶片裡，可用 SIN、COS、TAN 按鍵立即獲得。
(也許搭配 1/x 按鍵)
- 有了比值，測量問題可以省略精確作圖的麻煩。

20

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

數學課程為導向素養的解構與重構

審視多年以來「凝為塊狀」的數學課程，按照素養的精神以及數學學習的邏輯，予以拆解，然後以學生為本——而不是以數學為本——重新建立學習脈絡。

教師何以須讀課綱？

- 教師的專業所在
 - 不是會解數學題。
 - 而是能夠判斷最適合個別學生的教材教法。
- 差異化教學的依據：
 - 為何而教？ — 素養 vs 學科
 - 有多緊要？ — 下學期需要 vs 不確定的以後
- 學生應該 / 可能已經知道 / 會做什麼？

108 數學領綱（伍）學習重點

學習重點由「學習表現」與「學習內容」兩個向度所組成。學習重點用以引導課程設計、教材發展、教科用書審查及學習評量等，並配合教學加以實踐。學習重點係由理念、目標與特性發展而來，並與核心素養進行雙向檢核。

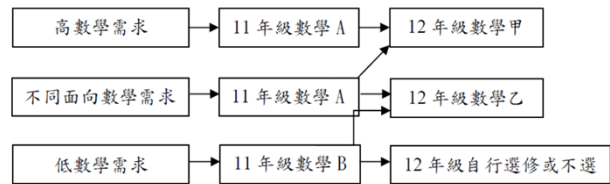
高二分 A/B 兩類必修課程

普通型高中 11 年級起分為三個軌道。對於高數學需求的學生，可以修習數學 A、然後修習數學甲。對於不同面向數學需求的學生，可以修習數 A、然後修習數學甲或數學乙。對於低數學需求的學生，可以只修習數學 B。有鑑於高中學生不容易太早定向，數學課程綱要的設計盡量使轉軌不致太困難，使得在 11 年級修習數學 B 的學生，有機會補足數學乙所需的先備知識而選修數學乙。

高中數學分三軌

- ◆ 「社會組」和「文組」的分辨
- ◆ 「社會組」和「自然組」的分辨

11 年級起數學分為三個軌道的建議學習路徑圖



25

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

三軌「應有」相對的考試

- ◆ 過去的失敗經驗
 - ◆ 社會不領情 — 選擇性的存在
 - ◆ 學生不懂選 — 課程設計的探索性
- ◆ 社會價值觀改變了嗎？
- ◆ 大考中心可行，需大學支持
- ◆ 更需要教師、學校與家長支持

26

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

高中課程差異一段話 (1/2)

在數方面，所有學生都應統整認識實數，並進一步發展計數原理及其應用；選修數學甲、數學乙的學生要將數的認識拓展到複數，其中選修數學甲的學生更要理解複數的幾何意涵。在幾何方面，全體學生都有學習基本空間概念的機會，透過坐標而連結幾何與代數，並認識基本的線性代數；選修數學A的學生還要熟悉空間向量的操作，用來進一步發展坐標幾何與線性代數。在函數方面，全體學生都有機會認識三大類基本函數：多項式函數、指數與對數函數、與三角函數。

27

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

高中課程差異一段話 (2/2)

辨別[三大類基本函數]的圖形特徵，並能用它們當作模型而解決典型問題；選修數學甲、數學乙的學生要將函數的學習，延伸到微積分基本知能，並分別能用於解決理工、商管領域的基本問題。在不確定性方面，所有學生都應能運用基本統計量描述資料，能運用機率與統計的原理，推論不確定性的程度；選修數學甲、數學乙的學生能進一步理解隨機變數的分布，其中數學甲的學生更要理解幾何分布。

28

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

課綱兩大表格（一）學習內容

編碼	學習內容條目說明	備註	參考 教具	對應學 習表現
N-10-4	常用對數：log 的意義，常用對數與科學記號連結，使用計算機的 10^x 鍵和 log 鍵。	透過操作而加強認識任意正數 a 皆可改寫成 $a = 10^{\log a}$ 不談其他底的對數	計算機	n-V-1

編碼：主題類別（例如 S 表示空間與形狀）- 年級 - 流水號

條目說明：學習內容，名詞的列舉和簡短說明。

備註：條目的教學範圍限定、教材教法提示、安排此條目的用意。

參考教具：計算機是指 Calculator 或相同功能的 App。

對應學習表現：此內容之教學應達成之行為表現編碼。

單維彰 (2018) 高中數學課程擇要說明

29

課綱兩大表格（二）學習表現

編碼	學習表現
n-V-1	理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。

編碼：主題類別（例如 S 表示空間與形狀）

- 學習階段（例如 IV 表示第四階段，7—9 年級）- 流水號

主題類別（學習內容用大寫字母，學習表現用小寫字母）

N—數與量 S—空間與形狀 A—代數 R—關係 D—資料與
G—坐標幾何 F—函數 不確定性
同年級之內，並無教學編序與時數分配的規定。

單維彰 (2018) 高中數學課程擇要說明

30

Calculator 計算器

- ◆ 已經談了卅年，不願再「談」下去了
- ◆ 不好高騖「電腦」「平板」
- ◆ 每台300元以內的「公平」
- ◆ 不取代手算 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 與化簡 $\sqrt{12}$
- ◆ 數的客觀存在；常態化
- ◆ 實驗、探索、真實情境
- ◆ 大考中心研議中，需招聯會支持

單維彰 (2018) 高中數學課程擇要說明

31

先計算，再代數，後函數

- ◆ 指數：分數與小數次方是什麼？算
- ◆ 對數：log「10的幾次方」，算
- ◆ 三角：在國中認識比值的名字，算
- ◆ 斜率與傾斜角，算
- ◆ 通過原點的直線與極坐標，算

單維彰 (2018) 高中數學課程擇要說明

32

學習內容剪影 (1/3)

N-10-1	實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算 ($\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。	定義科學記號數字的有效位數，在運算之後應維持原本的有效位數。★	計算機	n-V-1
--------	--	---------------------------------	-----	-------

標記 ★：
建議不列為評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明 33

學習內容剪影 (2/3)

N-10-5	數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。#		計算機	n-V-2
n-V-2	能熟練操作計算機，能判斷使用計算機的時機，理解計算機可能產生誤差，並能處理誤差。			

標記 #：
不必設置獨立的教學單元，宜融入適當課題，在合理的脈絡中教授。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明 34

學習內容剪影 (3/3)

F-11A-1	三角函數的圖形：sin, cos, tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。(cot, sec, csc 之定義與圖形※)。		方格算紙	f-V-3 n-V-7 g-V-2
f-V-3	認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。			
n-V-7	認識弧度量並能操作，理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。			
g-V-2	理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性，並能用以溝通及推論。			

標記 ※：為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明 35

解構與重構舉隅

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明 36

資料與不確定性：每年都有 (1)

- 1、2：分類與計數
- 3：列聯表（新）
- 4—10：各種呈現數據的圖表
- 6：開始探討「可能性」
- 7：引進計算機作為處理數據的工具

37

單維彰 (2018) 臺灣導向數學教學
與評量

資料與不確定性：每年都有 (2)

- 7：一維數據的代表數（平均、中位、眾數）
- 8：認識相對與累積次數作為客觀機率的基礎
- 9：一維數據的分布狀況（四分位距）
- 9：認識機率（古典模型與非對稱情形）
- 10：複合事件與一維（百分位數）、二維數據分析
- 11（A、B）：條件機率、貝氏定理
- 12（選修）：（離散型）隨機變數的分布

38

單維彰 (2018) 臺灣導向數學教學
與評量

空間概念 (1)

- （過去）國中：與國小重複，與高中斷裂
- （現在）5—10 年級漸進發展
- 5：使用工具（例如角鋼）在生活環境中
 - 測量互相垂直的面，
 - 推論和觀察互相平行的面，
 - 在長方體上認識線與面的垂直與平行關係

39

單維彰 (2018) 臺灣導向數學教學
與評量

空間概念 (2)

- 7：三視圖，實用的空間概念
- 9：在長方體上
 - 理解兩面的垂直與平行關係，
 - 認識兩邊之間的垂直、平行和歪斜關係，
 - 辨識與理解線與面的垂直關係
- 10：包裹在測量問題中，探究長方體的截面、截痕、法線性質。

40

單維彰 (2018) 臺灣導向數學教學
與評量

支援 3D 軟體所需的空間概念

- 透視圖，直覺與美術
- 示意圖，圖像符號之慣例
- 視圖，工程的溝通工具
- 正方體積木堆疊的三視圖
- 長方體、球、圓柱的截面
- 旋轉體，薄片的堆積

41

單維彰 (2018) 素養導向數學教學與評量

有效位數與運算的概念性理解

- 小學不用計算機，但是規範大數的計算應如
「 1600×200 」與「 $60000 \div 400$ 」
之形式，也就是「有效位數」限於三位或二位以內的原則
- 從 7 年級起正式引進計算機（器）
（輔助計算為次，輔助學習為要）

42

單維彰 (2018) 素養導向數學教學與評量

絕對值與科學記號數字

- 國中階段：僅為「記號」：
概念理解與溝通表達
- 高中必修：代數性質與基本運算
- 高中選修：本身與合成函數的圖形
- 計算機：具體呈現科學記號
- 常用對數：自然連結科學記號
（任一正數都是 10 的次方）

43

單維彰 (2018) 素養導向數學教學與評量

（銳角）三角比

9 年級：

- 特別強調「三角比」而非「三角函數」
- 延伸相似三角形對應邊比值為常數的概念
 - ▶ 認識計算機上三個比值的名稱：SIN、COS、TAN
 - ▶ 屬學習表現，不屬學習內容
Ex：不含它們之間的代數關係
- 在紙上畫相似的三角形也可以達成任務，但是計算機「背誦」了這些特殊的比值

44

單維彰 (2018) 素養導向數學教學與評量

(廣義角) 三角比

10 年級：

- 「三角比」的概念心像從直角三角形轉換為極坐標和單位圓。
- 發揮直角坐標系統的特性，藉由操作確實連結極坐標與直角坐標，從而理解三角比「如何」從銳角推廣到任意幅角。

45

單維彰 (2018) 高中數學教學綱要

不在主脈上的特殊高中課題

線性規劃：必修→數乙

代數基本定理與勘根定理：必修→選修

轉移矩陣：11A (限二階)

空間向量的外積：11A

信賴區間：刪除 (連續型隨機變數)

拉格朗日插值多項式：刪除

有理根檢定：刪除 (可做教學例)

46

單維彰 (2018) 高中數學教學綱要

向量：從位移轉向位置

- 轉移向量教學的目標
不當作解決平面幾何問題的利器
- 支持空間向量的學習
- 線性組合：矩陣乘法與線性代數的基本概念
- 向量成為將一點「傳送」到另一點的「交通工具」
- 線性代數成為計算機科學、統計學、圖學的共同基礎，「數據分析」的最基本工具

47

單維彰 (2018) 高中數學教學綱要

多項式：從代數轉向分析

- 從代數「式的運算」轉向函數「變化關係」
- 聚焦在函數圖形的大域與局部特徵
- 從二次提升到三次函數
- 「社會組」概念的轉變：
商、管、財金、社會科學
- 「數學乙」含微積分基礎課程

48

單維彰 (2018) 高中數學教學綱要

課程說明手冊

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

49

數學領域
課程手冊 初稿

中華民國一〇六年十二月 (更新第五版)

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

50

<https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1590-1.php>

課程綱要僅止於此

- 屬於「正式課程」
- 只能為「理想課程」提供骨架

缺乏有機組織，沒有靈魂

唯有教師，才能導向素養

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

51

The End

感謝支持

單維彰 (2018) 高中數學課綱擇要說明

52