

國 立 中 央 大 學

學 習 與 教 學 研 究 所

博 士 論 文

數 學 識 讀 文 本 發 展 與 研 究

以 七 年 級 的 負 數 與 分 數 單 元 為 例

研 究 生：陳 玉 芬

指 導 教 授：單 維 彰 博 士

趙 子 揚 博 士

中 華 民 國 113 年 6 月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：2024 / 6 / 21

2019.9 版

授權人姓名	陳玉芬	學號	105187002
系所名稱	學習與教學研究所	學位類別	<input type="checkbox"/> 碩士 <input checked="" type="checkbox"/> 博士
論文名稱	數學識讀文本發展與研究—以七年級負數與分數單元為例	指導教授	單維彰 趙子揚

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

- 在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。
 - (V)同意立即網路公開
 - ()同意於西元_____年_____月_____日網路公開
 - ()不同意網路公開，原因是：_____
- 在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」
 - (V)同意立即網路公開
 - ()同意於西元_____年_____月_____日網路公開
 - ()不同意網路公開，原因是：_____

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。


學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文立即公開者此欄免填)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

- 延後原因
 - ()已申請專利並檢附證明，專利申請案號：
 - ()準備以上列論文投稿期刊
 - ()涉國家機密
 - ()依法不得提供，請說明：_____
- 公開日期：西元_____年_____月_____日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名： 陳玉芬

指導教授簽名： 單維彰 

*本授權書請完整填寫並親筆簽名後，裝訂於論文封面之次頁。

國立中央大學博士班研究生
論文指導教授推薦書

學習與教學研究所博士班 學系/研究所 陳玉芬 研究生
所提之論文 數學識讀文本發展與研究—以七年級為例
係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 趙子揚 單維新 (簽章)

113 年 3 月 12 日

國立中央大學博士班研究生
論文口試委員審定書

學習與教學研究所博士班 學系/研究所 陳玉芬 研究生

所提之論文 數學識讀文本發展與研究—以七年級負數與分數單
元為例

經由委員會審議，認定符合博士資格標準。

學位考試委員會召集人

秦尔聰

委

員

袁媛

蘇意雯

單維彰

趙子揚

中華民國 113 年 4 月 29 日

數學識讀文本發展與研究

以七年級的負數與分數單元為例

摘要

本研究之目的在於發展一套培育數學素養之「數學識讀文本」，在七年級學生正要進入抽象思維學習的階段，以「負數」與「分數」內容作為文本發展之主要典範課題。本研究分為三個研究主題：

研究一，以目前市面上流通的三版本國中數學教科書，作為研究對象，分析教科書中「負數」與「分數」教材內容在「知行識」向度之內涵。研究結果有三：1. 三版本之「知行識」向度內容分布有趨同現象，「知」向度內容占比皆大於 70%、「行」向度占比皆大於 62%、「識」向度占比皆小於 24%，且「知行識」三個向度的題目分布比例並未因版本的不同而有所差異 ($\chi^2 = 5.987, p > .05$ 未達顯著水準)；2. 三版本之「識」向度內容有獨立布題趨勢，且識向度內容偏少；3. 教材設計觀點影響布題形式。

研究二，以 ADDIE 設計模式針對「分數」單元進行「識讀文本」開發歷程研究。研究結果有四：1. 文本內容設計避免過多專業術語或模糊問語；2. 依循「執行評量報告」設計模式可監督修正文本之預期目標；3. 以視覺操作以及單位分數引入，可以為分數知能與技能的學習提供一致性的操作機會，以生活應用問題提供解題的表徵能力，連結分數與幾何創作概念提升識能學習，並提供閱讀素養欣賞，建立對分數學習的自信；4. 識讀文本設計採用多元的評量模式，可具體觀察學習的障礙與改變。

研究三，以準實驗法針對「負數識讀文本」進行實徵研究。研究結果有二：1. 實驗組在「負數識讀文本」學習之後，在前後測之負數素養表現具顯著差異，其中「識能理解」由 3.5% 上升至 25.9%，「錯誤理解」由 11.8% 下降至 2.4%，同時藉由多變量共變異數分析，檢驗「知」、「行」及「識」後測之結果，顯示實驗組在「識」後測之平均數，顯著高於對照組，而在「知」與「行」方面，兩組則無顯著差異；2. 針對負數學習過程中的「負號分離」(detachment from the minus sign [DFMS]) 學習障礙，負數識讀文本得到具體的改善佐證。

本文根據三主題之研究結果，對識讀文本在教學上之應用提出建議。

關鍵詞

負數、分數、數學素養、知行識課程架構、數學識讀文本、數學識能規準、概念譬喻、
視覺操作

Mathematical Literacy Reader Development and Validation: A Case Study on Negative Numbers and Fractions in Grade 7

Abstract

The purpose of this study is to develop a set of "Mathematical Literacy Reader" to cultivate mathematical literacy among grade 7 students who are entering the stage of abstract thinking. The main research focus of this study is on the development of texts concerning "negative numbers" and "fractions." The study Consists of three major topics:

1. Research One: Three versions of junior high school mathematics textbooks currently circulating in the market are analyzed as research objects to analyze the content of "negative numbers" and "fractions" in terms of "Zhi(to know), Xing(can do), Shi(make sense of)". There are three results: (1) There is a convergence in the distribution of content across the dimensions of "Zhi, Xing, Shi" among the three versions. The proportion of content in the "Zhi" dimension is all above 70%, in the "Xing" dimension is all above 62%, and in the "Shi" dimension is all below 24%. Additionally, the distribution of items across the three dimensions did not differ significantly across versions ($\chi^2=5.987$, $p>.05$). (2) There is an independent trend in the distribution of content in the "Xhi" dimension across the three versions, with a tendency towards less content in the recognition dimension. (3) The perspective of reader design influences the format of the questions.
2. Research Two: Using the ADDIE design model, a research process for the development of "literacy reader" for the "fractions" unit is conducted. There are four results: (1) Design of textual content avoids excessive use of professional terminology or vague questions; (2) Following the "Performance Assessment Chart" design model can supervise and revise the expected goals of the text; (3) Visual operations and the introduction of unit fractions can check and inspire consistent operational learning of fraction knowledge and skills, provide problem-solving representation ability through real-life application problems, connect fractions with geometric creation concepts to enhance literacy learning, and provide appreciation of reading literacy to build confidence in learning fractions; (4) The design of literacy reader adopts a multivariate assessment mode, which can observe learning obstacles and changes concretely.
3. Research Three: An empirical study on "negative number literacy reader" is conducted using quasi-experimental methods. There are two results: (1) After learning "negative number literacy reader", there is a significant difference in the performance of negative number literacy between the pre-test and post-test in the experimental group, with "Shi understanding" increasing from 3.5% to 25.9% and "misunderstanding" decreasing from 11.8% to 2.4%. At the same time, through multivariate analysis of covariance, it is found that the mean of the post-test of "Shi" in the experimental group is significantly higher than that of the control group, while there is no significant difference between the two groups in terms of "Zhi" and "Xing"; (2) Evidence of concrete improvement is provided in the "negative number literacy reader" for addressing learning obstacles in the process of learning negative numbers, such as detachment from the minus sign [DFMS].

Based on the research results of the three major topics, suggestions for the application of literacy texts in teaching are proposed in this paper.

Keywords:

Fraction, Negative Number, Mathematical Literacy, Zhi-Xing-Shi Teaching Construct, Mathematical Literacy Reader, Mathematical Competency Rubrics, Conceptual Metaphor, Visual Operations

誌謝

八年，美好的仗打完了！而今回首，只見一路相挺的貴人。這才明白自己何德何能可以完成如此艱鉅的任務，那是因為您們一直在這裡！大恩豈是言謝即罷？隻字片語只是想對我成長中的貴人，表達我由衷的感謝！

首先，最要感謝的是我的指導教授單維彰老師，溫文儒雅是您給我的第一印象，面對急躁不安的大齡女子，您仍如禪師坐定不為其焦慮所動，只淡定地說：做博士研究就像是找到一個礦脈，對於研究的堅持，始終自有您的頻率與節奏，這樣學者風範的堅持我記住了；每當我的論文停滯不前，或是又見樓歪傾斜，您總是適時地用您充滿智慧的論述與廣博的學識為我指引與匡正。深感慶幸，我能有良師如您助我前行，若沒有您，這仗應該打不下去。再來感謝我的另一位指導教授趙子揚老師，謝謝您總是在我統計實驗拿不定方向時，給我寶貴意見，讓我的研究得以順利完成，也感謝您總是給我正面力量，讓我充滿信心面對挑戰。同時也要感謝三位學養豐富的口委教授：秦爾聰教授、袁媛教授、以及蘇意雯教授，所提建言，大至論文架構及研究方法的指導與修正，細至內文下標與文獻引用的精確使用，不僅傾囊相授，更是巨細靡遺，謝謝您們！

再者，要感謝學習所陳斐卿老師，謝謝您一路關注我的進度，時時為我加油鼓勵，還有衛友賢老師，謝謝您為我引薦我人生中的貴人單維彰老師，也謝謝您的課程，啟發了我使用語言譬喻的理論，還有我的「學長弟弟」哲毓，時不時提供我最重要的情報與資訊，更要謝謝你在最後的口考階段情義相挺，包攬所有的雜事，讓我得以專心完成口考大事。還有我的好同事，姿英與佩瑜，這八年來，所有活動完全配合我的時間，還參與了我的畢業典禮，這一路上有您們，真好！

最後，感謝我親愛的家人，大哥、大姐、二哥、二姐，總是言不由衷地嘴裡說著：「都幾歲了，還要去唸書？」但每次又總會回說：「算了，你還是去唸書好了」，而在聽到：我畢業了，那一刻您們說陳家出博士了，要辦桌請客。還有夫家的兄弟姐妹，竟以我之名做了一幅藏頭詩卷軸作為我的畢業禮物，想是我的勤奮令大家動容了。當然還有一位要感謝的人，就是我的先生，在這期間總是扮演著家庭主夫的工作，打理了所有因為我忙於論文寫作而忽略掉的家事，感謝你在我沮喪時，給我力量；受挫時給

我信心；痛苦時，給我安慰；甚至要放棄時，又默默地陪著我往前走，直到這篇論文完成，我們相視而笑了。

我想，要感謝之人猶如恆河沙數，細數不盡。謹以此文對所有一路伴我同行給我力量的人，致上最誠摯的謝意。就讓一切的神聖歸於天地，榮耀歸於父母，感念歸於大家。而我定當帶著所有貴人的祝福，堅定努力地邁向下一個里程，為數學教育盡最大的貢獻，不負大家對我的厚愛。

謹以此篇論文獻給我已逝的父母，親愛的爸爸、媽媽，您家的小女兒拿到博士了！

話說在畢業典禮當天，我真的看到了黑黃蝴蝶在我面前飛舞，我想是您們來了！

目錄

第壹章 緒論.....	1
第一節 背景.....	1
第二節 研究動機.....	6
第三節 研究目的.....	10
第四節 研究限制.....	10
第五節 名詞釋義.....	11
第貳章 文獻探討.....	13
第一節 數學素養.....	13
一、 「數學素養」的宏觀理念.....	13
二、 「數學素養」的微觀解析.....	19
第二節 「知行識」課程架構.....	22
第三節 數學教科書內容分析.....	24
一、 數學教科書研究.....	24
二、 數學教科書的素養實踐指標.....	26
三、 數學教科書的負數與分數.....	28
第四節 數學識讀文本.....	34
一、 識讀文本設計理論.....	34
二、 識讀文本設計模式.....	42
三、 識讀文本類型與書寫.....	48
小結.....	52
第參章 研究方法.....	53
研究一 三版數學教科書內容分析研究.....	54
一、 研究流程.....	54
二、 研究樣本.....	55

三、 研究工具.....	56
四、 內容分析單位與分析模型.....	58
五、 資料處理與分析.....	65
研究二 識讀文本開發研究.....	65
一、 識讀文本開發流程.....	65
二、 研究參與對象.....	67
三、 研究對象.....	68
四、 研究工具.....	68
五、 資料收集與分析.....	70
六、 研究倫理審查.....	72
研究三 識讀文本實徵研究.....	72
一、 研究對象.....	73
二、 研究工具.....	73
三、 資料收集與分析.....	79
四、 研究倫理審查.....	80
第肆章 研究結果.....	81
研究一 三版數學教材的「知行識」內涵.....	81
一、 三版本之「知行識」向度內容分佈有趨同現象.....	81
二、 三版本之「識」向度內容有獨立布題趨勢.....	81
三、 三版本之「識」向度內容偏少.....	82
四、 教材設計觀點影響布題形式.....	83
小結.....	87
研究二 分數識讀文本實作設計發展歷程.....	87
一、 ADDIE 第一階段啟動.....	87
二、 識讀文本格式設計歷程.....	91
三、 識讀文本「知行識」內容設計歷程.....	98
小結.....	116

研究三 識讀文本實徵研究—以負數為例.....	117
一、「負數識讀文本」對學生負數素養表現之影響.....	117
二、「負數識讀文本」對提升負數素養的表現.....	118
小結.....	121
第五章 結論與建議.....	123
第一節 結論.....	123
研究一：三家版本負數與分數教材內容之「知行識」內涵.....	123
研究二：「分數數識讀文本」開發歷程設計.....	124
研究三：「負數識讀文本」實徵研究.....	126
第二節 建議.....	127
一、教科書教材內容的設計.....	127
二、識讀文本教材設計原則.....	129
總結.....	131
參考文獻.....	133
附件一 負數識讀文本 1.....	145
附件二 負數識讀文本 2.....	150
附件三 分數識讀文本 1.....	154
附件四 分數識讀文本 2.....	158
附件五 分數識讀文本 3.....	161
附件六 負數前測檢核卷.....	167
附件七 負數後測檢核卷.....	169
附件八 分數檢核卷.....	170
附件九 閱讀數界課 期末學習心得晤談卷.....	172

圖目錄

圖 1	數學素養關係架構圖	20
圖 2	12 年國教數學課程架構	22
圖 3	數學概念形成的一般性模組	35
圖 4	教師與學生運用譬喻的相對性	38
圖 5	「負負得正」的視覺操作	41
圖 6	ADDIE 教學設計模式	44
圖 7	差距分析概念的描述	45
圖 8	ADDIE 設計階段循環流程	46
圖 9	學科閱讀指導的三種認知技能	51
圖 10	概念表徵轉譯過程	52
圖 11	識讀文本發展與研究架構流程	53
圖 12	三個版本數學教科書之負數、分數單元教材分析架構	54
圖 13	負數表示的知能	58
圖 14	分數四則運算的技能	59
圖 15	負號認識的識能	59
圖 16	引入負數概念的「主題活動」	60
圖 17	負數概念的「主題活動」文字說明	60
圖 18	負數概念的例題說明與隨堂練習	60
圖 19	數學好好玩	60
圖 20	「整數」概念的探索活動	61
圖 21	「整數」概念的隨堂練習	61
圖 22	小數與分數的標記方式	62
圖 23	整數的乘法特性	62
圖 24	乘法交換律的例題說明	62
圖 25	乘法交換律的隨堂練習	63
圖 26	ADDIE 教學設計模式—七年級數學識讀文本發展流程圖	66
圖 27	知 1 層次的概念譬喻	74

圖 28	知 2 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」	74
圖 29	行 1 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」	75
圖 30	行 2 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」	75
圖 31	識 1 層次的符號意義與解決問題能力	76
圖 32	識 2 層次的論述表徵	76
圖 33	三個版本分數單元小概念之知能鋪陳樣式比較	82
圖 34	三個版本分數單元小概念之技能鋪陳樣式比較	83
圖 35	三個版本分數單元小概念之識能鋪陳樣式比較	83
圖 36	三個版本負數與分數單元小概念之知行識鋪陳樣式比較	83
圖 37	甲版小數在數線上的標示之教材鋪陳	84
圖 38	乙版負數的計算機應用之教材鋪陳	85
圖 39	丙版負數的計算機應用之教材鋪陳	85
圖 40	甲版分數的計算機應用之教材鋪陳	85
圖 41	丙版分數的計算機應用之教材鋪陳	85
圖 42	甲版獨立區塊之小概念分析	86
圖 43	乙版獨立區塊之小概念分析	86
圖 44	丙版獨立區塊之小概念分析	86
圖 45	在學習環境中應避免使用的字詞	88
圖 46	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的概念心像	90
圖 47	增修識讀文本分段符號	92
圖 48	分數分割的意義	93
圖 49	分數分割的練習	93
圖 50	帶分數轉換	94
圖 51	不合宜的簡答提問語	94
圖 52	分數檢核卷—對分數想法改觀的多元描述	98
圖 53	分數檢核卷—對分數在生活中的連結描述	98
圖 54	分數檢核卷—對分數與小數產生關聯的描述	98
圖 55	「分數的意義」識讀評量—與生活經驗的連結 I	100

圖 56	「分數的意義」識讀評量—與生活經驗的連結 II.....	101
圖 57	單位分數相乘與面積關係的視覺操作.....	104
圖 58	單位分數與幾何圖形概念的連結.....	105
圖 59	「一般分數」以「單位分數」表示面積的幾何概念.....	106
圖 60	「單位分數」結合面積概念的藝術創作.....	106
圖 61	「分數的乘除」識讀評量- 分數乘除意義的理解與計算.....	109
圖 62	科技工具的應用.....	109
圖 63	分數的認識—知能文本設計.....	110
圖 64	分數在數線上表示之評量.....	110
圖 65	「認識單位分數」之知能文本設計.....	110
圖 66	單位分數之知能評量.....	111
圖 67	「分數的乘除」之技能文本修正—倒數設計.....	111
圖 68	「分數的乘除」之技能文本修正—連續量設計.....	112
圖 69	分數、小數、百分比的連結.....	112
圖 70	分數的多元表徵 1.....	113
圖 71	分數的多元表徵 2.....	113
圖 72	分數的多元表徵 3.....	113
圖 73	學習欣賞「單位分數」之識能設計.....	113
圖 74	單位分數與面積之間連結創作示範.....	114
圖 75	「分數的認識」之生活應用素養.....	114
圖 76	認識「單位分數」之學習日誌.....	115
圖 77	認識「單位分數」之學習單.....	115
圖 78	「分數的認識」之學生閱讀整理 1.....	115
圖 79	「分數的認識」之學生閱讀整理 2.....	115
圖 80	真分數的意義描述 1.....	115
圖 81	真分數意義的描述 2.....	116
圖 82	「分數的認識」之學習單.....	116
圖 83	「單位分數」與幾何圖形的創作發表.....	116

圖 84	實驗組與對照組之後測「知行識」各向度平均成績比較長條圖	120
圖 85	識能的探索活動	128
圖 86	負數檢核的多元表徵	130

表目錄

表 1	數學素養之要素	21
表 2	「知行識」表現能力描述通則	24
表 3	數學素養五面向與實踐指標	27
表 4	七年級負數小概念與學習活動內容名稱	29
表 5	數學領綱的「分數」學習表現	30
表 6	七年級分數小概念與學習活動內容名稱	31
表 7	112 年版三家版本數學教科書的單元內容結構	32
表 8	三個版教科書內容設計與數學素養實踐對照表—以負數與分數為例	33
表 9	視覺顯著性與非視覺顯著性	41
表 10	ADDIE 的通用教學設計程序表	44
表 11	「—」號多元意義	46
表 12	「刻意的學習」與「隨意的學習」對照表	47
表 13	三個版本數學教科書基本資料	55
表 14	國民中學標準本位評量數學領域各主題評量標準—以分數為例	56
表 15	數學識能評量各向度目標、等級與規準說明示例	57
表 16	第一次「知行識」向度分類信度結果	64
表 17	第二次「知行識」向度分類信度結果	64
表 18	109、110、111 學年參與「數學識讀文本」教材實驗學生分布一覽表	68
表 19	分數概念檢核內容雙向細目表	69
表 20	識讀文本分數單元「執行評量摘要表」	70
表 21	負數教學實徵研究對象基本資料	73
表 22	負數學習評量通則	77
表 23	「負數的認識」理解分類表	78
表 24	負數素養知行識向度分類試題範例表	79
表 25	「知行識」向度分類信度結果	79
表 26	「負數的認識」前後測表現差異示例說明	80
表 27	「負數」與「分數」教材在「知行識」向度的敘述統計	81

表 28	「負數」與「分數」教材在「知行識」向度的敘述統計(不含獨立區塊)	82
表 29	「分數識讀文本」教案摘要表	99
表 30	分數識讀文本學習目標—分數的意義	100
表 31	分數識讀文本設計—分數的意義 流程摘要表	101
表 32	分數識讀文本學習目標—單位分數	102
表 33	分數識讀文本設計—單位分數 流程摘要表	103
表 34	分數識讀文本學習目標—分數的乘除	107
表 35	分數識讀文本設計—分數的乘除 流程摘要表	107
表 36	以 McNemar-Bowker 檢定「負數的認識」學習前後的差異表現	118
表 37	前後測問卷對「負數的認識」理解分類百分比	118
表 38	實驗組與對照組相關數學表現	118
表 39	實驗組與對照組在後測的「知行識」向度共變異數分析摘要表	119
表 40	模式估計兩組在後測「知行識」各向度之平均數與標準差	120
表 41	知能測驗示例回饋	120
表 42	技能測驗示例回饋	121
表 43	識能測驗示例回饋	121

第壹章 緒論

第一節 背景

十二年國民基本教育的課程綱要總綱 [12 年課綱]，開宗明義即說明其教育願景為「成就每一個孩子——適性揚才、終身學習」，意在倡導課程設計應以個人主體為發展起點，透過「核心素養」培育，讓個人潛能得以適性開展，進而運用所學使個人及整體的生活、生命更美好。為達成此願景，12 年課綱擘劃「核心素養」為課程發展之主軸 (教育部，2014，頁 3)。所謂的「核心素養」，就是「一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度」 (國家教育研究院，2021)，也可說是融合認知、技能和情意，經內化後的綜合表現。依據「核心素養」所設計的課程與教學，即謂之「素養導向」課程。所以 12 年課綱所倡導的素養導向課程，即強調以學生為中心，重視認知 (求知、應用、推理) 與情意的學習展現 (國家教育研究院，2021；林福來等，2013)，並期望學生得以活用所學的知識、技能與態度，並透過實踐力行而成就自己的全人發展。

面對 12 年課綱的「素養導向」，主要目的是希冀學習者在完成十二年國民教育之後，能於各自的學習、工作、生活領域中，提升其個人的生活與品質。那麼數學領域的數學素養課程該如何與之呼應？先看看國外的近似主張，例如：美國數學教師學會 (the National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]) 1989 年明確提出五種追求數學素養的總體目標：學習珍視數學、對自己的數學能力充滿信心、成為數學問題解題者、學習用數學溝通以及學習數學化推理。又如 2018 年經濟合作暨發展組織 (Organisation for Economic Co-operation and Development, [OECD]) 宣佈修改其數學素養為：「個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工具，來描述、解釋和預測現象。數學素養促進個體瞭解數學在世界中所扮演的角色，並促使個體作出有根據的判斷與決策，此乃成為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民所需」 (OECD, 2018)。這些主張呼應了重視數學在不同領域的有用性和解決問題能力的意識，也更進一步地強調數學素養與公民之間的聯繫。

基於 NCTM 和 OECD 對於數學素養的提綱，數學教育應如何落實「素養導向」這樣的理想目標，或是學習者應具備哪些的「數學素養」能力？本研究整理出以下三種主張：美國國家研究委員會 (National Research Council [NRC], 2001) 主張數學素養即「數學精練 (mathematical proficiency)」概念，包含五個面向，(1) 概念理解 (conceptual understanding)、(2) 程序流暢 (procedural fluency)、(3) 策略運用 (strategic competence)、(4) 適性推論 (adaptive reasoning) 以及 (5) 建設性傾向 (productive disposition)。Arcavi (2003) 認為數學素養的能力即應具備：(1) 以數學方式表述現實世界的問題，(2) 使用數學來解決以數學方式表述的問題，然後 (3) 解釋和評估現實世界中的數學結果。Dym (2004) 則認為數學素養是關於觀察、描述、解釋、預測行為或現象的過程。這些主張不但指出數學在個體學習上可提供的功能，亦可做為個體在數學領域中的實踐指標，或是所應具備之數學素養能力。

是故，素養導向所設定的課程實踐，乃是期待學生能從各種情境脈絡中，培養探索數學的信心與正向態度；培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力；培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度；培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力；培養日常生活應用與學習其他領域／科目所需的數學知能；培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質 (林福來，2021)，從個人數學能力培養，進而將數學習得的能力運用於解決問題，或以數學做為解決生活中問題的良好工具。

然而這些學習面向在另一個層面也意謂著教師思維、或教法策略、抑或數學課程的必須改變。但縱使教師可以根據相關教育理論，為學生準備完善的教學環境課程設計與教學策略，仍無法保證能有良好的學習效果，因為教學效果的良莠，並非單方面取決於教師的教學，也包含師生之間的互動學習 (張春興，2012)。楊德清 (2018) 認為要改善當前的教育方向，最重要而且是最有效的方法就是數學課程的改變，因為它可以改變教室的教學與影響學生的學習，進而產出具備獨立思考、創造力和批判思維能力的學生。同時數學課程的發展，不僅可做為下一代傳遞文化的媒介，亦可改變與建立更好的國民生活模式 (Pujiastuti & Haryadi, 2023 ; Zaslavsky, 2019)。

12 年課綱公告之後，新的各領域課綱也在 108 年正式上路，即所謂的「108 課綱」。以數學為例，國中階段最明顯的不同就是從原本重結構的學科知識企圖解構重組，轉

變為探究創造的應用知識，企圖讓學習者亦能將數學做為可以表達論述的溝通工具，而這樣的轉變首當其衝的亦是教科書內容的改變。自民國九十一年國中數學教科書全面開放以來，以目前市面上所流通的三家甲、乙、丙版本，深耕至今都已有 20 年之久，不論是知識內容、排版設計、周邊教材資源皆已完備。檢視各版本教科書內容，基於市場導向、教師要求、審查制度等因素，其內容及呈現形式也都有趨同現象（張芬芬等，2010；葉興華，2011）。三版教科書傳達知識、培訓技能的功能，亦確是游刃有餘。

然而正如前文實踐數學素養的普遍共識，認為數學素養不僅是個體可以在現實生活中理解和應用數學，亦能對其他領域的知識做跨域連結與整合。但就教科書而言，不論是教材安排或課外補充，其內容是相對薄弱的。舉例來說：負數單元的學習，各版教科書不外乎都是從生活經驗如溫度計的使用引進負數的應用，然後對於像收入的盈虧即懂得以「+」或「-」表示，做為生活中的連結應用，在數線上表示正負號，藉此說明相反量的意義，隨後即進行負數的四則運算。相對地並未提供學習者對負號本身多元概念（單元運算、二元運算、對稱概念）連結的學習機會，以及負數的代數概念訓練。

又如分數單元的學習，在開始之初即介紹單位分數為分子為 1 的分數，之後再無單位分數的應用與練習，彷彿一個孤立的專有名詞。又或是在分數的四則運算學習，皆以小學學習過的「分子×分子」、「分母×分母」一語帶過，接著即進行分數的四則運算精熟演練。亦忽略了單位分數的再認識，可增加對分數乘法與分數除法意義的體認。更重要的是，分數概念的理解影響著代數能力的發展 (Lortie-Forgues et al., 2015)。這些都說明現行的數學教育方向仍是流於所謂的「學科導向」，較少有機會提供學習者體認數學知識的意義連結與整合的「素養導向」，而這些未能在教科書上多元呈現的面向，則為數學素養的課程設計提供了適切指引。

觀之 12 年課綱的設計目的，實踐「核心素養」為其課程主軸，然而「核心素養」又是「一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度」，此一理想目標要落實在教學現場，就數學科而言端賴於數學素養之實踐指標。鑑於過往，不論我國或各國在進行課程設計時，皆強調內容 (contents) 與能力 (skills、competence、literacy、practice) 兩大面向，上文所舉之例，縱使在傳達其知識內容或培養熟練能力，這兩大面向仍也應有需連結之數學概念與知識體認。單維彰 (2018a) 指出，「知識」和

「能力」都是可以在十二年國教課程裡次第發展的學習目標，而「態度」則應是十二年國民基本教育完成之時的總體目標。而且就一般心理學而言，「態度」即包含了情感(affective)、行為(behavioural)、認知(cognitive)；或是與動機、機會、價值觀與意識形態有關(單維彰, 2018a)，故數學素養的「態度」實在難以明確成為「知識、能力」以外的獨立向度，也不容易做為學科領域課程設計和教學目標的指引。就如同黃嘉雄(2017)為文指出素養導向教學不能將「核心素養直接做為日常的具體化教學目標」。

為能積極具體實踐「素養導向」的「108課綱」課程理念，林福來等(2013)在十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究[前導研究]，即建議以「知行識」做為12年國教素養導向教育的數學課程架構，以有別於以往的「認知、技能、情意」培養。前導研究以中文的「知」、「行」、「識」來詮釋12年國教數學課程的內涵，便於「讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接」(單維彰, 2018a)。林福來等(2013)對「知行識」基礎論述是：「知」就是概念理解與概念間的整合、「行」就是對程序性知識的瞭解以及如何適當地彈性、準確有效率地運用及執行的過程技能，「識」則內含有或者區分出認識、辨識與見識的較高層次認知，甚至包括賞識等相信數學有益、認為數學美好、堅忍、勤奮等情意面向。

在面對21世紀科技世代的來臨，不論是報章雜誌的深度專欄、傳播媒體的科學報導、乃至網誌評論的獨立思考，都在傳達學習的知識不僅不再侷限於課本中或學校中的教師傳授才能獲取，更多的知識是要在生活中獨立閱讀習得。所以「數學教材」亦應該要從數學素養的觀點下，融入日常生活脈絡的關聯，得以轉身做為除了包含知識內容與技能熟練與應用，提供教師傳道、授業、解惑的工具的功能，同時也應引導學生在自主的生活空間中獨立習得或領悟數學之用、數學之美、以及體認數學知識的意義連結與整合的學習機會，並提供與其他領域間的關聯性學習。

上述目標看似艱困難行，然對於致力於數學教育的研究者而言卻始終未嘗懈怠，諸如：國內研究，針對數學素養與課程探究有：單維彰(2016)「素養、課程與教材—以數學為例」、單維彰(2021)「數學素養課程的轉銜」、單維彰(2018a)「論知行識做為素養培育的課程架構」、游自達(2016)「數學素養之意涵與其變遷」、鄭章華與單維彰(2015)「素養導向之數學教材初探」、左台益等(2018)「臺灣、新加坡及巴西數學教科

書中數學素養內涵之比較—以畢氏定理為例」。針對數學素養與教學探究有：郭明田 (2021) 「國中數學素養導向教學設計與學習成效之行動研究」，陳珮珊與秦爾聰 (2013) 「數學探究教學對國中七年級學生數學素養影響之研究」；針對數學素養與評量探究有：陳金尚 (2016) 「國中數學素養之數位評量設計與探討」、陳玉芬與單維彰 (2022) 「數學識能評量初探—以 7 年級分數主題為例」等。不論何種探究或研發，其目的皆在於找出以數學素養為最終理想下的有效學習策略。

國外研究部分，亦約略可分為二個面向，其一是利用 PISA (Program for International Student Assessment [PISA]) 測驗和 OECD 對數學素養的定義 (OECD, 1999、2013)，或是針對 PISA 測驗所收集的數據，由這些視角驗證自己國家中對數學素養教育的發展和影響 (Areepattamannil, 2014; Jürges et al., 2012; Roth et al., 2015; Stacey, 2015)；其二是將數學教育中的主題理論與數學素養的概念連結起來，則像前述 NRC (2001) 針對數學素養提出的五種數學能力——概念理解、程序流暢性、策略能力、適性推論和建設性傾向，並指出這些能力可以如何與 PISA 的關鍵目標 (關於學生在數學本身和更廣泛的真實環境中應用數學知識和技能的評估) 做連結，或是 Gatabi 等 (2012) 應用單一概念，如：「將數學建模視為數學素養的關鍵過程」，而數學建模的問題即源自於數學以外的日常生活問題，學習者必須用數學術語表達問題，透過應用數學概念和過程來解決問題，解釋解決方案以提供答案，並檢查答案是否足以回答原始問題。這些研究的一個共同因素就是著眼從學校數學教學中進行數學素養的探究 (Chen & Chiu, 2016)。

由上觀之，不論是國內外研究，皆可發現諸多學者在探究數學素養的關注點上，可以大至國家的數學教育方針，亦可細緻為學校教育中數學素養的養成，如教學策略的設計、教學單元的探究、素養評量的編製、或是數學素養文本的銜接，這些都是在面對數學素養為主流的教育潮流下，我們可以看到的努力方向。誠如相關文獻所提及，改善當前教育方向，最重要且最有效的方法就是數學課程的改變，因為它不僅可以改變教室的教學與影響學生的學習、亦是做為傳遞文化的媒介與建立更好的國民生活模式。同時，在這樣的時空背景下，根據國內外的相關研究，我們看到可以如何從現今教科書內容中，開發與實驗適當的數學素養之銜接文本的一道曙光。

第二節 研究動機

教科書不僅是中小學階段最主要的教與學資源，也反映新世代國民的未來圖像 (陳麗華, 2008)，教科書既是教師於課室內主要的教學工具，也是具體呈現學生學習成效的主要方式，或為教學及評量提供一個可依循的框架 (徐偉民, 2013；Schmidt et al., 2002)，教科書更可做為分析各國教育政策及課程制定的理想切入點 (左台益, 2018，Valverde et al., 2002)。所以若希望教科書呼應課綱想傳達的「數學素養」，那麼必須先瞭解教科書有多少「數學素養」的教育內涵。因此，對教科書進行分析是有必要的，因為適切的數學課程設計與活動對於數學素養的發展至關重要 (Niss, 2015)。

同樣地，我們也期待一種文本，以展現數學素養為目標，或是以提升數學素養為理念。如果課程理念與目標，能藉由文本設計而具體達成時，那麼此文本亦可成為教科書之有力推手。所以這樣的文本，必須包含對於數學本身的意義理解，以及對於數學做為供應社會所需的實用價值的體認 (水心, 1979)。換句話說，具備「數學素養」能力的數學知識教材，除了包含知識內容與技能熟練與應用之外，亦聚焦於體認數學知識的意義連結與整合的學習機會，以及數學與其他領域的關聯性及應用性。這樣的文本，本研究將其稱之為「數學識讀文本」[識讀文本]，亦為本研究主要發展之目標。

既是要設計一個可以體認數學意義的文本，就是要理解數學的語言，Hiebert 與 Carpenter (1992) 認為，理解數學就是理解數學脈絡下所使用的數學符號語言。數學的語言是符號、概念、定義以及定理，我們可以說它是一種世界的共同語言，正因為是共通的語言，所以它需要有著大家可以共同遵循的規範或共同認可的表達方式，因此它需要刻意學習。而「概念譬喻 (metaphor of object)」學習，即指出數學物件的譬喻可做為形成數學概念的有效工具 (Sfard, 2008)。此外，維高斯基 (Vygotsky, 1896-1934) 的符號學習理論核心思想正是符號語言學 (semiotics) 與中介 (mediation) 的概念 (Vygotsky, 1962)，Albert 等 (2012) 更認為維高斯基的符號學習理論非常適用於詮釋數學的學習情境，因為數學的概念形成過程不可或缺的一部分就是涉及符號 (symbol) 的使用，如我們可以使用 $(x, f(x))$ 將函數對應關係轉譯為平面上的點坐標，理解它就是傳達一種概念或是定義。理解數學知識就是能夠理解符號表徵的內在知識，而這些有結構性的內在知識正需要透過外在表徵連結而習得。

然，對於專家（數學家、數學教師等）而言，不論何種類型文本都易於數學知識的編碼（陳述）與解碼（理解）。例如： $y = mx + b$ ，數學家在閱讀過程就已直接認知為「變數 1 = 常數 1 × 變數 2 + 常數 2」，但對一般學習者（泛指代數初學者）而言，這樣的一個式子，可能皆視為相同的英文字母符號且毫不相關 (Dostal et al., 2018)。尤其負數，是學生邁入國中學習階段遇到的第一個新檻 (Fuadiah et al., 2017)，「負號」更是七年級階段要學習的新符號。國內教科書中負數教學順序通常是：認識負數在生活上的應用，諸如氣溫、方向或進退等二分法概念，然後由相反數、數線概念進入數的大小比較，接著就是正、負數的四則運算 (洪有情, 2023; 陳宜良等, 2005)。雖然負數教學研究也有很多都是嘗試將負數歸因於某種有意義性的行為，以解決負數的合理性問題 (Altıparmak & Özdoan, 2010)，然而學生在學習負數時，還需要調適由自然數擴充到含負整數、負分數、負小數等更大範圍的數的概念學習 (林保平, 2005; Altıparmak & Özdoan, 2010; Blair et al., 2012)。舉例來說：負數學習的初學者，對於「負負得正」的口訣可以朗朗上口，但面對 $2 - (-5)$ 時，卻又顯得沒有自信，因為覺得為何讀音不同 (陳玉芬、單維彰, 2021)；甚至對於負數採直接字面解釋為負面（不好）的數。又或是負號的多元意義，如性質符號、單元運算符號、二元運算符號，最終產生「負」號的身分混淆，讓學習目標因為要處理有理數的減法運算而受到干擾 (Vlassis, 2004)。再如「負號分離」(detachment from the minus sign [DFMS]) 的學習障礙，像 $5 + 2 - 4 + 8$ ，有的學習者會優先計算「-」號後面的 $4 + 8$ ，得到 $5 + 2 - 12$ ，宛如「-」號不是針對 4 這數字；這種障礙即根源於代數結構的學習缺乏 (Molina & Castro, 2021)。Kilhamn (2011) 認為，若能在文本中有意識地透過適當的譬喻、觀察與溝通，在學習活動中有目的地學習，將有助於負數概念的理解。

再說分數的重要性。首先它有應用於日常生活中的實用性，比方說食譜配方的比例、在已知的距離與時速下，計算抵達目的地所需的時間，或是每年繳稅額與年收入占比等，這些都是在理解分數概念後可得到的便利性。除此之外，分數概念的理解亦影響著代數能力的發展 (Lortie-Forgues et al., 2015)，像在 1978 年，國家教育進步評估 (National Assessment of Educational Progress, [NAEP])，針對超過 20,000 名美國八年級學生 (13 歲和 14 歲) 做評估：選擇最接近 $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ 的整數是多少？選項為 1、2、19、21

和「我不知道」，結果只有 24% 的學生選擇了正確答案「2」，而最常見的答案是「19」(Carpenter et al., 1980)，這些都是阻礙了代數的能力與對計算的自信。

「分數」的學習對初入國中的學生而言，雖然不是全新的概念，但仍有其學習上的困難。比方說：在學習分數時，有一種學習偏見的障礙，即是對全數的認知偏見 (whole number bias) (Gabriel et al., 2013; Yuan & Chen, 2023)。那是基於分數 (有理數) 是稠密性集合 (dense set)、全數是離散集合 (discrete set)，所以學習者會誤認為分數之間也是有限個，如 $\frac{1}{3}$ 到 $\frac{1}{5}$ 之間只有 $\frac{1}{4}$ ；或是對於一個有理數只能有一種的分數表示概念，無法轉化成等值分數；又或者將分數 $\frac{a}{b}$ 視為二個全數，造成二個分數相加可以是分母加分母、分子加分子，甚至對於分數的大小比較只關心分母的大小。

另外，分數乘法與除法方式，所有教科書都是陳述 $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}$ 與「除以一個不為 0 的分數，就等於乘以這個分數的倒數」的口訣後，即開始程序演練。至於「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」、「為什麼學習它」皆未多加說明，雖然學生也總是朗朗上口，可以機械地操弄分數計算，但往往是「知其然，而不知其所以然」(楊德清、洪素敏，2008)，導致不能有效運用分數，比方說，求出某數的 $\frac{3}{4}$ ，這時某數可以先乘 3，再除以 4，或者先除以 4 再乘 3，這樣的表示法不應只是告知「分數相乘就是分母乘分母，分子乘分子」或是「分數相除就是乘以倒數」(Brousseau, et al., 2004)。又或是遇到應用問題，無法透過敘述上的轉譯使得難度增加，或認為對於全數的認知偏見，致使學生不能真的理解「分數」是「一」個數，而不是上、下二個數。這些對於分數概念學習的不穩固，都會影響即將面對的代數抽象思維運算 (Thompson & Saldanha, 2003)。諸如上述這些分數的表達方式，是有其多元想法要傳遞，而單位分數正可以做為說明這些原理的策略之一。同時，單位分數也是分數運算程序中不可或缺的基本能力。

負數或分數的學習，都應強調數學知識脈絡下的理解與生活脈絡中的應用，而這些正是呼應「素養導向」的課程理念。也讓學科與他們的日常生活背景（即個人、社會和文化環境）聯繫起來，幫助學生了解他們正在學習的學科素材的意義，進而進行創造性思維 (Johnson, 2002)。Selvianiresa 與 Prabawanto (2017) 也認為老師將素材與生

活連結之後的情境教學，學生可以積極地將所學內容與日常生活背景連結起來，從而完整地理解，同時更易從連結的生活經驗中發現相關的概念。Ekowati 等 (2015) 在七年級學生的正負數的乘法與除法研究中，說明教師提供情境脈絡的學習能使學生在學習過程中更加積極，同時對負數概念的掌握程度也有所提高。對於七年級的學生而言，他們尚未有能力可以自行意識到正確的數學概念 (或是迷思概念) 以及數學可以如何應用。這些研究確實印證了在真實情境或自然脈絡中的學習可以提升數學素養，甚至也包含了學習動機的提升 (Berns & Erickson, 2001; Ekowati et al., 2015; Maryani & Widjajanti, 2020; Selvianiresa & Prabawanto, 2017)。

Sfard (1991) 認為「負數」與「分數」的學習，可以透過對「符號語言」學習的理解與掌握，運用「數線操作」與「語言譬喻」讓抽象的負數概念轉化成具體譬喻，連結負數的多元性概念，並以「概念譬喻」進行負數的策略性教學，提出學習「負數」時相關的概念思維。Saxe 等 (2007) 也認為數線可以幫助學生對於分數重要性的理解，並且可將數線做為理解單位分數、全數與分數之間的關係、以及有理數稠密性等的工具，例如：兩分數之間有無限個分數，或是雖然每個分數都是唯一的，但該分數可以有無限多個命名 (即等價性)。此外，在國中數學教科書中從未使用如何從單位分數的認識，進入分數的相乘或相除，或是以單位分數來表示一般分數時，進行擴分、約分、分數等值概念等的技能熟練培養。在國中數學教科書中，亦未曾使用單位分數與面積概念的連結，進而認識一般分數的面積表示法，學習幾何與代數的結合，提供學習者對於分數的多元啟發與洞察，並提供賞識數學價值的機會。

「分數」與「負數」兩單元實乃七年級學生初入學即面對的學習，而且「分數」在數學領綱國中階段之學習內容 N-7-3 指標之後，數學課程再也不提分數，亦即學生若不在此時確實掌握分數運算，則在數學課程中再也沒有專章的學習機會，只能融入其他單元之內學習。上述相關議題，皆是研究者對於本研究之起心動念，本研究即企圖運用「知行識」課程架構的實踐，發展一套著重數學知識的概念縱向連結、數學知識跨域橫向整合以及強調溝通表達，以展現數學素養能力的「數學識讀文本」。

第三節 研究目的

本研究之目的即在於發展一套培養數學素養識能發展之「數學識讀文本」，又基於上述對於負數與分數分析之重要性理由，該二個單元亦是剛進入七年級階段學生學習進入抽象思維的第一關卡，因此本研究選擇「負數」單元與「分數」單元做為探究的對象。又因涉及識讀文本設計，應於「知行識」觀點下發展七年級「識讀文本」的設計內容，故須先針對教科書中「負數」與「分數」內容進行分析。既是發展「數學識讀文本」，理應探究文本設計發展歷程之可行性，故以「分數識讀文本」，進行文本設計之實例發展的質性探究分析。然而如同前文所述，負數與分數皆為七年級學生需要學習抽象思維的單元，且負數單元又是學生邁入代數思維的第一個學習目標，是故本研究以「負數識讀文本」做為實徵研究對象，藉此探究此文本是否可以提升學生的數學識能，亦企圖在本研究中周延陳述負數與分數識讀文本之設計理念。

基於前述理由，本研究目的的分述如下：

- 一、分析教科書中「負數」與「分數」教材內容在「知行識」向度之內涵。
- 二、「數學識讀文本」開發研究一以七年級「分數單元」為例。
- 三、「數學識讀文本」教學成效實徵研究一以七年級「負數單元」為例。

本研究希冀做為後續發展相關數學識讀文本之建議與參考，以及未來教科書在識能設計上補強內容之輔助工具。

第四節 研究限制

本研究分析之國中數學教科書即目前國內現行使用的三個版本：甲版七上(110年8月)、乙版七上(110年8月)、丙版七上(110年8月)(洪有情，2023；張幼賢，2023；陳冒海，2023)。此外本研究基於方便性抽樣實驗，研究對象僅止於新北市立某公立高中國中部七年級學生之實驗結果，無法做全面性推論。

第五節 名詞釋義

1. 素養導向課程

指為使學生得以發展核心素養，其所設計的課程與教學取向，即所謂的「素養導向」課程。

2. 數學素養

指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點」(李國偉等，2013)。

3. 數學識讀文本 (mathematical literacy reader)

本研究所指的數學識讀文本，乃是根據素養導向目標，特別針對識能而設計的課程實踐文本。指以書面呈現數學概念學習的印刷資料，並配合七年級之教科書 (包含習作) 進度所編寫。目的在均衡呈現「知行識」向度的數學知識教材，亦即除了包含知識內容與技能熟練與應用之外，更聚焦於體認數學知識的意義連結與整合的學習機會，以及數學與其他領域的關聯性及應用性。

4. 知 (to-know) 、行 (can-do) 、識 (making-sense-of)

「知行識」乃林福來等 (2013) 提出做為 12 年國教素養導向教育的數學課程架構。也是本研究之「數學識讀文本」欲達成數學素養實踐所依循之課程架構指標。前導研究團隊認為「知識」和「能力」都是可以在十二年國教課程裡次第發展的學習目標，但是「態度」的層次較高，可以說是十二年國民基本教育完成之時的總體目標，建議以「識」取代「態度」做為課程設計與教材研發的指引，即透過「知行識」的課程架構，實踐數學素養的理想與願景。

5. 知能 (knowledge)、技能 (capability)、識能 (sensitivity)

本研究根據「知行識」表現內容之描述通則，將「知行識」三個向度的具體學習表現，分別稱之為知能、技能、與識能。

6. 概念譬喻

概念譬喻是詮釋一種符號或模型與概念之間的相關性，使之與個人內在無法看見的思維做連結，亦為本研究所發展之數學識讀文本，所使用之文本設計策略之一。

第貳章 文獻探討

第一節 數學素養

根據十二年國民教育理念與目標，課程的學習內容與學習表現應以「核心素養」做為發展方向，以培育十二年國教的學生所應具備的基本且共同的素養 (教育部，2014)。本研究所發展之「數學識讀文本」即以十二年國教數學領域課程綱要 [數學領綱] 所符應之「數學素養」為設計文本的依據。「核心素養」與「數學素養」兩概念的源起與發展各有脈絡，亦曾分別發展，無明確的首從關係；儘管如此，兩者的基本立場和總體目標，卻是相容的 (單維彰，2016)。本文僅從「數學識讀文本」之發展需求，探討「數學素養」的精神與內涵。以下，在個人學習過程中，針對「數學素養」應達成的整體目標，本文謂之宏觀理念；而為達成此一理念，所有可實踐之數學內涵，本文謂之微觀解析。

一、「數學素養」的宏觀理念

「素養」一詞，中文本有。民國 57 年實施九年一貫國民義務教育，可以說是臺灣教育發展史的一大里程碑，在教育上自有深遠的意義與價值，而那一年劃時代變革之一就是小學階段的學科名稱，從「算術」改成了「數學」 (單維彰，2016)。水心在 1968 年寫的一句話，似也簡潔地說明了何以有此名稱改變的理由：「由於數學知識本身之急遽增加，因而對於現代公民應有的素養，提出了比以前更大的要求 (水心，1979，頁 160)」，這一段文字可算是為臺灣的數學教育揭開了「素養」說法的序幕。到了 1972 年統計圖表首度進入臺灣的中學課程 (國中二年級)，陳冒海 (1989) 詮釋其意義為：「統計圖表之判讀是針對國民應有數學素養而設計的」。緊接著 1973 年公告的《高中數學課程標準》則明確指出「素養方面、訓練方面、應用方面」的課程目標，其中數學素養被解釋為「了解數學的一般內容、方法與意義」 (單維彰，2017)。到了 1995 年高級中學課程標準則有「提升高中生人文與科學素養」的說法 (教育部，2005，頁 599；鄭章華、單維彰，2015)。上述文獻說明了臺灣的數學教育在國小、國中、高中階段開始關注並使用「數學素養」的理念已超過半個世紀了，只是當時的「素養」還未發展成專

門化的教育術語，更白話地說，大概也只是意指一般人平常就應具備的「知識水平」(單維彰，2018c)。

蔡清田 (2020) 認為「素養」是指個人為了健全發展成為一個健全個體，必須因應社會之複雜生活情境需求，所不可或缺的知識 (knowledge)、能力 (ability) 與態度 (attitude)。可見「素養」一詞，會因強調的內容不同、發展脈絡不同，而有了不同的詮釋。「素養」做為教育的特定觀念並賦予專門化的定義，是外來的 (單維彰，2016)，最廣泛與之對譯的英文是 Competence、Literacy 或 Proficiency，以下分述其源。

1997 年 OECD 委託「素養的定義與選擇」研究案 (DeSeCo: Definition and Selection of Competencies) [OECD/ DeSeCo]，即直接使用了「key competence」一詞。Competence 可以直譯為「能耐」，它長期以來是人力資源管理 (HR: Human Resources, 簡稱人資) 領域中的用語，所以更注重學習所得的能耐 (單維彰，2016)。洪裕宏 (2011) 也提到一份德國的報告中，將 Competence 定義為「knowledge × experience × power of judgment」。在這裡，知識是 Competence 的基礎，經驗是知識應用在問題之解決的過程，判斷力則是行動的依據。統整而言，Competence 可以被瞭解為認知、能力或技能的表現，當然也包含情感、情緒及價值判斷與選擇的能力，若依此看，Competence 對譯於「素養」是恰當的。

Literacy 來自於國際學生能力評量計畫 (Program for International Student Assessment [PISA]) 之中對於數學評量內容的定義 (詳細定義內文可參看本研究 1 頁)。PISA 也是 OECD 所推動主導的計畫，同樣是在描述數學的知識、技能和行為表現，卻不使用 Competence 而改用 Literacy，透露出主事者將數學視為一種語言 (單維彰，2016)。Literacy 的原意是識字與讀寫能力，此概念不含聽與說的能力，因為它原指母語而非外語，能流利聽與說的人可能是文盲，不能算是具備了 Literacy，而將基礎數學視為一種語言，做為一切學習的基本工具，所以 Literacy 傾向於泛指文字與數字的特定基礎能力 (讀、寫、算)。為了細緻探討「素養」的外來概念，以下暫時將 Mathematical Literacy 譯作「數學識讀」。

至於 proficiency 一詞，相對於歐洲的 OECD 以「能耐」、「識讀」概括稱呼數學教育的預期成效，美國各州共同核心標準數學科 (Common Core States Standards—

Mathematics [CCSS Math]) 的說法則是 proficiency (National Governors Association et al., 2010, p.6)，暫譯為「精練」(精通熟練)，較有特定能力之精熟表現之義。CCSS 以八種行為表現定義數學精練 (mathematically proficient)：(1) 洞察問題並堅毅求解 (make sense of problems and persevere in solving them)，(2) 抽象與量化推理 (reason abstractly and quantitatively)，(3) 以理服人並可批判他人論述 (construct viable arguments and critique the reasoning of others)，(4) 以數學建立模型 (model with mathematics)，(5) 有策略地使用適當工具 (use appropriate tools strategically)，(6) 力求精確 (attend to precision)，(7) 探尋並善用結構 (look for and make use of structure)，(8) 敏察重複並尋思其規律 (look for and express regularity in repeated reasoning) (Ibid, pp. 6 – 8) (作者譯)。而這八項數學精練的行為規準，來自於美國國家研究委員會 (NRC, 2001) 對數學精練所提的五個面向，如本文第 2 頁所列。

不論是中文的「素養」，或是外來語的「competence」或「literacy」或「proficiency」都顯得較為不易界定。單維彰(2016)認為 Competence 與 Literacy 雖都有「能力」之意，前者較為綜合性與一般性(知識、技能與行為表現)，而後者傾向於特指基礎能力(讀、寫、算)，至於「proficiency」，基本上也是「能力」，但意指較為專門化的能力 (professional)，而且意指因為精熟而產生的有效性 (efficiency)，亦可說此三者之表現都在「能力」之上。

其實，在西方的數學教育發展脈絡中，Competence 一詞可追溯至 1944 年美國數學教師學會 (NCTM) 的戰後計畫委員會 (NCTM, 1970/2002, p. 244; NCTM, 1945)，文中記錄了美國二戰後對於代數 (Algebra) 有一個明確的目的——幫助軍隊和工業界應對戰爭，因此數學教育者希望幫助學生認識到一般公民生活中對代數的需求。下文即為該報告文之部分內文：

The arithmetic of the elementary school can be and must be improved. The high school needs to come to grips with its dual responsibility, (1) to provide sound mathematical training for our future leaders of science, mathematics, and other learned fields, and (2) to insure mathematical *competence* for the ordinary affairs of life to the extent that this can be done for all citizens as a part of a general education appropriate for the major fraction of the high school population. (研究者加註字型)

該報告提出改善從小學到大專最後一年的數學教學的建議，認為小學的算術必須提升，高中的需求則需要負起兩種責任：(1) 為我們未來的科學、數學和其他學術領域的開拓者提供良好的數學訓練，(2) 就所有公民而言，確保其具備足以應付日常生活事務的數學能耐，而上述課程是適合大部分高中生的一般性教育。當時委員會即要求學校應盡可能確保所有高中學生達成「數學能耐」。隨後加拿大即開始沿用 (Jablonka & Niss, 2014) 此說法。是故「數學能耐」是強調完成學業之後所具有的能力，故「數學能耐」此一專門術語可說是為「數學素養」提供了第一個範式。

至於 PISA 的評量理念將 Competency 改用 Literacy，¹ 探究此專門化定義的意涵，是將數學視為一種語言，它跟母語和外語一樣是學習與溝通的基礎媒介 (鄭章華、單維彰，2015)。在 NCTM 1989 第 5 頁內容中，亦直接使用數學識讀和有數學識讀能力的學生 (mathematically literate students) 這樣用語，而且並未加以定義，這說明此術語概念在當時已普及化，並已接受 mathematical literacy 做為數學教育的專門術語。NCTM 1989 也明確提出五種服務所有學生追求數學素養的總體目標：² 學習珍視數學、對自己的數學能力充滿信心、成為數學問題解題者、學習用數學溝通，以及學習數學化推理，可以看出這些目標皆在強調個人在數學領域中的實踐指標。

到了 1995 年「國際教育學習成就調查委員會」(International Association for the Evaluation of Education Achievement, [IEA]) 所舉辦的第三屆國際數學與科學教育成就趨勢研究 (Trends in International Mathematics and Science Study, [TIMSS])，首次針對中學生的科學識讀 (scientific literacy) 表達「每個國家應能培養所有在校學生，在離開學校

¹ 針對數字的讀寫和計算能力，英文本來就有相對 literacy (識字與讀寫能力) 的字 numeracy (識數與筆算能力)，而 PISA 不直接用 numeracy 而另造 mathematical literacy 的原因顯然是它的評量內容不僅是數與量，還包括形體、代數、變化關係與不確定性。數學教育學者將 Mathematical Literacy 和 Mathematical Competence 都轉譯成數學素養。(鄭章華、單維彰，2015)

² 數學素養的五個總體目標英譯依序如下：(1) They learn to value mathematics、(2) They become confident with their ability to do mathematics、(3) They become mathematical problem solvers、(4) They learn to communicate mathematically、(5) They learn to reason mathematically

之後能應用數學和科學知識來應對生活的挑戰」。數學識讀的學習從個人數學能力培養、欣賞數學價值之外，增加了從數學習得的能力運用於生活中的溝通與解決問題，並強調「數學識讀」已不僅僅只是具備數學學科能力，更重要的是能將數學做為解決生活中問題的良好工具，同時「數學識讀」也代表與觀察、描述、解釋、預測行為或現象的過程有關 (Dym, 2004; Haara et al., 2017)，而在英國的數學課綱也同時採用了「數學識讀」這個用語 (Department for Education, 2013)。

OECD 所主持的 PISA 始於 2000 年，至 2003 年數學首次成為主要評估領域，PISA 為此制定了完整的數學素養框架，當時的定義為：「個人在現實生活中識別和理解數學的能力，指出數學素養即為具有建設性、關心和深思熟慮的公民，能在生活上運用數學作出有根據的判斷與決策之能力」(OECD, 2004)。接著在 2012 年，PISA 再次提出數學素養的重點應在於「……積極地參與數學，旨在數學推理和使用數學概念、程序、事實和工具來描述、解釋和預測現象」(OECD, 2013)，其中特別強調學生在積極地解決問題的過程中，應包含三個主要程序：「制定數學」、「使用數學」及「解釋數學」(OECD, 2013)。至此，PISA 數學素養似乎明確呼應了 Arcavi (2003) 對於數學識讀的新定義：(1) 以數學方式表述現實世界的問題；(2) 使用數學來解決以數學方式表述的問題；然後 (3) 解釋和評估現實世界中的數學結果。

到了 2018 年，OECD 宣布 PISA 2021 將修改數學識讀的定義為：「個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工具，來描述、解釋和預測現象。數學素養促進個體瞭解數學在世界中所扮演的角色，並促使個體作出有根據的判斷與決策，此乃成為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民所需」(OECD, 2018)。直至 2022 年 PISA (原定 2021 年實施，因全球新冠肺炎疫情延後一年)，更將數學素養評量全面性分成三大向度：數學推理與解決問題 (數學建模)、數學內容、真實生活情境中的挑戰，並強調數學素養即為具有反思性的公民在參與社會相關重大議題時，能理解數學在世界所扮演的角色，並作出有根據的判斷與決策的能力 (OECD, 2019)。這些呼籲代表了開始重視數學在不同領域的有用性和解決問題能力的意識，也更進一步地強調數學識讀與公民之間的聯繫。

而臺灣數學教育領域中的「數學素養」開始普遍使用，則是源自於 2006 年開始加入由 OECD 主辦的 PISA 的評量測驗。教育部提倡的十二年國民基本教育，亦以素養概念統整過往教學中所強調的知識、技能和態度 (曾志朗等，2017)，其中的數學素養就是培養學生成為理性溝通、社會參與的國民重要素養之一，也因此是重要的基礎教育課程目標 (左台益等，2018，頁 35)。再看李國偉等 (教育部，2013，頁 7) 主張：

數學素養指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

由於曾志朗等 (2017) 採用 literacy 當作「素養」的對譯英文，而且李國偉等 (2013) 對數學素養所做的解釋，顯然呼應 PISA 的數學識讀定義，從此之後，mathematical literacy 便成為我國「數學素養」的對譯英文，沿用至今。只是臺灣數學教育社群表達「數學素養」的時候，仍然可能引用「能耐」和「精練」當中的概念細項 (單維彰，2019)，這些論述皆明確說明數學素養呼應了 OECD (2018) 對於積極參與社會及重視將學校裡所學的數學應用於日常生活中的面向。

另外還有人倡議新素養 (new literacy)：隨著科技的進步，學校不再是學習知識的唯一途徑。就像 Coiro 與 Dobler (2007) 主張數位閱讀理解比紙本閱讀理解需要更多能力，這包含了適應網路與科技變化的學習力，所以新素養已包含了訊息定位 (locate)、批判性評估 (critical evaluation)、訊息整合 (integration)、以及溝通分享。而這樣的新素養亦應融入數學教育中，因為「能力」、「知識」與「理解監督」，這三者是彼此交互影響的關鍵 (柯華葳著／陳明蕾編，2022)。亦如 PISA 自 2012 起，除了評估學生的閱讀素養、數學素養與科學素養外，每次評測都會再加測一項素養能力——2012 年加測解決問題能力，2015 年加測合作式解決問題能力，2018 年則加測全球素養，使得評量情境變得更加廣泛且更貼近日常生活，藉此評估學生是否能運用自己的知識與技能來解決現實生活中的問題 (陳盈如等，2022)。顯然對於數學素養的定義，除了聚焦在數學學科知識的獲得，以及數學問題解題能力之外，已經開始考慮數學素養的其他維度。

但不論是數學素養，抑或是新素養，透過時代的演變以及數學教育的發展，我們理解「數學素養」是會為了適應時代需求或數學知識的發展而改變的，是會隨著時代的流變與時俱進的。我們預期數學素養愈成功的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，亦愈能適應社會的變化，這是具建設性、投入性及反思能力的公民所需應具備的 (Thrilling & Fadel, 2009; OECD, 2022; Kristanto & Santoso, 2020)。所以，觀之數學素養的宏觀理念，就是「數學素養」是一個得以讓個體運用數學知識為基礎，並有自信地應用相關知識解決日常生活問題的有機體。而素養導向之課程的最終理想目標即是養成能隨著社會變遷、時代演進，而不斷學習以支持個體改變得適應世界的學習能力。

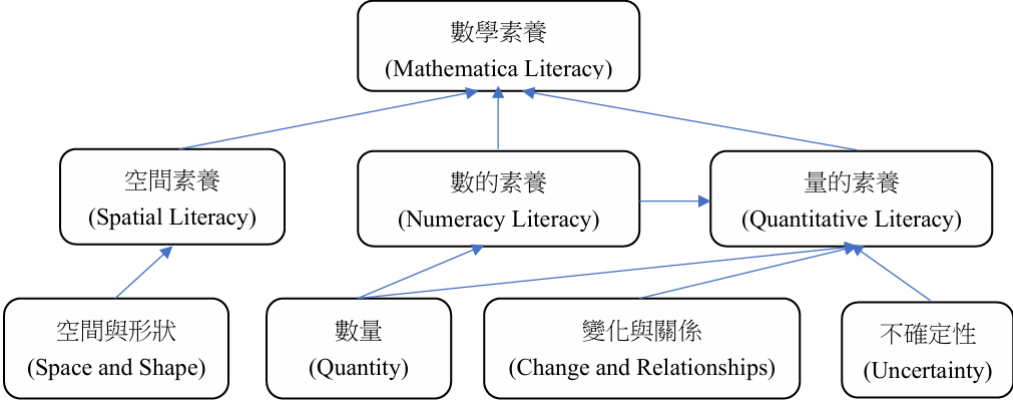
二、「數學素養」的微觀解析

如前文所述，「數學素養」是理念，一種能力展現的理念，那麼學習者應依據哪些指標或內容達成這樣的理念？de Lange (2003) 認為要釐清數學素養內涵，應先了解數學的組成究竟為何，亦即「數學素養」的微觀解析。de Lange 將數學學習內容區分為數量 (quantity)、空間與形狀 (space and shape)、變化與關係 (change and relationships)、以及不確定性 (uncertainty)，這四部分也成為 PISA 2022 評量所採用的架構 (OECD, 2018)。其中，數量就是我們需藉由理解一些量化的各種表徵，如「大小」、「多少」、「長短」等這些數量來解釋周遭的環境；不確定性所包含的特定數學概念像資料呈現、以圖表表現資料、用平均數或中位數等數值描述資料，或由資料獲得的推論等；變化與關係通常可以用數據 (包括表格)、符號、和圖形表徵並自由地轉換，以及瞭解察覺基本的關係和變化；空間與形狀則包含察覺形狀與模式、瞭解形體的動態變化、或形體在二維平面及三維空間的表徵及其對應關係，以及在空間中進行有目的的移動等。

從這四類知識內容出發，de Lange 描繪出數學素養的關係架構圖，如圖 1，其中的箭頭即指上一層的知識概念可由下一層的知識概念來養成。舉例來說，「空間素養 (spatial literacy)」可由「空間與形狀」的知識養成，或是說「空間素養」能力可藉由「空間與形狀」的訓練而習得；數的素養 (numeracy literacy) 可由數量的知識養成；至於量的素養 (quantitative literacy) 則需要數量、變化與關係和不確定性 (uncertainty) 的知

識養成，並需要數的素養支持。而最終的數學素養，即可藉由空間素養、數的素養和量的素養達成。

圖 1
數學素養關係架構圖



譯自 Mathematics for Literacy, by de Lange (2003)

儘管 de Lange 描繪出數學知識對數學素養的關係架構圖，但 de Lange 並沒有說明他所謂的 literacy 與學習內容之間有何差別？因此，要在課程中實踐數學素養，則需更明確的描述，就像 NRC (2001) 主張「數學熟練程度」概念，具體描述有關個人思維的知識以及監控個人理解和問題解決活動的後設認知能力，是與善用各種解題策略及適性的推論有密切的關聯 (左台益，2018；NRC, 2001)，認為每位成功的數學學習者的方法，可透過五個面向學習：(1) 概念理解，指各數學概念間的整合性及功能性中樞；(2) 程序流暢，指對於程序性知識的瞭解以及如何適當使用程序知識，以及彈性、準確而有效率地、合適地運用程序性知識及執行的過程技能；(3) 策略運用，指能夠形成、表徵和解決數學問題的能力；(4) 適性推論，指能夠在概念及情境間進行邏輯性思維的能力；(5) 建設性傾向，是指將數學視為有理、有用且有價值的學問，並且相信自己有能力且願意努力成為有效率的學習者，以及數學知識的實踐者。前述五個學習面向，又稱為五股數學力，說明概念的理解及程序的流暢扮演重要的輔助角色。同時學習者如果無法學會監控和調整自己的學習過程，知識基模將無法完整地建構，也無法轉化學習經驗以幫助新知識的學習，影響正確學習方法的建立。在這裡，前四者可視為能力的表現，第五項的數學力已超乎了慣有的數學精熟表現，取而代之的是強調個人特質的心智能力、意向取向以及態度表現。

另外，Steen (1997) 提出數學素養涉及十個要素：對數學的信心、對數學文化的欣賞、能解釋數據、能邏輯思考、能做出決策、對上下文中數學的理解、對數字有敏感度、具有實踐技能、擁有先備知識及代數符號的能力。Graven 與 Venkat (2007) 亦簡單指出數學素養的關鍵能力在於能理解內容與上下文之間的脈絡關係。Jablonka 與 Niss (2014) 則具體提出數學素養應具備特定數學構面的八種「能力」，分別是：數學式思考、數學布題與解題、數學建模、數學式推理、數學表徵、處理數學符號和形式、數學溝通、利用輔助工具；後來，Niss 與 Jablonka (2020) 在數學教育百科全書之「數學素養」單元中，也以這八種「能力」作為數學素養的詮釋 (陳盈如等，2022)。國內學者左台益等 (2018) 也統整出數學素養的三面 15 項要素，如表 1。

表 1
數學素養之要素

建模歷程	數學識能 (左) ³	內容知識
形成	溝通	數與量
應用	數學化	代數
詮釋	表徵	幾何
評估	擬定策略	機率統計
	符號使用	
	推理論證	
	工具使用	

(引自左台益等，2018，頁 42)

將表 1 與上述內容比較，不難發現 de Lange 數學素養的知識關係架構，可對應於左台益等人的「內容知識」構面；Jablonka 與 Niss (2014) 所指數學式思考，即為數學化的能力與應用，再加上其餘七種能力，皆可涵蓋於左台益等人的「數學識能 (左)」與「建模歷程」構面下。

³表 1 中的「數學識能」是指左台益等 (2018) 的用語，為避免混淆，在本文中記作「數學識能 (左)」，與本研究將要定義的「數學識能」評量是不同的概念。如下一節所述，本研究將以「知行識」做為課程架構，而課程包括評量，所以對「知行識」三個向度皆須有評量規準，本研究「知行識」各向度的學習表現分別稱為「知能」、「技能」和「識能」，並據以設計評量規準。

綜觀所述，我們可以說「數學素養」的宏觀理念就是能夠將習得之數學能力轉化為解決問題的有效工具，為需探究或不確定的訊息進行評估預測，享受與時俱進的學習樂趣，養成面對生活的挑戰與自信的一種信念與力量。而「數學素養」的微觀解析，則是為達成此一宏觀理念所應學習之數學課程。本研究所發展之「識讀文本」及其課程即在於實踐「數學素養」之微觀解析。而「知行識」即為有助於實踐此微觀解析之課程架構，企圖實現「數學素養」的宏觀理念。

第二節 「知行識」課程架構

十二年國教總綱開宗明義地將「核心素養」定義為「一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度」(教育部，2014，頁 3)。然數學領綱的研修團隊認為「知識」和「能力」都是可以在十二年國教課程裡次第發展的學習目標，但是「態度」的層次較高，可以說是十二年國民基本教育完成之時的總體目標(單維彰，2016)。亦如前文所述，在數學素養的學習內容中，也內含較高層次的認知，甚至包括賞識 (appreciation)、信念價值等情意面向，因此「態度」向度不容易直接用來做為數學課程或教材設計的架構。基於此，「前導研究」提出以數學素養為核心理念，以「知行識」做為各階段課程的架構，以便「容易讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接」(林福來等，2013，頁 30)，如圖 2 所示，透過數學的「知行識」滾動，育成國民基本數學素養。

圖 2
12 年國教數學課程架構



(取自林福來等，2013，頁 31)

在「知行識」三者中，前二者可對應核心素養的「知識、能力」，而「識」即在數學課程設計的考量之下取代了「態度」。關於「知行識」的詮釋，單維彰(2018a)的描述，值得全文引述如下：

知、行就是「知道」和「能做」兩個向度，在教學層面上，知當然是指學習內容，而行是操作技能。可是，雖然知是大家熟悉的陳列知識，即「是什麼」的敘寫，但是行則不僅是操作程序的示範，更應該包括「做什麼」的敘寫。至於「何以如此？」、「為什麼要學這個？」等後設認知的「識」方面的學習目標，則必須連結與統整學科內容，(包括數學的內部連結，和跨領域的連結)，進而有機會賞識數學的價值，以建立對於數學的理想態度，所以「識」的意思比較微妙，是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的認同，讓數學課程學習可以協助學生對學習內容產生意義，並且連結其他學習內容。

上文說明「知」就是概念理解與概念間的整合、「行」就是對程序性知識的掌握以及如何適當地彈性、準確有效率地運用及執行的過程技能，亦即數學知識內容的能力指標。至於「識」則內含有或者區分出認識、辨識與見識的較高層次認知，甚至包括賞識等相信數學有益、認為數學美好、堅忍、勤奮等情意面向(林福來等，2013)。

但要強調的是任何一種能力的學習都會有深淺不同，Hiebert 與 Lefevre (1986) 即認為概念知識的最主要就是要理解知識的關聯性，而且此概念知識應分為二個層次。第 1 層次為基本層 (primary level)，其知識的建構皆來自於相同的抽象概念層次，第 2 層次則應建構在更抽象的概念連結上，稱為反思層 (reflective level)，不再只是片段的知識連接。所以若以此為準，「知行識」亦可分出二個層次。

以七年級負數單元為例，「知」的第 1 層次是能記憶、辨識、指認負數符號及其在數線上的位置，或能以「正、負」表示生活中性質相反的量；第 2 層次是能辨別符號的意義，如「減」或「負」之意義，或是否可以表達「二減負三」的聽說讀寫。「行」的第 1 層次是能執行單步驟正負整數加減運算，且不含減負者或能比較負數大小；第 2 層次是可執行 2 個以上操作步驟，或是能選擇較優之解題策略，抑或是能解決典型的應用問題。「識」的第 1 層次是能將正負數適當對應於情境中的數量，或能將情境問題轉換為正負混合的算式；第 2 層次則指將片斷資訊整合評估與解決應用問題，包括能為正負混合的加減算式賦予符合經驗的意義，以及相信數學有益、認為數學美好等賞識態度(陳玉芬等，2023)。

根據以上陳述，研究者整理「知行識」表現內容之描述通則如表 2。針對「知行識」三個向度的學習表現，分別稱為知能、技能、與識能。表 2 的描述通則說明，彰顯「知行識」向度在課程理念內涵中，強調縱向知識關係的連結與橫向脈絡統整之意涵。綜而言之，在實踐「數學素養」的微觀理念下，「知行識」可做為其理念的實踐與具體評量的準則。

表 2

「知行識」表現能力描述通則

類別	第 1 層	第 2 層
知能	屬於事實資訊（也包含一系列連貫的事實資訊）或非對即錯等事實區辨之學習內容。	對於符號意義的認識或是能擴展同層次之知識概念。
技能	能執行單步驟之運算程序的操作能力。	能執行多個概念間的轉換運算或能執行多步驟的加減混合運算。
識能	能運用所學知識應用於情境中的數量問題；能將情境問題轉換為數學式子的表徵。	能為執行的數學式子賦予符合經驗的意義，或是能以數學語句說明自己的論點，以及可以判斷解題的優劣，欣賞數學的價值。

第三節 數學教科書內容分析

教科書不僅是學習者的主要學習資源與工具，也是教學程序進行的引導方針 (Gracin, 2018)。它除了展示所要學習的知識內容外，也蘊涵了編者欲引領哪些知識面向的學習。本節分成三個小節，第一小節簡略回顧特別針對數學領域的教科書研究；第二小節探討在現今強調核心素養為學習主軸的前題下，數學教科書的素養實踐指標，並歸納成數學素養五面向 (表 3)；第三小節則從現今各版本數學教科書中，探討負數與分數的教材內容，並以數學素養五面向統整其呈現方式 (表 8)。

一、數學教科書研究

教科書是學校教育的主要學習資源，這是眾所周知的。然而 Pepin 和 Haggarty (2001) 依據英、法、德的數學課堂研究，認為數學教科書尤其重要。蓋因數學是知識結構性強的學科，教科書可以為數學課程提供一個完整的指引，其內容的展現對教師選取要教導的知識內容及教學方法，皆有重要的影響。

數學教科書的研究，多以內容分析的方法做相對性的比較，因為分析的意義經常是透過比較而得以彰顯。左台益與李健恆 (2017) 認為數學教科書的研究中，探討知識內容的呈現方式是最為常見的分析目標：從數學教科書的內容編排或呈現類型、方式等面向進行探討，可以看出相關內容在教科書中所展現的大致面貌。例如徐偉民、柯富淪 (2014) 在臺灣、芬蘭及新加坡的國小教科書幾何內容比較發現，國小的幾何布題以視覺表徵 (以圖形呈現) 的命題最多；楊德清與鄭婷芸 (2015) 從臺灣、美國及新加坡教科書的比較研究，發現國中幾何布題多以封閉性問題為主，純視覺表徵呈現的問題最少。鍾靜等 (2014) 從不同觀點比較芬蘭教科書的布題特徵，發現從問題表徵型態來分析時，布題多為無情境及數學型態的表徵；從解決問題的認知來分析時，布題多為無意義連結及程序性知識；從連結的深淺來分析時，芬蘭教科書具有多元的數學概念連結、隱藏的數學概念布局、呈現真實世界中的數學、從數學課本認識全球、強化邏輯推理與數學感知等五項特色。左台益與李健恆 (2017) 卻是以認知發展層次做為數學教科書的內容分析目標，發現較高年級的數學教科書一般含有較高層次的認知需求，也含有較多生活情境的問題，而且以多重表徵方式呈現。

Norberg (2019) 以多元識讀 (multimodal literacy) (Jewitt & Kress, 2003)，也就是教科書中文字、圖片、數學符號，以及數位教科書中的語音和動畫，這些多元表達方式的交織情形，做為 17 本瑞典小學數學教科書中減法單元的分析取徑。研究發現書中具有多元的表達方式，而且存在衝突，可能不利於學生的學習。Norberg 並且認為教科書必須在學童沒有老師支持的情況下，亦能提供潛在的學習機會。

本研究開發的數學識讀文本也會有多元表徵以及多元的表達方式，因此讀者 (七年級學生) 也將面臨多元識讀的需求，但是我們的學生跟瑞典學生一樣，都沒有正式受過多元識讀的教育。因此，研究者撰寫識讀文本時，需特別留意各種表徵的多元表達方式，使得它們是學習的助力而非阻力。

教科書之內容與編排設計的差異，在教學上蘊涵的意義是編者期待學習者、教學者應關注的面向。當數學教科書要以數學素養為學習目標時，自然也會呈現應有之設計，使其布題或呈現方式發生改變。後面內容將會看到，臺灣的數學教科書提供了所謂核心數學 (core mathematics) 的「內容知識」與「程序性知識」學習機會，但是跟過去的內容有多少差異，則有待考察。南非教育部門 (Department of Basic Education,

[DBE]) 在其數學課程與評量綱要中，特別聲明——至少從課程意圖來看——數學素養學習不應是核心數學的子集；DBE自承他們的傳統數學課程是強調數學學科知識的核心數學，但他們也要轉向素養導向的數學教育，也就是要學生做好在真實世界中實踐數學功能的準備 (DBE, 2011)。臺灣數學教科書都以類似「探索活動」的區塊引進新的學習活動，如此的教科書設計是否真的「素養轉向」了？這是本研究想要探討的問題之一。

相對於前面文獻都假設教科書的重要性，呂秀蓮（2019）卻認為，欲進入素養導向的教學，教師必須脫離教科書的挾制，不再以教科書作為課程的目標，將課程理解為針對學生需求而達成課程綱要的過程。本研究創作的識讀文本，期望在教科書以外，成為教師與學生從事數學素養教學的另一資源。

二、數學教科書的素養實踐指標

欲在教科書中實踐素養內容的學習，最直接的方式就是將數學素養設計為教學活動傳達給學生。如第一節所探討數學素養的宏觀理念的維度變化，說明現今素養學習所強調的面向，而數學素養的微觀解析，則可做為數學課程具體實踐的方向。

不論 Steen (1997) 提出數學素養涉及十個要素，或 NRC (2001) 主張每位成功的「數學精練」學習者具備的五股數學力，或 Graven 與 Venkat (2007) 簡單指出數學素養的關鍵能力在於能理解內容與上下文之間的脈絡關係，抑或 Jablonka 與 Niss (2014) 具體提出數學素養應具備特定數學構面的八種「能力」，這些數學素養的概念雖有不同方式的詮釋，但都強調了對數學本質的理解與信心、思考與推理能力及使用數學符號之表徵能力等數學解題能力的重要性，以及強調了數學素養須包含使用數學知識與人溝通和解釋的能力 (Umbara, & Suryadi, 2019)。上述內容並未於表 1 中完整呈現，舉例來說，就 NRC (2001) 主張之五個數學學習面向而言，第一、二兩股數學力可說是表 1 的內容知識實踐程度，第三、四兩股則可歸屬於表 1 的數學識能 (左) 與建模歷程的能力指標，但顯然第五股的價值實踐 (態度) 未見於表 1 陳述中；又如 Steen (1997) 提出數學素養涉及十個要素中，前二者「對數學的信心、對數學文化的欣賞」亦無法從表 1 中找到對應項目。這些現象，實乃說明數學素養之多元變化。

基於以上觀察，研究者依據本國教科書以 108 課綱強調之兩個精神：其一，學習已不局限於學科知識及技能，應關注學習與生活的結合；其二，培養「終身學習者」自發、互動與共好的基本理念，強調素養是與生活情境有緊密連結與互動的關係 (教育部，2014)，再根據數學素養之文獻分析，統整如表 3 之數學素養面向與實踐指標之對照表，以做為教科書在實踐課程理念的參考依據。

表 3 是研究者根據當前數學素養的各家詮釋，總結整理而成的數學素養「五面向」數學信念價值、數學概念知識、數學思維活動、數學跨域合作，以及數學實境應用。研究者認為這五個面向也是教科書應該要提供學習機會的內容面向，因此將據以做為評估教科書實踐素養理念的參考。

表 3
數學素養五面向與實踐指標

數學素養五面向	實踐指標
<p>數學信念價值</p> <p>數學結構狀態、如何做數學與驗證數學中的想法、學習數學的有用性等。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 欣賞數學價值 2. 對數學的信心 3. 對文化的欣賞
<p>數學概念知識</p> <p>數學內容知識，指數與量、代數、幾何、機率統計等學科知識</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數的素養 2. 量的素養 (包含變化與關係素養) 3. 不確定性知識的養成 4. 空間素養
<p>數學思維活動</p> <p>個人能夠運用數學概念、事實、推理來解決數學形成的問題從而獲得數學結論；熟練地運用數字、圖解與統計數據或資訊、代數符號、方程式及幾何表徵中獲得數學資訊。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數學建模 2. 數學推論 3. 解決問題能力 4. 數學溝通能力 5. 數學符號表徵
<p>數學跨域合作</p> <p>PISA 將合作式解決問題能力定義為：個人與他人在解決問題過程中合作，能透過彙集他們的知識與技能的方式去共同努力解決問題。本研究關注於數學領域中合作式解決問題的能力，稱之為數學合作。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 合作式解決問題能力 2. 擬定策略合作學習 3. 批判分析 4. 跨域整合的數學應用解決問題
<p>數學實境應用</p> <p>數學習得的能力運用於生活中的溝通與解決問題</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 在真實情境脈絡中，進行數學推理，論述並解決問題的能力 2. 使用工具，運用於數學程序以解決問題的能力。

統整於表 3 的數學素養五面向，還是有數學知識面向，畢竟知識是素養的核心，也是展現其他面向的基礎。但數學素養已經從學科知識擴展出多元的表現，所以表 3 特別指認「信念價值」為知識以外的關鍵素養面向；其次，傳統的「數學解題」能力也擴展成實際情境中「解決問題」的能力，所以表 3 展開三個面向以回應 21 世紀對於解決問題的多元需求。表 3 更完備地融入各家研究者的數學素養詮釋。舉例來說，NCTM (2002) 提到的珍視數學，108 領綱希望學生「在數學的推導中享受數學之美」，或 NRC (2001) 所主張的第五股數學力「建設性傾向」，都被納入數學信念價值面向。再如 PISA 2022 想要培育的「能做出有根據的判斷與決策，具備建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民」，及至 Niss 與 Jablonka (2020) 主張的數學素養新詮釋，都可以分別歸屬於跨域合作與實境應用面向。研究者期望未來數學素養五面向及其實踐指標，也可以做為教科書內容設計的一組參照架構。

綜而言之，為實踐「數學素養」的微觀理念，我們將其分類為數學信念價值、數學概念知識、數學思維活動、數學跨域合作、以及數學實境應用五個面向，如表 3。而在表 3 的每個面向內，皆有其相對應之實踐指標。此實踐指標意欲做為課程設計與教材研發的指引。以下，本文將以表 3 做為框架，檢驗教科書為實踐「數學素養」設計了哪些具體的內容。

三、數學教科書的負數與分數

課程架構與教科書密不可分，前者扮演引領後者內容設計的依循方針，後者則是前者的具體實踐。故在本節將分為兩大段探討，第一大段分析數學教科書中負數與分數教材內容，第二大段分析負數與分數教材內容在數學素養課程架構下的實踐指標。

(一) 負數與分數教材內容

112 學年度臺灣所使用的三個不同版本（甲、乙、丙版）之國中數學教科書，乃依據教育部民國 103 年發佈之「總綱」及 107 年發布之數學領綱為依據編輯而成，其中第一冊的負數與分數是七年級的主要學習內容，也是學童進入國中階段第一個接觸到的抽象思維概念與代數計算。在數學領綱中，關於負數的學習內容有，N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量、相反數；N-7-4 數的運算規律，交換律、結合律、分配律、 $-(a + b) = -a - b$ 、 $-(a - b) = -a + b$ ；N-7-5 數線：擴充至含負數的數線、比較數的大小、絕對值

的意義、以 $|a - b|$ 表示數線上兩點 a, b 的距離。這些學習指標亦充份呈現於表 4 的各版教科書中。表 4 為負數在教科書中欲實踐之小概念與學習活動內容。⁴

表 4
七年級負數小概念與學習活動內容名稱

單元	小概念		學習活動
第 1 章 負 數	➤ 負數符號表示	➤ 整數加減運算	➤ 計算機應用
	➤ 整數概念	➤ 去括號	➤ 動動腦 ^b
	➤ 數線標示	➤ 整數加減應用	➤ 數學好好玩*2 ^b
	➤ 數線的小數標示	➤ 數線兩點距離	➤ Thinking ^c
	➤ 數的大小	➤ 線段中點	➤ 探索活動 ^b
	➤ 相反數	➤ 負整數乘正整數	➤ 補給站 ^c
	➤ 絕對值	➤ 負整數乘負整數	➤ 學習前哨站 ^c
	➤ 同號數相加	➤ 乘法交換律	➤ 溫故啟思 ^a
	➤ 異號數相加	➤ 乘法結合律	➤ 迷思診斷 ^a
	➤ 整數與相反數	➤ 整數的除法	➤ 數養廣角鏡 ^a
	➤ 加法交換律	➤ 整數的四則運算	➤ 自我評量
	➤ 加法結合律	➤ 乘法分配律	➤ 重點整理
	➤ 負數減正數	➤ 負數的應用問題	
➤ 負數減負數			

^a：代表僅出現於甲版、^b：代表僅出現於乙版、^c：代表僅出現於丙版

然而，「分數」在數學領綱中的學習內容與學習表現指標，⁵ 在七年級並未有明確的說明，隱約可見的即是包含於上述之 N-7-3 內文如括號處。本研究則整理小學階段在數學領綱之中分數單元之學習表現，如表 5。在小學階段可說分數應習得之內容幾乎已經完成。包含：單位分數的認識；同分母分數的比較；加、減與整數倍、假分數和帶分數之變換；等值分數的意義；連結分小數長度量的經驗；標記和簡單的比較與計算；建立整數、分數、小數的認識；分數、小數的四則應用問題、整數相除為分數之意義與合理性；理解分數乘法和除法的意義；整數乘以分數、分數乘以分數的意義；分數除以分數的意義，以及分數的計算與應用、二到三步驟的應用解題。

⁴ 本研究中，針對各版本依據「數學領綱」在負數與分數單元中所安排的主要學習內容，依其主題所設計之細項概念將之稱為「小概念」。

⁵ 學習表現依學習階段編寫，第 1 碼為「表現類別」，英文小寫字母代表數與量；第 2 碼為學習階段別，依序為 I (國民小學低年級)、II (國民小學中年級)、III (國民小學高年級)、IV (國民中學)、V (普通型高級中等學校)；第 3 碼為流水號。

表 5
數學領綱的「分數」學習表現

編號	學習表現
n-I-6	認識單位分數。
n-II-6	理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。
n-II-8	能在數線標示整數、分數、小數並做比較與加減，理解整數、分數、小數都是數。
n-III-2	在具體情境中，解決三步驟以上之常見應用問題。
n-III-4	理解約分、擴分、通分的意義，並應用於異分母分數的加減。
n-III-5	理解整數相除的分數表示的意義。
n-III-6	理解分數乘法和除法的意義、計算與應用。
r-III-1	理解各種計算規則（含分配律），並協助四則混合計算與應用解題。
r-III-1	熟練數（含分數、小數）的四則混合計算。

由表 5 可知，分數學習策略是延續小學階段的螺旋式學習，小學階段的學習分佈於小學二～六年級，到了國中階段，分數的內容學習只是擴增到負數概念連結後，在四則運算以及應用題上中加深或加廣的螺旋式學習，在國中階段數學領綱的學習表現僅 n-IV-2 所述內容：理解負數之意義、符號與在數線上的表示，並熟練其四則運算，且能運用到日常生活的情境解決問題。依據國中數學教科書在分數單元想要實踐之小概念與學習活動內容(表 6)設計，說明此學習表現中隱涵著分數的四則運算。

從表 6 內容可整理出國中階段的分數學習為：「認識分數」、「分數的運算」、「分數的應用」等三個主要概念。據此，研究者指認剛升上 7 年級學生的關鍵需求是分數意義、單位分數理解與分數運算。再考察數學領綱：分數主題最後一次出現於 7 年級 N-7-3：「負數與數的四則混合運算(含分數、小數)」，此時的分數教學融入有理數的混合運算。課綱雖然沒有指定此內容的教學順序，但按照 7 年級的其他內容需求，有理數運算理應安排在前，且依據 7 年級數學教科書依照課綱僅處理正負性而不再教導分數運算原理，但研究者的實際經驗顯示：在一個年級中，至少應有三成以上的 7 年級學生有再學習分數運算的需求，因此正負分數運算應該要成為 7 年級學生必須及早掌握的關鍵能力之一。

表 6
七年級分數小概念與學習活動內容名稱

單元	小概念		學習活動
第 2-4 節 分 數	➤ 最簡分數	➤ 分數乘法結合律	➤ 自我評量*3
	➤ 等值分數	➤ 分數的連乘	➤ 數學好好玩*2 ^a
	➤ 分數的比較大小	➤ 倒數	➤ 自我挑戰 ^b
	➤ 分數的加減	➤ 分數除法運算	➤ 趣學數學 ^b
	➤ 分數加法交換律	➤ 數的四則運算	➤ 碳足跡 ^b
	➤ 分數加法結合律	➤ 分數分配律	➤ 迷思診察 ^c
	➤ 帶分數加減運算	➤ 分數應用問題	➤ 素養花路米 ^c
	➤ 真假分數相乘	➤ 計算機應用	➤ 重點整理*3
	➤ 分數乘法交換律		

a、b、c 代號意義如表 4

表 4 與表 6 乃是教科書依據課綱內容所呈現之負數與分數學習內容 (即小概念或學習活動)，而表 7 則是各版本教科書依據表 4 與表 6 之各小概念或學習活動，所設計之教學活動。各家版本皆以一個完整的章節形式呈現，結構上可分為章、節、小概念，其教學活動皆是以一個小概念為一個單位來說明。「主題引導」式的情境活動，三版皆設計於每個概念的頁首，其目的自然是期待學習者透過圖片中的對話或畫面呈現，進行情境連結，尤其是能與生活中的數學產生連結；各版的小概念則都有一致性的安排，都是在例題說明後緊接著隨堂演練，亦如各版在每個小節結束時的自我評量，這些題目以精熟練習為主的「程序性知識」鋪陳較明顯。至於各版的探索活動、動動腦、Thinking、迷思診療等學習單元，則是依據不同的小概念所需而設計的學習活動，這些單元雖然名稱不同，但主要目的是在進行數學的思維活動。另外就是「數學好好玩」、「你知道嗎?」、「小櫥窗」等單元則做為補充課外知識，如數學史資料或相關生活經驗連結。

表 7
112 年版三家版本數學教科書的單元內容結構

代號	單元架構	甲版	乙版	丙版
A	每章首頁	與本章學習相關之漫畫主題	與本章學習相關之生活情境學習 + Are You Ready?	與本章學習相關之漫畫主題 + 學習前哨站
B	每節首頁的小主題	溫故知新 主題活動	主題活動*	主題活動*
C	每個小概念與學習活動	例題說明* 隨堂練習* 探索活動* 數養時光機** 迷思診療*	例題說明* 隨堂練習* 課外探索*** 數學好好玩** 你知道嗎** 動動腦** 計算機應用**	例題說明* 隨堂練習* 探索活動** 知識補給站** Thinking** 計算機應用**
D	每小節結束後的學習活動	重點回顧* 自我評量*	重點整理* 自我評量*	重點回顧* 自我評量*
E	每章結束	數養花路米* 數養廣角鏡*	一題多解* 數學新視界*	自我挑戰* 趣學數學* 數學萬花筒*
F	每冊結束	計算機操作* 核心概念地圖*	學習大道* 數學史* 數學好好玩* 數桌遊* 數感查真相** 計算機教學**	資訊普拉斯*
G	負數/分數 頁數	60/22 頁	64/21 頁	62/21 頁

* 代表每個小概念中必有的學習活動。

** 視每個小概念的需要才會設計的學習活動，不是每個小概念皆有的。

*** 乙版的課外探索乃屬於線上學習活動，學生並無法由教科書中習得，故不列入學習單元比較。

(二) 負數與分數教材的素養實踐

本研究參照表 7 分析各版本教科書之設計內容，再依據數學素養五面向 (表 3)，整理如表 8，說明各版本的教材設計在 108 課綱指導下，所呈現負數單元及分數單元對於實踐素養學習之安排。

表 8

三個版教科書內容設計與數學素養實踐對照表—以負數與分數為例

數學素養面向	素養目標的具體說明	教科書呈現方式
<p>數學信念價值</p> <p>數學結構狀態、如何做數學與驗證數學中的想法、學習數學的有用性等。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 欣賞數學價值 2. 對數學的信心 3. 對文化的欣賞 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「主題引導」式的情境圖片呈現 2. 概念探索 3. 生活應用題 4. 小櫥窗
<p>數學概念知識</p> <p>數學內容知識，指數與量、代數、幾何、機率統計等學科知識</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數的素養 2. 量的素養 (包含變化與關係素養) 3. 不確定性的知識養成 4. 空間素養 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「主題引導」式的情境圖片呈現 2. 每個概念前的先備知識 3. 概念學習後的 Key point 4. 每小節結束後的重點整理
<p>數學思維活動</p> <p>個人能夠運用數學概念、事實、推理來解決數學形成的問題從而獲得數學結論；熟練地運用數字、圖解與統計數據或資訊、代數符號、方程式及幾何表徵中獲得數學資訊。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 數學建模 2. 數學推論 3. 數學溝通能力 4. 數學符號表徵 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「主題引導」式的情境圖片呈現 2. 每個單元中的例題說明及隨堂練習 3. 單元後的自我評量以及習作練習。 4. 一題多解
<p>數學跨域合作</p> <p>PISA 將合作式解決問題能力定義為：個人與他人在解決問題過程中合作，能透過彙集他們的知識與技能的方式去共同努力解決問題。本研究關注於數學領域中合作式解決問題的能力，稱之為數學合作。</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 合作式解決問題能力 2. 擬定策略合作學習 3. 批判分析 4. 跨域整合的數學應用解決問題 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「主題引導」式的情境圖片呈現 2. 一題多解思考 3. 單元結束的課外補充 4. 單元結束後的開放性
<p>數學實境應用</p> <p>數學習得的能力運用於生活中的溝通與解決問題</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 在真實情境脈絡中，進行數學推理，論述並解決問題的能力 2. 使用工具，運用於數學程序以解決問題的能力。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 「主題引導」式的情境圖片呈現 2. 一題多解思考 3. 單元結束後的開放性

第四節 數學識讀文本

「識讀文本」乃研究者原創之數學讀本，故未有已完成之文獻可參照。然，文本設計與文本閱讀實為一體二面，唯有理解閱讀者是如何透過閱讀數學中的數字、符號以及詞彙來理解數學，才有能力設計一個適合閱讀者的識讀文本。「數學閱讀」即指針對數學上下文脈絡、符號、詞彙和圖形的閱讀 (Adams, 2003; Lin & Tsai, 2021; Mason, 1980)，所以文本設計者必須面對能讓讀者獲得數學意義理解的挑戰。基於此，研究者將參照相關之數學學習與教學理論做為本研究之「識讀文本」的理論架構與設計策略，並以「負數」概念或「分數」概念之學習舉例說明。本節以下列三種研究需求，依序分成三小節回顧文獻：第一小節探討識讀文本設計理論、第二小節闡述識讀文本設計模式、第三小節則說明識讀文本類型與書寫策略。

一、 識讀文本設計理論

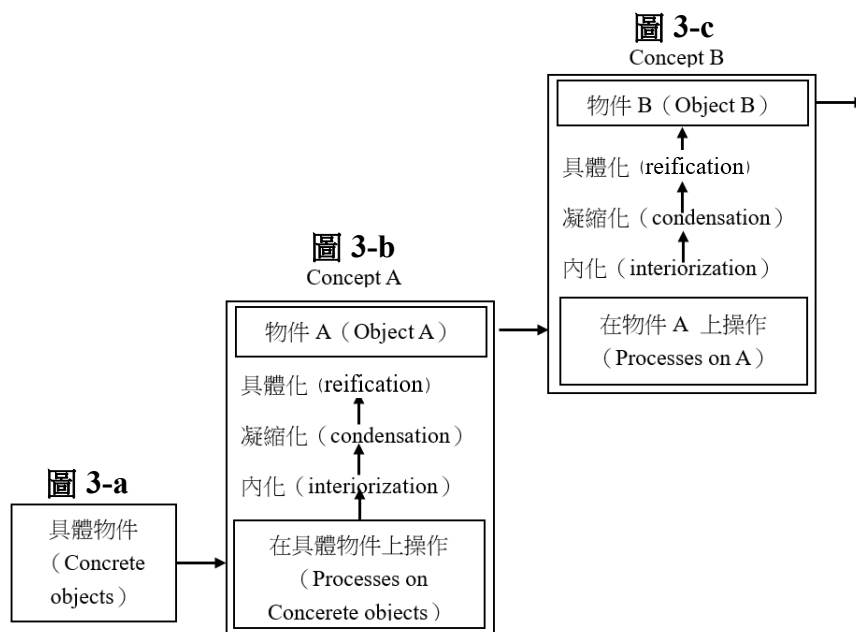
(一) 數學概念形成

Sfard (1991) 的具體化理論 (theory of reification) 認為數學概念的形​​成，有操作性 (operation) 與結構性 (structure) 二種過程。以「數」為例，孩童從操作性的點數 (counting) 開始，轉而學習以符號 (印度-阿拉伯數碼系統) 表達的數學物件 (mathematical objects)，最終形成結構性概念 (陳玉芬等，2023)。例如先正整數，而後引進負整數並擴展成整數；又如分數，先整除而後進入分數。Herscovics 與 Linchevski (1994) 亦提出負數學習的障礙有結構感的缺乏與對減法操作的限制性理解。將結構感定義為能夠識別所有表達的等價形式， $20 + 5 - 10 = 20 - 10 + 5$ ；減法的操作限制性理解，即是在減法操作過程中，對負號的忽略 (即負號分離，DFMS)，如： $237 + 89 - 89 + 67 = 237 + 67$ ，而不是 $237 + 89 - 89 + 67 = 237 + 89 - 156$ (Herscovics & Linchevski, 1994; Linchevski & Herscovics, 1996; Molina & Castro, 2021)。所以小學階段「取走」是減法的一種「不具符號」的概念操作，但到了國中階段，面臨「減負數」時，就需要特別處理這種「減」的意義。例如：負數的單元運算、二元運算的結構性操作，以協助進入代數運算時的操作，避免 $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$ 的計算，又將之誤操作為 $4 + n - 7 = 19$ ，甚至對於 $115 - n + 9 = 61$ 亦誤操作成 $106 - n = 61$ ，最後表達為 $106 +$

$n = 61$ (因為對學習者而言，負號已處理過一次，而未知數 n 則忽略前面的負號)。Linchevski 與 Livneh (1999) 認為一旦數字的結構性未掌握好，則會影響代數思維的學習，因為學生的代數系統會承襲原本熟悉的數字系統所具有的結構特性。

圖 3 為 Sfard 的數學概念形成的一般性模組，以負數的「單元運算」符號意義為例，辨識負「-」號，或者說是想要表達相反或對稱概念，這就是概念結構中的基本物件 (objects)，那麼我們可以從具體物件的操作經驗出發，好比是學習者已經熟悉的語彙，像數線或「負即相反」這樣的譬喻，此為 3-a 階段；所謂的經過具體操作而內化 (interiorization)，舉例來說就像藉由視覺上的數線反覆操作，進而內化理解為負號多了相反與對稱概念，或是發現 -5 到 0 的距離與 $+5$ 到 0 的距離相等，而接受了 $-(-5) = 5$ ，且在不需借助數線操作下完成，最終產生一個新的物件 A (即對稱或相反概念)。圖 3 中的凝縮化 (condensation) 是指可以排除多餘資訊或將資訊做分類，此階段會持續連接新概念的穩固，直到具體化 (reification) 形成，亦即有能力以全新的思維看待熟悉的物件，至此完成了物件 A，好比不僅是負數得到對稱新概念，甚至對於方位的變化亦能得到對應理解。如圖 3-b。

圖 3
數學概念形成的一般性模組



(圖表譯自 Sfard, 1991, p. 22)

當物件 A 概念穩固之後，則可繼續進行新物件 B 的學習，例如負數的運算 $3 - (-5)$ ，此時新物件 B 就是「負與減的意義連結」（即一元運算與二元運算概念差異）。由圖 3-c 可知，這樣的學習必須是建立在物件 A 概念上，說明學習的程序是堆疊而起的。然後再重覆像物件 A 的學習過程，依舊經過具體操作而內化，到凝縮階段即已漸漸熟練操作，如 $3 - (-5) = 3 + 5$ 而游刃有餘，例如 $-2 - 3 - 4$ 也能輕鬆轉變成 $-(2 + 3 + 4)$ ，我們就可以說這個概念已被具體化而完成物件 B。然後可繼續往上至新物件 C 的學習，如圖 3-c 右邊的箭頭方向，如此盤旋而上地擴建知識。

在 Sfard (1991) 的概念形成理論中，會發現所有的概念發展都是有層次地依序前進，同時強調具體化不會在凝縮化或內化階段未完成前發生，且內化與凝縮化的過程是反覆修正漸進的；然而具體化則可視為瞬時固化，而成為一種靜態結構，然後就會將此做為基礎物件再向上學習 (陳玉芬等, 2023)。Albert 等 (2012) 即以此理論對照於幼童的學習：即使幼童已能數數 1、2、3、...、10，這樣的行為表現也許是透過模仿，並不表示他們已學會「數」的概念；但是當他們對著某些對象能夠依序數數並正確回答數量時，則顯示他們理解了數的有序性與量的概念，此時才表示他們學會了「數」的概念。

(二) 概念譬喻與視覺操作

Sfard (2008) 再闡釋此概念學習理論，指出數學物件的譬喻 (metaphor of object) 可做為形成數學概念的有效工具，這樣的譬喻就稱為「概念譬喻」，並認為譬喻層次的學習就是一種內在轉化。此外，Dostal 與 Robinso (2018) 認為視覺能力是我們從這世界獲得訊息的最重要來源，「視覺操作」不僅突顯概念間的關係性理解，也是有效的輔助教學策略亦是達到識能中關係性連結的策略之一。

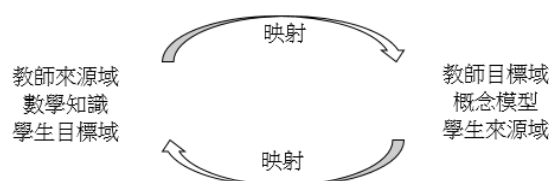
本研究的負數與分數學習目的，主要就是在於澄清與理解負數的意義與分數的多元概念之後，可以流暢地進程序性的正負數 (包含分數) 四則運算，而最終目的仍是讓學習者漸漸開始學習代數運算思維。例如 Bofferding (2014) 即認為透過具體的「數線操作」與「概念譬喻」，可以由具體的數字運算轉入抽象的代數思維。一旦進入這樣的階段，就表示已從操作性概念遷移到結構性概念，這樣的學習歷程即代表知識已如堆疊磚塊一樣地往上積累且不可逆，這說明知識一旦結構化就

不會往回退，就好比一旦識得了蘋果的味道，那就不會懷疑是不是檸檬了。對於結構化的知識形成，Sfard (2008) 提出譬喻層次的學習不僅是內在轉化，最終還能用言語改述此新物件之具體化呈現。所以當個人使用推論的工具傳達他自己的內在想法時，思維也就被看見了，也可以說學習者已經真正理解知識了，才有能力「換句話說」。同時，從「操作性」階段要能成功轉移到指認「數學物件」階段，才算是完全理解數學概念，亦即進入結構性階段 (Sfard, 1991)。而「概念譬喻」與「視覺操作」即為本研究在進行概念鋪陳時之主要設計技巧，其目的也就在於讓學習者可以從具體操作階段進入抽象指認「物件」階段，以期待能進階到代數思維的學習能力。

所謂的「譬喻」(metaphor) 是一種思維現象，是指使用具體的描述 (原始的定義域) 透過適當的譬喻可以連結至抽象的定義 (預想的對應域) (Lakoff & Núñez, 2000; Sfard, 1997; Soto-Andrade, 2007)，可做為認知輔助工具，幫助我們建立或掌握新概念。以負數為例，當減數是負整數時，減法的含義會發生變化，因其概念是抽象的，因此需要讓學習者能運用代數的概念處理整數的減法問題 (陳玉芬等，2023)。此時的學習目標就是透過原始定義域 (具體的數線操作與適當的概念譬喻)，做為學習者能將負數以代數方式表徵的過渡橋樑，以連結至抽象的預想對應域 (能處理有理數的減法，能以負號的多元意義進行溝通) (Altıparmak & Özdoğan, 2010; Dostal & Robinson, 2018; Vlassis, 2008)。

概念譬喻亦是詮釋一種符號或模型與概念之間的相關性，使之與個人內在無法看見的思維做連結 (Lakoff & Johnson, 2003; Wible, 2005)。譬如說「負非減」、「負是後退」、「負是相反」，像這樣的概念譬喻，即重視負數與符號的關係連結。在符號語言學習中，譬喻就是一種思維現象，是指通過一個事物來理解和體驗另一個事物。Lakoff 與 Núñez (2000) 認為譬喻涉及兩個領域：「來源域」(source domain) 和「目標域」(target domain)，如圖 4。

圖 4
教師與學生運用譬喻的相對性



以「 $2 - (-3)$ 」的算式為例，因為教師已經具備負數運算的知識，所以「 $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ 」即為教師的數學知識來源域；當她／他企圖為此運算設計一套譬喻用來幫助學生理解此運算程序，這套譬喻就是她／他的目標域。假設教師的設計是將「 $2 - (-3)$ 」譬喻為「從數線上 2 的位置朝後退 3 格，即箭頭的反方向」，則此譬喻式的行動規則成為學生所接收的訊息，而它成為學生學習負數運算的來源域。根據此來源域，學生得知運算結果是 5。但學習的目標並非習得那一套譬喻，而是透過譬喻最終理解「 $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ 」，而這就是學生的目標域。需要強調的是，學生的目標域 (即透過譬喻之來源域獲得的理解)，未必等同於教師的來源域 (假設那是正確知識)。所以教師要設計活動，讓學生有機會透過譬喻而做更多往返對應的表達；如此即可檢視其教學譬喻是否有效。Kilhamn (2011) 認為，如果來源域與目標域之間的對應關係無法形成，譬喻就不存在。

Damerow (2007) 亦提出透過「來源域」和「目標域」的譬喻教學，並將此種譬喻表徵分成二個不同層次。第一層次就是操作一種藉由符號或是轉換規則組成的模型，使之可做為表徵抽象物件的行為。最基本的形式就是具體物的識別 (identification)，比如透過使用詞彙或符號進行命名活動，及至做分類。又如在「數數」方面，是可以利用具體物與概念中的數字概念作一一對映。像伸出手指數到 5 (符號或文字)，那麼手指就是具體的真實物件，它對應到 5 這個表徵的抽象物件。亦即他們用數數到 5 (真實的動作) 與手指 (真實物件) 將 5 (抽象的物件) 連結了。再來觀察 $5 + 2 = 7$ 此式子，因為仍只是將手指數相加，所以它仍屬於第一層次表徵，將之對照於負數教學，在數線上做前進或後退的動作，相當於以具體物與負數的加減法做譬喻，所以負數的加或減的概念屬於第一層次表徵。或是 $-(-3) = 3$ 、 $-(+3) = -3$ 等的反轉指示，都可透過

數線操作 (真實動作) 及「負即相反」口訣完成負號化簡的性質，都屬於第一層的表徵理解後的抽象物件。

第二層次 (或更高階) 則是以「心智模型」 (mental models) 的譬喻來表徵。它們也是由符號或由符號和轉換規則組成的模型，然而此「心智模型」則是透過自己的想法並針對真實物件作抽象思考後，表徵出個人的反思抽象思維。舉例來說，針對 5 這個數字本身的特質描述，比方說： $\sqrt{5}$ 、 5^2 、 -5 等，則屬於後設認知本質的抽象物件 ($\sqrt{5}$ 、 5^2 、 -5) 與抽象物件 5 的連結，因為此時的 5 並未具有數手指的意義。所以說，從另一個數學物件及想法中抽離而建立新的知識概念，此為具有第二層次表徵能力。同樣的以負號「 $-$ 」為例， $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ 的減法運算，若是仍在數線上操作，則仍為第一層次表達；若是建立在內心思維的運作而不是數線上的操作，則屬於第二層次的心智模型，而 $-(a) = -a$ 、 $-(-a) = a$ 的抽象操作亦然。

也就是說，第一層次與第二層次表徵的最大不同，在於模型譬喻表徵的不同。前者利用具體物表徵內在的抽象思維，後者則利用心智模型做為抽象思維的表徵。所以，一個物件若是透過具體物操作，進而連結至抽象概念屬於第一層次表徵；若是透過比較、對應、組合與重覆的反思動作所建構，或數學的證明、數學的結構以及形式化邏輯數學概念都屬於第二層次的譬喻表徵。此外，Hoffer (2020) 認為數學文本的知識擷取，除了要理解其表層結構 (surface structure)，更要學習深層結構 (deep structure) 理解，意即相關性知識的連結。前者指的是文本中讀者所能夠輕易攫取到的字面意義，如：讀音「七減負二」是否可以正確表示成「 $5 - (-3)$ 」突顯讀音不同，進而達到數學語法的正確表徵，而不是「 $5 - -3$ 」的符號混亂；後者指的是在文本敘述下，作者未表達的潛在數學知識是否也能理解？比方說， $-5 - 3$ 、 $(-5) + (-3)$ 、 $-(5 + 3)$ ，如果學習者能對於括號與負號之間的抽象處理正確，或是能說明為何這些算式是相同的，那就表示已進入深層理解，而這也是識能的展現。

透過概念譬喻可突顯負與減的差異，也突顯了數學語法應如何正確表達，也可以使文本的表徵方式突顯重要的細節或主要的想法，以達到所預期的學習目的

(Hoffer, 2020)。例如文本引進負數的說法如下，它建立在正整數的舊經驗上，並以「物質」和「性質」做為正數與負數的語言概念譬喻：

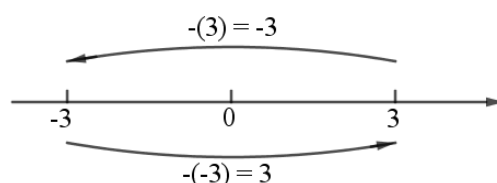
計算「物質」的量，例如有多長？有多重？有幾人？這些「物質」量，最少就是「沒有」，不能比「沒有」更少；但「性質」的量不像「物質」，它不是具體的東西。例如冷熱，它是相對的性質，並不會「沒有」冷熱。於是，比空無還小的數出現了，稱為負數。

「性質」量雖然看不到，但在生活中仍有具體經驗，例如溫度計。透過具體物件的譬喻，進行負數概念的內化連結，亦能感受到即使抽象但仍能想像。接著鼓勵學習者舉其他例證（例如資產）做為從內化至凝縮的發展。然後，能陳述使用負號表徵的理由，以及接受負數在生活中的存在，即為其概念具體化的表現。識讀文本的整體特色是重視數學概念與自然語言的連結（單維彰，2018b）。因此，文本從一開始就強調「概念譬喻」與「視覺操作」，如「負非減」：提醒同學注意「-」號的兩個讀音：減、負，在學習的初期就關注讀音與書寫，是否可以將「 $5 - (-3)$ 」讀作「五減負三」？是否可以將「七減負二」正確記作「 $7 - (-2)$ 」？同時語言特徵也可以表現在一組一組的二元對立 (binary oppositions)，例如「負是後退」、「負是相反」，目的在利用對比差異，進而得到概念的意義。這些譬喻不僅闡明正數與負數的對立概念，也提供理解負數之多元「方向」特性的機會（林芳玫、洪萬生，2009），例如正與反、上與下、前進與後退，同時也為負號的運算規則埋下伏筆，即負數加減的視覺操作。

Dostal 與 Robinson (2018) 認為視覺是我們從這世界獲得訊息的最重要來源，重要的不僅是眼前看到什麼，同樣重要的是看不到的還有什麼，而這亦是達到識能中關係性連結的策略之一。這種關係包含代數符號間的關係或是圖形中的關係，讓學習不再是盲目的服從。比方說，像背誦「負負得正」這樣的口訣，學生總是無意識地重覆負數運算口訣進行代數運算，而因此認為自己已理解了負數運算 (Baroody & Ginsburg, 1986; Gagatsis & Maria, 2022)，但這樣的迷思應該歸因於文本內容的陳述不夠完善，而不足以說明是學生本身未具有代數處理能力 (Kirshner & Awtry, 2004)。

識讀文本之「視覺操作」搭配概念譬喻設計，可做為引導學生觀察與啟發數學直覺。文本(搭配類比型溫度計)利用實體的溫標刻度引進包含負數的數線，以語言「負是相反」搭配操作活動，闡述此處「相反」的操作型意義是對稱於原點的鏡射，經過一些演練之後，明白「相反再相反就還原」，由此明白「負負得正」的意涵。如圖5。

圖5
「負負得正」的視覺操作



接著在數線上安頓正負數的位置之後，喚起舊經驗：加(正數)是向前走(朝箭頭所在的右側)，減是向後走(或說是向右或向左的前進)，然後從「負是相反」引伸出「負是倒退」的概念譬喻，並實際操做為「加負數」是向右倒退，「減負數」是向左倒退。透過這樣的譬喻理解「 $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ 」，如表9。

表9
視覺顯著性與非視覺顯著性

視覺顯著性	非視覺顯著性
$2 - (-3) = 2 + 3$ (從數線上2的位置開始，面朝左後退3格)	$2 - (-3) = 2 + 3$
$-1 - 3 = (-1) - (3)$ (從從數線上-1的位置開始，面朝左前進3格)	$-1 - 3 = -(1 + 3)$

視覺顯著性 (visual salience) 即視覺上具有連貫性的規則 (Kirshner & Awtry, 2004)，所以表9中，透過「加或減」一個「正或負」數的對立譬喻與數線操作，數線上位置的變化就是一種視覺顯著，可以由加減正數的數線操作擴展至加減負數的操作，更重要的是可以一致性處理「小減大」的正數相減情況，不需如教科

書中針對整數相減情形分類處理。同樣的操作原理亦可引進負數的乘法，但不在本研究範疇。數線操作的進行，可以讓學習者「看到」符號意義的整體概念與操作結果。比如說，乙版教科書的教學設計採用溫度計做為實體操作物，其教學策略是引用舊經驗，將問題「從零下 5 度調整到零下 8 度，變化幾度？」寫成算式 $(-8) - (-5)$ 再從溫度計視覺操作得知「下降 3 度」而印證算式等於 -3 ，再根據 $(-8) + 5$ 答案也是 (-3) 而歸納 $(-8) - (-5) = (-8) + 5 = -3$ 。而本識讀文本則採用更「直覺」的舊經驗：數線上的向前數、向後數，然後利用概念譬喻引進加減負數的運算規則，這裡相當於利用概念譬喻「偷渡」數學操作的定義，然後學生可以歸納「減負就是加」的現象。

以上設計的目的，即如 Sfard (1991) 所提之概念形成理論，是由正負號的認識到負數運算依序漸進處理的，透過數線操作與概念譬喻循序完成，達到概念的穩固。本小節旨在說明對於負數或分數的文本設計，可透過語言的譬喻與視覺操作的設計，引進新符號，或擴充舊符號的意義亦使其延伸至新概念，進而從學習活動中發展結構性概念，以提升學生的識能。

二、 識讀文本設計模式

文本設計與教學設計亦為一體兩面，教學設計是整體教學活動中重要的一環，係指所有與教學相關之活動，如規劃、選擇、預備、實踐與評鑑等工作，內容綜合了教學過程中諸如教學目標、教學內容、教學對象、教學策略、教學媒體、教學環境、教學評量等基本要素 (張祖忻、朱純，1995)。而文本設計的目的即在於促進教學活動的順利實踐，在教學內容設計上應盡可能觀照教學活動的每一環節。

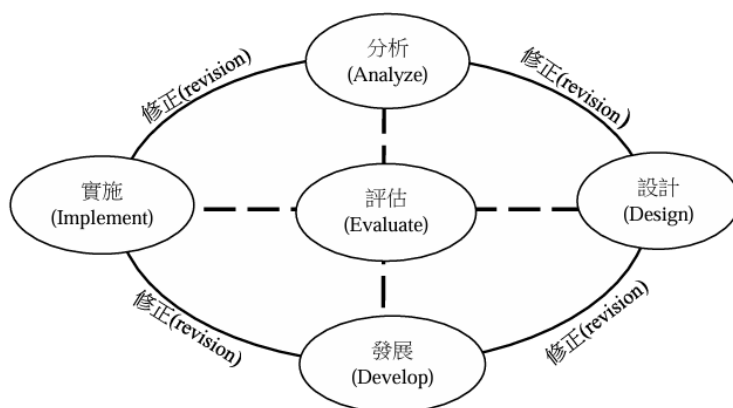
在相關文獻中對於教學設計理論之研究有諸多探討，例如：Heinich 等 (1982) 所提出的 ASSURE 教學設計模式，有六個設計階段：(1) 分析學習者特質 (Analyze learner characteristics)、(2) 陳述學習目標 (State objectives)、(3) 選擇、修正或設計教材 (Select, methods, media, and materials)、(4) 使用教材 (Utilize materials)、(5) 要求學習者參與 (Require learner participation)、(6) 評量與修正 (Evaluate and revise)，主要是提供中小學教師在教室內實施教學的系統化教學設計模式；此模式著重於在實際教學情境中，慎選與善用多媒體工具來幫助達成教學目標，並鼓勵學生互動參與。Dick 等 (2009) 提出

的教學模式，界定了九個程序，分別是：(1) 界定教學總目標 (instructional goals)、(2) 教學分析 (instructional analysis)、(3) 界定起點行為與學習者特性 (entry behaviors and learner characteristics)、(4) 編寫學習目標 (performance objectives)、(5) 發展測驗項目的準則 (criterion-referenced test items)、(6) 發展教學策略 (instructional strategy)、(7) 發展及選擇教學材料 (instructional materials)、(8) 設計及實施形成性評鑑 (formative evaluation)、(9) 設計及實施總結性評鑑 (summative evaluation)，其目的除了發展教學內容，亦重視教學策略、評量準則、以及評量發展。另外像 Gagné 等 (2005) 提出了 ADDIE 教學設計模式，分為五個程序：(1) 分析 (Analyze)、(2) 設計 (Design)、(3) 發展 (Develop)、(4) 實施 (Implement)、(5) 評鑑 (Evaluate)，傾向於解決教學上遇到的困難，進而開發一套新的教學流程。這些都說明教學設計模式已漸趨完備與多元，讓設計者隨著需求取向的不同，選擇各自適合的教學設計模式。

ADDIE 是一個通用和精簡的模式，此模式約於 80 年代末期出現，當時 ADDIE 模式僅是一個口語的用詞，用來描述教學發展的系統性進路 (Molenda, 2003)。此模式概念可追溯到更早的 70 年代中期，佛羅里達州立大學和軍方發展了一個跨軍種的教學系統開發模式，依序為分析、設計、發展、實施以及控制 (Control) 五個階段，此控制階段意謂教學的評鑑和修訂 (蘇意雯，2023；Branson et al., 1975)。

Branch (2009) 認為 ADDIE 概念設計應用於教學系統設計中，可處理教學環境、學習情境或知識脈絡等彼此交互影響的複雜問題，且 ADDIE 概念設計每一個步驟皆有固定遵循的邏輯順序及運作的程序，亦可建構一個以表現成效為主的 (performance-based) 教學設計。ADDIE 教學設計模式，為一種系統化教學設計模式，即指幫助教師有系統地思考及計劃教學方式及教學內容的一種方法，也是在實踐數位學習時最常運用的系統化教學設計 (Instructional System Design, ISD) 模式 (蘇意雯，2023；Mannaz, 1998)。本研究的目的之一在於發展文本設計，強調學習者識能表現之需求，是故以此做為文本的設計模式，如圖 6。

圖 6
ADDIE 教學設計模式



(譯自 Branch, 2009, 頁 2)

Branch (2009) 進一步說明 ADDIE 教學設計是一種問題解決式的循環系統。它可以由教學內容的設計者，依實際需要或以進行中的課程決定由哪一個階段為起點；一旦經過評量後發現存在著落差，那麼可以在任何必要的階段，開始相關的設計或修訂。Branch 並強調其過程不一定是線性的，也不必然由分析端開始，完全視教學設計者需求而定。此外，Branch 針對各個階段給予詳細說明，如表 10。

表 10
ADDIE 的通用教學設計程序表

	Analyze	Design	Develop	Implement	Evaluate
Concept	Identify the probable causes for a performance gap	Verify the desired performances and appropriate testing methods	Generate and validate the learning resources	Prepare the learning environment and engage the students	Assess the quality of the instructional products and processes, both before and after implementation
Common Procedures	1. Validate the performance gap 2. Determine instructional goals 3. Confirm the intended audience 4. Identify required resources 5. Determine potential delivery systems (including cost estimate) 6. Compose a project management plan	7. Conduct a task inventory 8. Compose performance objectives 9. Generate testing strategies 10. Calculate return on investment	11. Generate content 12. Select or develop supporting media 13. Develop guidance for the student 14. Develop guidance for the teacher 15. Conduct formative revisions 16. Conduct a Pilot Test	17. Prepare the teacher 18. Prepare the student	19. Determine evaluation criteria 20. Select evaluation tools 21. Conduct evaluations
	Analysis Summary	Design Brief	Learning Resources	Implementation Strategy	Evaluation Plan

表 11

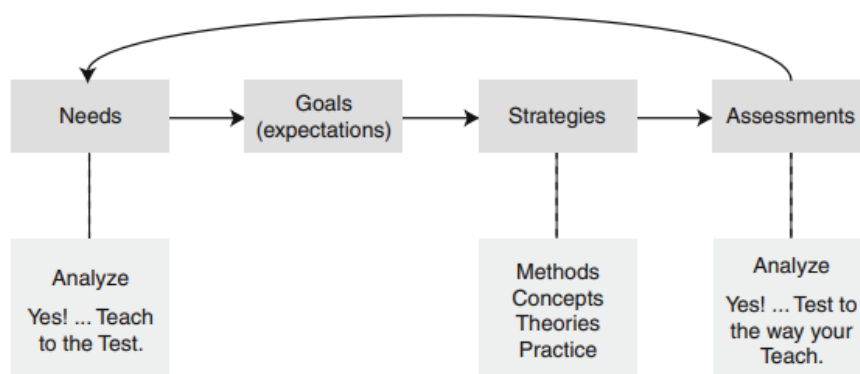
「-」號多元意義

符號的意義	說明	示例
負號 (negative) 數線上的位置	正數：原點右側 負數：原點左側	3 即 +3 -3
減號 (subtraction sign) 二元運算符號	加：向右進 減：向左進	2 + 3 2 - 3
相反 (negation / opposite) 單元運算符號	取相反數 讀音也是「負」	-(3) -(-3)

設計階段，其目的是確認想要執行的內容以及採用適當的方法，比方說文本設計之主要程序就是在設計文本時，先根據學習內容選擇適當的文本設計策略。而在設計階段，要隨時掌握進度，確保執行目標，並能生成測試成效的策略，以及評量教學成效的方法，如圖 8。

圖 8

ADDIE 設計階段循環流程



取自 Branch (2009)，頁 61

所以設計階段之目的即是查核所需的表現以及採取適當檢測成效的方法 (Branch, 2009; Gagné et al., 2005)。也可以說「教學對準考試內容 (teach to the test)」 「考試對準教學的方式 (test to the way your teach)」，以對於教學目標進行循環檢測。舉例來說，要強調「負非減」的概念形成，在文本設計中即以「負非減」為一個段落的標題，進而陳述：「負」是代表一個數的屬性、「減」卻是代表兩個數的運算。此為文本設計對準了考試內容，而在評量中即可設計 $3 - (-2)$ 之讀音測驗 (國字書寫)，或是 $5 + (-12)$ 之運算，此為檢測教學的方式，最後再進行策略之成效評估。

發展階段，其目的是產出和品保學習成果、以及確認在執行計畫中所需的所有資源。在此階段完成時，表示已選擇或開發了實施計畫所需的所有工具，並能初步評估教學成果。其主要程序就是生成一套全面的學習資源，例如所有內容、教學策略和其他課程計畫、因應的教育媒材、制定教師手冊或學生手冊，進行形成性修訂，並進行前導測試 (pilot tests) 等 (Branch, 2009)。

實施階段，其目的就是要準備好學習的環境，這環境亦指可以縮小成效差距所需的新知識和技能的學習環境，包括教師和學生的準備，以及讓教師明瞭發展完成的文本應如何操作。因此，實施階段要準備學習環境吸引學生並實際執行教學活動。

評估階段，其目的是評估教學品質，並檢核教學實施之前與之後的整個 ADDIE 流程，建立評估規準，選擇適當工具。Gagné 等 (2005) 對於評估 (評鑑) 階段認為包括兩個部分：形成性和總結性，形成性評估是在各個階段，總結性評估包括測試標準相關的參考項目，並提供機會讓使用者進行反饋。

Branch (2009) 在 ADDIE 設計理念中特別強調課程設計內容應是「刻意的學習 (intentional learning)」而不是「隨意的學習 (tentional learning)」。就好比課程是為了使學習者能進行論述反思而設計了連結生活議題的引導，而不是因為此議題有趣於是將它加入學習中；二者差別在於前者是有目的性的，後者則只是因緣際會地提供了一個學習的機會，二者之比較如表 12。

表 12
「刻意的學習」與「隨意的學習」對照表

刻意學習(intentional learning)	隨意學習(tentional learning)
1. 有計畫的 (planned)	1. 無計畫的 (unplanned)
2. 有方向的 (directed)	2. 隨興的 (existential)
3. 有明確指引的 (guided)	3. 非主要的、順便的 (incidental)
4. 有目的性的 (purposeful)	4. 非預期的、意外的 (accidental)
5. 明確的師生角色 (defined teacher-student roles)	5. 隨機的 (opportunistic)
6. 正式的 (formal)	6. 非正式的 (informal)

(譯自 Branch, 2009, 頁 7)

也就是說，Branch 認為前者是目標導向的策略，有目的的或是正式的學習，這樣的特性可促進學習者的自我調節，也提供了自我反思的機會；後者則是在非計畫內的

或偶然發生的，在日常中隨機遇到的自然學習（仍是一種學習），像透過對話、觀察或對事物的印象等學習，也包含雖在脈絡下學習但卻進行著無脈絡的活動。

ADDIE 可以幫助教師進行系統性地思考設計，並具備了有效檢核教學的反思機制。比方說，在設計階段的循環流程中，時時監督教學的目的 (teach to the test) ，使得檢測的內容（「要學會」）對準教學內容，也監督教學策略的成效 (test to the way your teach) ，亦即檢核教學方法是否如預期之成效。而這樣的思維正呼應本研究之文本設計過程，在預期之目的性下，選擇適當的文本設計策略，進而檢核此設計模式之成效。

三、 識讀文本類型與書寫

每個學科為了讓各自的學習產生意義，都有自己獨特的閱讀、寫作和交流方式 (Cervetti & Pearson, 2012; Fang & Coatoam, 2013; Shanahan & Shanahan, 2014) ，以達到各自預期的學習目的，數學學科亦然。不同的文本不僅代表特有的書寫方式，亦隱涵著該領域呈現知識的最佳方式。本小節分為兩個段落說明，首先闡述數學文本之特有類型，做為研究者選擇適當之數學文本類型的參考依據；然後回顧關於書寫策略的文獻。

(一) 數學文本類型

數學文本特徵包含了數學先備知識、數學圖示理解、數學詞彙符號理解和數學作圖程序理解 (秦麗花、邱上真，2004) ，O'Halloran (1998) 也認為數學是透過使用數學符號、圖形和圖表形式的視覺顯示，以及語言等符號資源來詮釋的。Dostal and Robinson (2018) 就將數學文本分為證明文本 (proof text) 、演算法文本 (algorithmic text) 、代數/符號文本 (algebraic/symbolic text) 以及視覺文本 (visual text) 。

證明文本可以培養精確性的邏輯思維與語言表達，也是一種演示推理 (demonstrative reasoning) ，是從既有的事實按部就班地完成推理論述，所以它具備了嚴謹性、不變性 (Alibert & Thomas, 2002; Hanna, 2002; Polya, 1954) 。即便如此，Tymoczko (1986) 對於數學證明卻有不同的看法，認為數學知識的核心應在於溝通，而「數學證明，一般應具有一定的開放性和靈活性。它們可以被改述 (paraphrased) 、重述 (restated) 或填充 (filled out) 。」Tymoczko 指出證明方式超越了任何特定的形式表達，同時也認為非形式的證明常常是具有說服力的，而且往往會導出新發現。

Davis 與 Hunkins (1986) 也指出證明可以扮演成幾個不同的角色，它可以做為驗證、帶來新發現、論證的焦點，也可以幫助消除錯誤。像這種非形式的證明文本類型，對於初學者(包括初入中學階段的學生)而言，是較為恰當的，因為它不需要克服許多證明的嚴謹程序或邏輯結構。因此對於初入代數學習階段的學習者，數學證明的恰當方式，就是能夠以說明方式說服學習者相信數學家所宣稱的數學想法為真，提供培養數學邏輯思辨能力，即為證明的目的。

「演算法」是提供一個對於問題沒有已知答案或資料規模太大而無法筆算時的一種解決問題的方法 (Dostal & Robinson, 2018)，其主要特徵在於控制結構 (control structures)，即一些迴圈的設定與結束 (IF-THEN statements, FOR loops, WHILE loops 等等)。所以 Dostal 與 Robinson 就認為閱讀演算法文本必須具備基本的布林代數概念。然而在探討七年級學生的閱讀文本時，上述所述之演算法文本所應具備之能力在中學階段少有著墨。因此研究者欲以「程序性文本」取代「演算法文本」。

依據 108 數學領域之數學學習表現第一點：認識、理解、熟練：「認識」包含察覺、認識；「理解」包含辨識、概念連結、理解；「熟練」包含可做應用解題、推理，以及程序課題上的熟練 (國家教育研究院，2014)，說明程序性知識至關重要。Hiebert 與 Lefevre (1986) 將程序性知識分成兩部分，一是數學的符號表徵系統或形式語言、二是演算能力、規則的熟練以及解題的完成。本文將第一點置於後面的「代數／符號文本」中說明，在此聚焦於第二點「程序性文本」的主要特徵。

Hiebert 與 Lefevre 認為檢核程序性知識的關鍵特徵就是以預定的線性順序執行，也就是說在第 N 步開始前，必清楚明白來自於第 N-1 步中的結果。然而程序性知識的特徵也並不是這麼的唯一性，對於解題策略或是觀察視覺圖片、操作具體物等這些行為，如數線操作或是尺規作圖也都是程序性的知識。此外，Hiebert 與 Lefevre 也提到程序性知識也有結構性的特徵，一個子程序是包覆在另一個程序內，一旦理解了整個程序，那麼子程序也被認為已理解。舉例來說，負數單元中，如果正確識別 $-2 - 3 = (-2) + (-3) = -(2 + 3)$ ，那麼對於負號的抽象符號變換與化簡也視為已理解。基於此論述，本研究則以程序性文本取代演算法文本。

代數文本在於一般化與濃縮的意義 (generalize and condense) ，其目的在於讓學習者逐漸提升抽象層次 (Dostal & Robinson, 2018) 。首先對於符號的認識，Pimm (1981) 舉例如：語標 (logograms) ，針對某個數學概念創造的特定符號，如 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 、 $\%$ 、 $\sqrt{\quad}$... 等圖像符號 (pictogram) ，指具有特定性的圖標，其中符號與意義有密切相關；又如 Δ 、 \perp 、 \parallel 、 \angle ... 等都是應習的對象，也要能恰當使用這些符號做數學表徵；其他如特殊字母符號 (含希臘字母) ，只要有賦予數學中的特殊意義，則應予以強調，如 π 、 μ 、 i ... 等；若以包含負數的數線為例，那麼原點 O 也是在強調正負對稱意義時所必要的，或是習慣上將英文前面字母 a 、 b 、 c 等做為常數或係數的意義，後面的字母 x 、 y 、 z 等做為未知數或變數的意義。以負數單元為例，「 $-$ 」號的雙重意義，在讀出 $5 - (-12)$ 的讀音時，辨識「減」與「負」號在式子中不同的運算意義更是要學習的，因為它是能將文字轉化成符號的表現。

符號代數學習的另一目的，即為熟練表徵的意義，是觀察並表達關係的方法，有助於學校數學內容的整合，也是比算術更有效率且自然的解題方法 (NCTM, 2000) 。代數可以教導學生 (或稱學習者) 數學有關的定義與技巧，能做說明、類比及歸納的辨識；也提供學生對一些基礎數學步驟的理解，能對數字、圖表及符號表徵加以詮釋，說明「符號的感覺」，創造與解釋數學的模式，分析與比較關係，應用基本公式迅速解決問題 (陳嘉皇，2007) 。

「視覺文本」也是有效的教學工具。Dostal & Robinson (2018) 認為視覺能力是我們從這世界獲得訊息最重要的來源方式。我們渴望從視覺中獲得的不僅是在眼前看到什麼，同等重要的是看不到的還有什麼。所以「視覺文本」要注意突顯概念間的關係 (relationships) ，此關係包含代數符號間的關係或是圖形中的關係。Kirshner 與 Awtry (2004) 指出「視覺顯著性 (Visual Salience) 」就是具有視覺上的連貫性規則。例如前面的表 9：左欄的等式中，等號左側與右側看起來自然地相互關聯，在視覺顯示中有著連貫性，而這樣的呈現是更可以在彼此之間建立有意識的聯繫，也可以協助學習者的直覺認知。相對地，右欄中的代數關係就顯得沒有視覺顯著性。

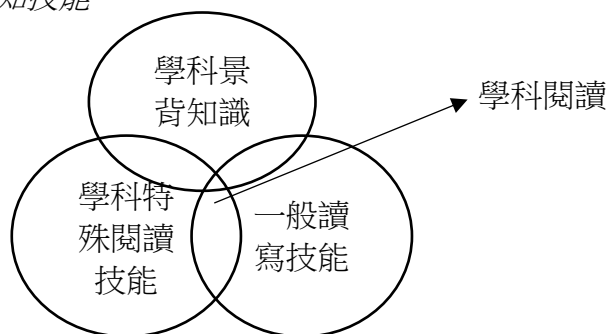
透過上述四類文本之目的與特徵說明，可以在學習目標設定之後，決定識讀文本之適當書寫形式，透過特有之關係與適當的表徵，促進刻意的學習。

(二) 數學閱讀與書寫策略

Brozo 等 (2007) 認為：學生在數學閱讀方面的弱點，往往是由於他們在嘗試理解讀本時，遇到複雜符號的障礙。學生一旦在閱讀數學上有困難，就會開始有數學學習上的退化 (Lin & Tsai, 2021)。也可說有時學生的學習停滯，不代表能力不足，而是在文本的閱讀有了障礙。Harlaar 等 (2007) 亦指出學生需要「學習如何閱讀 (learning to read)」和「從閱讀中學習 (reading to learn)」的教學。Mckenna 與 Robinson (2002) 歸納了學科閱讀包含三種主要的認知技能：一般讀寫技能 (general literacy skills)、學科背景知識 (prior knowledge of content)、學科特殊閱讀技能 (content-specific literacy skills)，如圖 9。

圖 9

學科閱讀指導的三種認知技能



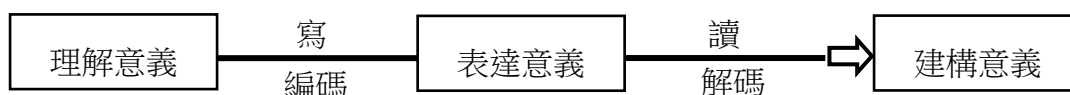
譯自 Mckenna, M. C., & Robinson, R.D. (2002), p. 9

圖 9 中的第一種認知技能，「一般讀寫技能」是在進行一般閱讀時必要的識字或理解能力；第二種認知技能，「學科背景知識」則是在閱讀中富者愈富的概念 (柯華葳著／陳明蕾編，2022)，意即即使這新概念尚未學習，但可能因為曾經看過或經歷過類似經驗而有所頓悟，故背景知識是可以幫助學生更快理解新知識。至於第三種認知技能，「學科特殊閱讀技能」則是在學科閱讀中占有舉足輕重的地位，根據相關研究也發現在預測數學閱讀理解能力時，數學閱讀特殊技能所占的貢獻量最大 (秦麗花，2016；Lin & Tsai, 2021; Schöber et al., 2018)。

對於數學文本如何的讀與寫實為一體二面。在數學領域中，數學詞彙和符號具有傳達、溝通、解釋數學概念的功能，文本又包涵諸多新的術語與概念，再加上閱讀文本的歷程，可算是對於欲透過文本閱讀理解知識的讀者，以及意圖將數

學知識透過文本讓讀者理解的編寫者，之間的溝通歷程。故若無法將詞彙和符號與概念做連結，就會導致學習上的困難 (秦麗花，2016)。如圖 10。

圖 10
概念表徵轉譯過程



改自 Mckenna, M. C., & Robinson, R.D. (2002), p. 16

根據上述討論，學科閱讀有其一定的理論基礎與適合的與書寫策略。對數學學科閱讀而言，不論是閱讀者或編寫者，都是透過適當的閱讀技巧／書寫策略，進而理解文本的內容，建構學科學習的意義。

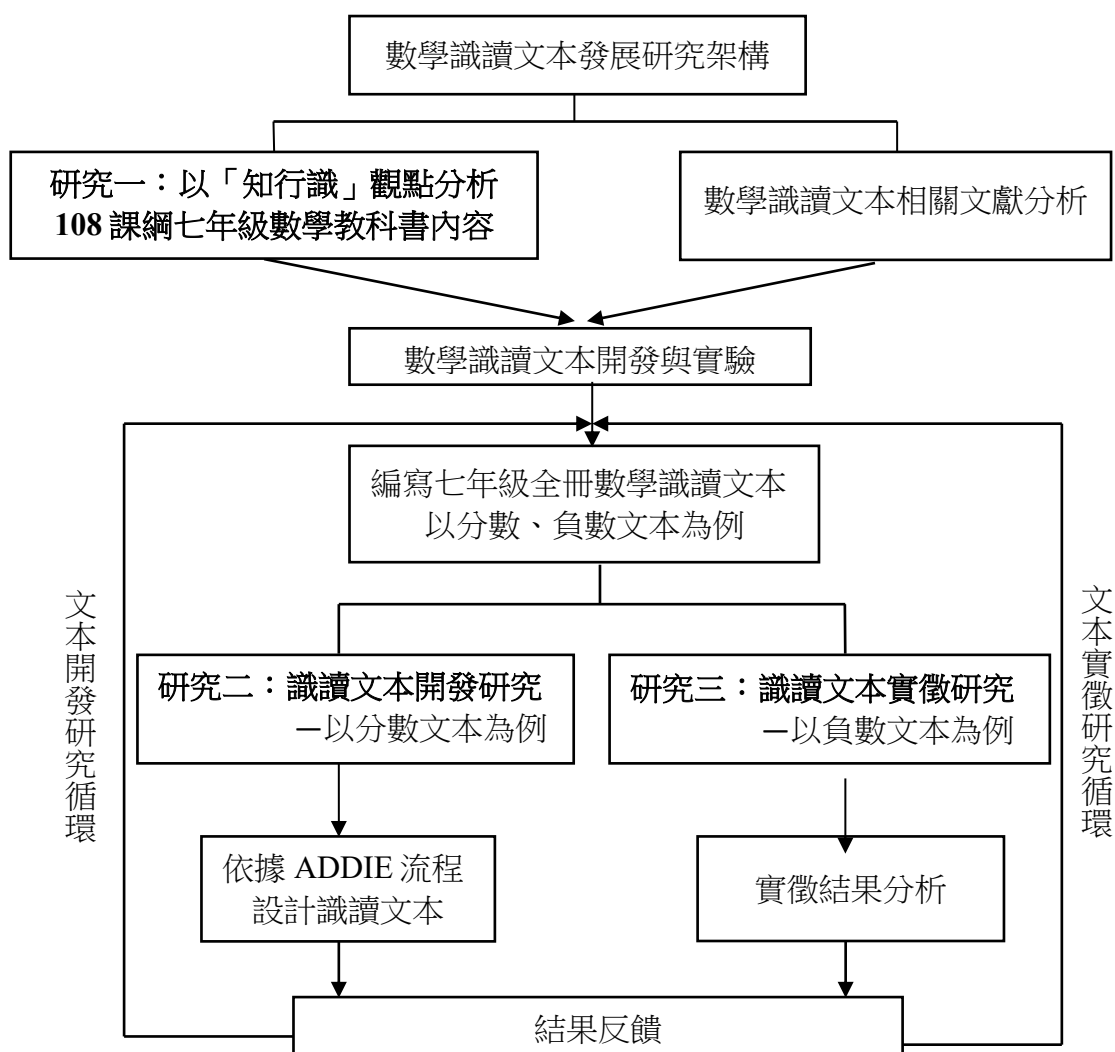
小結

在本章的文獻探討中，首先釐清「數學素養」定義，做為識讀文本之素養實踐依據。接著闡述「知行識」課程架構做為數學素養實踐指引之適切性。然後依據教科書的內容分析文獻，探討以數學素養做為內容分析之關注面向時，教科書對於知行識之布題設計，與其具體實踐指標的呈現方式，據此發展本研究之負數單元與分數單元的識讀文本內容。此外，對於數學概念的形成，如概念譬喻與視覺操作之理論基礎及數學文本類型進行論述，以使本研究識讀文本得以具備建構數學知識之理論基礎。最後，探究 ADDIE 教學設計模式，將它應用於識讀文本的設計，先決定合宜的數學文本類型，再探究從分析、設計、發展、實施、與評估階段的反覆修正與監督的循環模式中，檢核本研究之識讀文本施行之可行性與有效性。

第參章 研究方法

本研究架構流程如圖 11，主要說明三個研究問題之研究流程與分析方法。首先，研究一，透過「知行識」觀點分析七年級數學教科書中負數與分數的學習內涵；然後根據研究一結果以及第二章文獻探討，做為「數學識讀文本」開發與實驗研究的理論基礎，進行七年級的數學識讀文本開發。再依此分為兩個研究構面：其一，以分數識讀文本為例，依據 ADDIE 設計流程，探究文本設計歷程可行性，是為研究二；其二，以負數文本為例，進行識讀文本在教學後之實徵成效，是為研究三。基於避免資料重覆敘述，亦便於提供更多文本的研究訊息說明，本研究於研究二、研究三分別以分數單元、負數單元內容為例說明，做為識讀文本發展可行性與實徵成效之佐證。

圖 11
識讀文本發展與研究架構流程



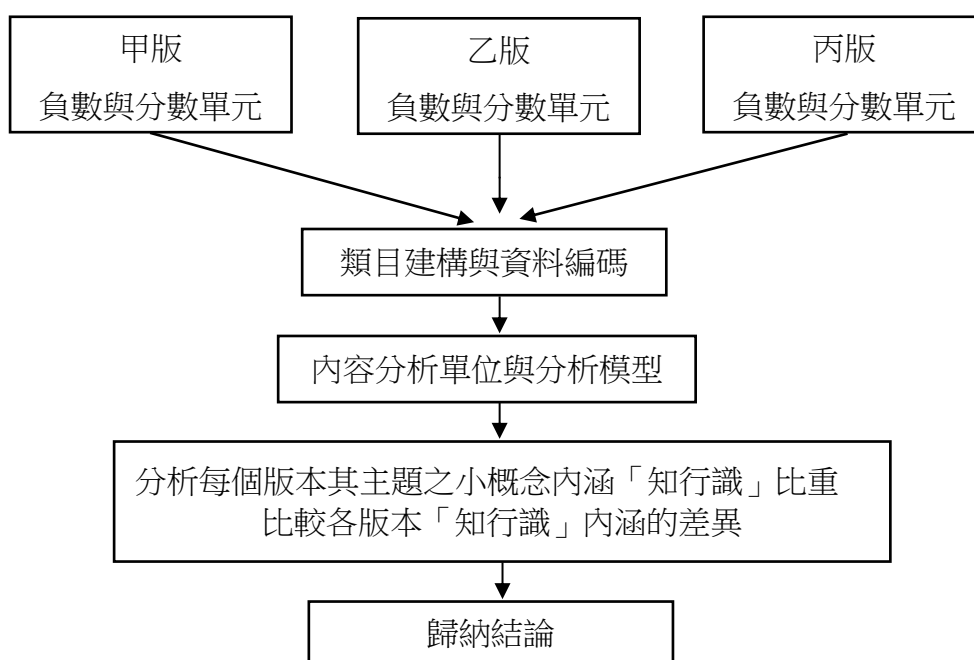
首先說明本論文之整體研究以「本研究」稱之，本章之三個研究問題分別以「研究一」、「研究二」、「研究三」稱之。第一節即為研究一，說明甲、乙、丙三個版本教科書在負數與分數的教材題型內容中，對於「知行識」之呈現方式與分佈比例之研究方法；第二節為研究二，識讀文本開發設計歷程之研究方法，研究二之識讀文本開發雖已完成七年級全冊單元，然於本研究中僅以「分數」單元作說明，其餘單元之開發流程皆相同不在此贅述；第三節則為研究三，針對「負數」單元進行實徵研究之研究方法。

研究一 三版數學教科書內容分析研究

一、研究流程

研究一主要依據 108 課綱的數學領綱，針對甲、乙、丙三個版本教科書編輯之負數、分數單元進行分析，採內容分析法以三版本中所有的主題小概念做為分析單位，依每個小概念中所涵蓋的知、行、識向度設計進行分析。對於教材分析內容以量化方式分析相關內容之外，亦依據教科書內容屬性採質性描述與詮釋，以進行客觀的推論分析。研究流程如圖 12。

圖 12
三個版本數學教科書之負數、分數單元教材分析架構



二、研究樣本

本研究一以目前國中階段使用之三個版本，即甲、乙、丙版之國中七年級數學教科書做為研究樣本，並以「負數」與「分數」單元做為分析對象。三版皆依據 107 年發布之數學領綱編輯而成，故在編輯理念上皆以「總綱」理念奉為圭臬，其呈現方式大同小異，唯本國教科書是以學年為一個學習階段，對於每一學年應學習的單元置放於哪一個學期則由各家版本規畫。以七年級數學教科書為例，共有九個教學單元，甲版上、下學期各安排 3、6 個單元；乙版上、下學期安排 3、6 個單元；丙版上、下學期安排 4、5 個單元，故每個版本的頁數會有所不同。

此外，甲版於每章的首頁都安排 2 頁的引起動機、每節都有溫故知新，章末有 3 頁的補充知識，其中有 2 頁是學負數相關的遊戲(不列入研究)；乙版於每章的首頁則安排 2 頁的引起動機與先備知識、章末與負數相關補充知識 5 頁，其中有 2 頁為遊戲活動(不列入研究)；丙版於每章的首頁安排 2 頁的引起動機以及 1 頁的學習前哨站、章末與負數相關補充知識 1 頁。本研究之內容計次標準以教科書內容編有頁碼者；未編入頁碼者皆為冊末的課外補充，教師一般皆視為補充教材，由學生自行閱讀，在評量上亦較難有檢核標準，故不列入計算。分數單元，甲版與乙版皆安排於 2-3 節，丙版安排於第二章第三節與第四節(2-3、2-4)，但 2-4 包含指數律內容頁數予以扣除。三個版本市占率依序為 24%、45%、31%(圖地，2022)，表 13 為各版本相關資訊。

表 13
三個版本數學教科書基本資料

	甲版	乙版	丙版
使用版本與年份	七上(112年8月)	七上(112年8月)	七上(112年8月)
中小學數學教科書市占率	24%	45%	31%
上冊總頁數	210	215	225
負數 章別安排	1-1、1-2、1-3	1-1、1-2、1-3	1-1、1-2、1-3
單元 負數內容頁數	60 (28.57%)	64 (29.77%)	62 (27.56%)
分數 章別安排	2-3	2-3	2-3、2-4
單元 分數內容頁數	22 (10.48%)	21 (9.77%)	21 (9.33%)
出版社成立時間	1970年	1988年	1959年

三、研究工具

研究一採用「知行識」課程架構，然審定教科書並沒有宣布「識」向度教學目標，所以研究者依據文獻中「知行識」向度認知層次的分類，以及國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心[心測中心] (心測中心，2021)，自編「數學識能評量規準」(陳玉芬、單維彰，2022)，做為實踐「知行識」課程架構的評量工具，也因為「識」相對於「知、行」是素養導向課程與相對課程理念(例如學科導向)的關鍵差別，所以稱之為「識能規準」，即期望學生學到哪些內容及做到什麼程度，如表 14。主題與次主題呈現學到哪些內容，A-D 四表現等級則描述做到什麼程度，其中 C 等級所謂的「基本」是指「若學不會，會影響國中三年的學習」，而 D 等級的「簡易」是指「C 等級的先備知識」。

表 14

國民中學標準本位評量數學領域各主題評量標準—以分數為例


主題	次主題	A	B	C	D
7年級 分數運 算	正分數 的乘法 運算	能陳述並解釋一般分數乘法算則的理由，能欣賞單位分數對於簡化概念的幫助。	能作一般分數乘法，能應用分數乘法解決問題。	能理解單位分數乘法的面積意義。	能理解一般分數是單位分數的整數倍。
		能使用口語或文字或圖形表達支持自己的論點。	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ $= (\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}) \times (2 \times 4)$ $= \frac{8}{15}$	可以理解 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ 在面積中代表的意義。 	$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$
主題、次主題： 學到哪些內容		「識」的 表現等級 A	「行、識」的 表現等級 B	「知、行」 的表現等級 C	「知」 的表現等級 D

表 14 即以 7 年級分數為例說明，主題為分數運算、次主題為 (正) 分數的乘法運算為例，描述各等級的表現，其中 D 等級 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ 在教學脈絡(識讀文本)中的意義並非乘法算則，而是可以知道一般分數 $\frac{2}{3}$ 可藉由單位分數表示的意義。所以就此課程而言，雖然 D 等級並非 C 等級的直接先備知識，但 D 等級確為將 C 等級應用於 B 等級所需的先備知識，也就是此項「次主題」的先備知識，故研究者認為它仍符合心測中心的 D 等級。又各向度的評量必須對應適當的表現等級，需要拆分各向度的評量目標，本研究依據文獻分類，並以正分數乘法之次主題為例，依實際需要將「知行識」三向度的評量目標細分兩級，標示為知 1、知 2、行 1、行 2 與識 1、識 2，各項目所屬的表現等

級與描述如表 15，並以「7 年級分數運算」主題為例，說明學生在此準則下應盡可能達到對知識的理解掌握、程序技能的嫻熟以及能應用並解決生活問題的態度。

表 15
數學識能評量各向度目標、等級與規準說明示例

向度	等級	規準說明
知 1	D	知道一般（正）分數都是單位分數的倍數（整數倍）。例如 $\frac{3}{5}$ 是 3 個 $\frac{1}{5}$ ，視情況可記作 $\frac{1}{5} \times 3$ 或 $3 \times \frac{1}{5}$ 。
知 2	C	知道單位正方形的面積為 1（平方單位），將它切割成 n 個（彼此全等的）矩形之後，每個矩形的面積為 $\frac{1}{n}$ （平方單位）。知道單位分數相乘的意義之一是面積，也知道交換相乘的順序仍是同樣的面積，例如 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ 。
行 1	C	能作單位分數的乘法計算，例如 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ 。
行 2	B	能作一般正分數的乘法計算，例如 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ 。學生能運用交換律即可，不必刻意評量交換律。能用分數乘法解決典型的應用問題，例如求邊長為 $3\frac{1}{2}$ 和 $1\frac{3}{4}$ 英吋的長方形面積。（假設帶分數轉換的學習已經穩固）
識 1	B	能將較不常見或需要多步驟的問題轉換為關於分數相乘的數學模型，例如將 10 張 3 吋長的便條紙黏接成一長條，每兩張之間的重疊黏貼處是 $\frac{1}{4}$ 吋，總共有多長？（只有列式或轉換為數學模型的思維屬於此項。）
識 2	A	能解釋分數乘法算則的理由，能解釋為何分數相乘的順序不影響結果（不必強調「交換律」這個術語，也有限定使用單位分數）。能欣賞單位分數為發展分數乘法之概念與算則所提供的幫助。

一般而言，「知行識」所對應的表現等級不一定是從低到高，各向度也不一定要對應恰好兩個表現等級。原則上，數學素養課程架構所建議的「知」是指學習內容，亦即「是什麼」或「學什麼」的課程目標，側重於能夠從記憶中提取，在認知上能夠指認；「行」是「怎麼做」或者「做什麼」的課程目標，指的是學生所展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證等等；至於「識」則是關於理解和連結的後設

認知，以及對其價值的認同，建議理解成「為什麼會這樣」、「為什麼選擇這樣做」、「怎麼發展成這樣」之類的課程目標。

四、內容分析單位與分析模型

(一) 內容分析單位

研究一以文獻中表 4 及表 6 之「小概念」與「學習活動」為分析單位，其中所有的活動引導、練習、評量等部分，都納入每一個小概念的分析。如果一個「小概念」與「學習活動」中包含其他補充內容，而它們之間並沒有直接關聯將被視為兩個單位。焦點在於主題的概念內容分析(即說什麼)，主要目的在於客觀審視教科書的呈現方式，縱向分析則關注這些「小概念」與「學習活動」內容呈現形式，依據數學素養之學習表現，以及掌握數學素養中五個向度(參考表 8 內容)的指標，再對應「識能規準」三個向度做為類別項以及表 2 對知能、技能、識能的定義，並確保各類目間具有互斥、窮盡及可靠三個原則(張芬芬，2012；徐偉民、黃皇元，2012)。由於學習表現在於展現學習者的學習能力指標，此外，每一個「小概念」表徵方式雖有不同，但都不脫離圖、表、文字或例題的呈現方式，因此，一個系列題目同屬一個知能、技能、與識能，僅計次一次。亦即每個「小概念」可以同時具有知能、技能、與識能，但最多各一次。

以乙版內容說明，圖 13 為一張描述玉山氣溫低於零度的表示法，在「正數與負數」單元中，以生活情境的「主題引導」對話方式作概念引導設計，圖 13 紅框內的文字對話內容，說明使用負數的動機以及告知負數的表示法，故屬「知」向度的知能。

圖 13

負數表示的知能



再以「分數的四則運算」單元為例，若表徵方式為操作演算或是使用合理的步驟進行運算，皆歸之於「行」向度的技能，如圖 14。

圖 14

分數四則運算的技能

例 5

利用加法交換律、結合律求算式的值

計算 $(-23)+1205+(-77)$ 的值。

Ans

至於像圖 15 呈現的對話是對於一個分數的表示如： $-\frac{7}{4}$ 、 $\frac{-7}{4}$ 、 $\frac{7}{-4}$ 何者較為恰當？屬概念性知識，但因提供了學生思考與論述的機會，即指具有知識的關聯性，也凸顯片斷與片斷之間相關性知識的網絡連結，亦或將各個事實和命題之間的關係連結起來，故屬「識」向度的識能。

圖 15

負號認識的識能



研究一乃從數學素養觀點下分析各概念「知行識」向度內涵，即分析三個版本負數與分數單元的小概念與學習活動，凡屬此小概念與學習活動範圍的即代表一個分析單位，每個分析單位做為橫向類目（即表 4、表 6 中的小概念與學習活動）。此外，在不同版本中的「學習活動」名稱會有所不同，例如：甲版有「迷思診察」、「素養花路米」，乙版為「數學好好玩」、「探索活動」，丙版則為「自我挑戰」、「趣學數學」或是另闢小主題「碳足跡」，這些亦屬於每個單元下最小分析單位的橫向類目。本研究之三個垂直向度，即聚焦於每個小概念的「知行識」內涵，且各版每個單元下的小概念與學習活動設計屬於複合型（即一個小概念可能同時有知、或行、或識各向度）。

做分類歸屬時可以有多重選項，凡小概念涵蓋「知行識」任一類別，皆計次 1 次。以三個版本各自涵蓋的「小概念」做為判別歸屬的分析單位，每一個「小概念」是一

個完整的教學程序，凡屬此小概念進行中所使用策略皆屬之。如：在引入負數符號概念時，會有「主題活動」，如圖 16，然圖 17 仍是該「主題活動」的文字說明與內容補充，圖 18 也是為學習負數符號概念的「例題說明」與「隨堂練習」，像這樣的安排則歸屬於 1 個分析單位，研究者再根據此分析單位進行「知行識」向度的計算，凡符合任一向度，則計數 1 次，每個分析單位最多為「知行識」向度各 1 次，針對此負數符號小概念而言，圖 16 至圖 18 皆屬知能培養，故僅計知能 1 次。至於圖 19 的「數學好好玩」，其內容在於介紹符號的由來，則屬學習活動，故另闢一個分析單元類目。

圖 16 引入負數概念的「主題活動」



圖 17 負數概念的「主題活動」文字說明



再來圖 20 為一個探索活動，主要學習包含負數的「整數」概念，而圖 21 則是針對「整數」概念學習的練習題，故歸屬為同一個「小概念」分析單元。再依據「識能

圖 18 負數概念的例題說明與隨堂練習

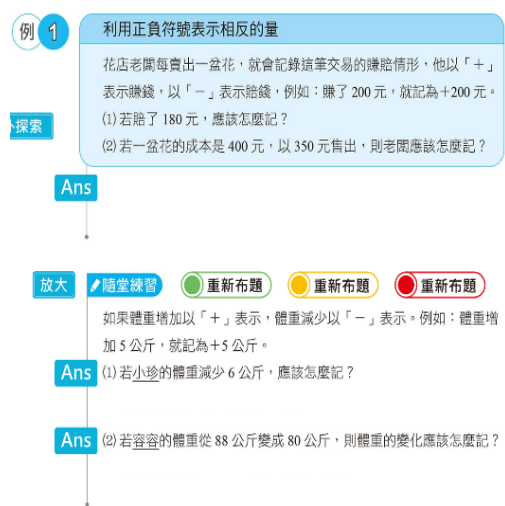


圖 19 數學好好玩



評量規準」針對「小概念」分析單元辨識「知行識」向度，圖 20 雖名為探索活動，但實為知識概念的說明，並未有計算的操作行為，亦未有相關概念連結，故屬知能，計次 1 次；圖 21 雖為隨堂練習且有 3 小題，但皆屬於知識的辨識，故亦屬知能，因屬同一個分析單位，故知能不重覆計次，即仍計次 1 次。

圖 20

「整數」概念的探索活動

課外探索

在數中， $+2.2$ 、 $+5$ 、 $+\frac{5}{2}$ 等數稱為**正數**，
 -8.3 、 -2 、 $-\frac{5}{2}$ 等數稱為**負數**，而 0 不是正數也不是負數。

當 $+$ 、 $-$ 是表示「數的正、負」時，我們稱這兩個符號為**性質符號**，
 例如： $+5$ 、 -2 。習慣上，我們將正數前面的性質符號「 $+$ 」省略不寫，
 如 $+5$ 寫成 5 ，但負數前面的性質符號「 $-$ 」則不能省略。
 性質符號相同的數稱為**同號數**，例如： 6 和 1.8 、 -7 和 -2.3 。
 性質符號相異的數稱為**異號數**，例如： 3 和 -6 、 -5.4 和 9 。

當 $+$ 、 $-$ 是表示「加、減運算」時，我們稱這兩個符號為**運算符號**，
 例如： $2+3=5$ 、 $8-1=7$ 。

在正數中，像 1 、 2 、 3 、 4 、……這樣的數，稱為**正整數**（或**自然數**）；
 在負數中，像 -1 、 -2 、 -3 、 -4 、……這樣的數，稱為**負整數**。
 而**正整數**、 0 、**負整數**，合稱為**整數**。

負整數
正整數
 $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$
整數

圖 21

「整數」概念的隨堂練習

隨堂練習 ● **重新布題** ● **重新布題**

下列各數中，哪些是負數？哪些是整數？哪些與 -2.4 是同號數？

1.5 -3.6 $-4\frac{2}{3}$ 0 -21 19 $2\frac{4}{5}$

S (1) 負數：_____。

S (2) 整數：_____。

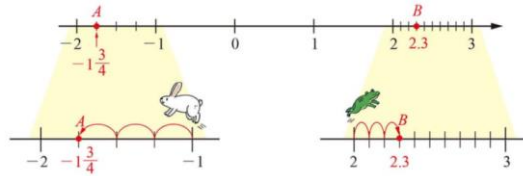
S (3) -2.4 的同號數：_____。

圖 22 說明小數與分數在數線上的標記方式，因透過局部放大觀察引導，目的在於透過整數標記擴展至小數或分數的標記方式，但因為分割的格子 ($\frac{1}{4}$ 與 0.1 格) 皆已畫好，故屬辨識的知能活動。

圖 22

小數與分數的標記方式

如果我們要在數線上標記含有小數或分數的點，就必須把「某部分的單位長等分成更小的長度」，例如：要標記 $A(-1\frac{3}{4})$ 和 $B(2.3)$ ，依下列步驟便可找到正確的位置。



$A(-1\frac{3}{4})$:

表示 A 點在原點左邊 $1\frac{3}{4}$ 個單位長。
可知 A 點在 -1 和 -2 之間，
將此 1 單位長分成 4 等分，
則每一等分為 $\frac{1}{4}$ 個單位長，
由 -1 開始向左算起，
第 3 個等分點就是 A 點。

$B(2.3)$:

表示 B 點在原點右邊 2.3 個單位長。
可知 B 點在 2 和 3 之間，
將此 1 單位長分成 10 等分，
則每一等分為 0.1 個單位長，
由 2 開始向右算起，
第 3 個等分點就是 B 點。

圖 23 整數的乘法特性，主要在說明「乘法交換律」，屬知能；圖 24 則是乘法交換律的應用題，屬技能；圖 25 的隨堂練習，需要說出自己的想法理由，故屬識能。此三部分皆在說明整數的乘法特性，故屬於一個分析單元，且知能、技能、識能各計次 1 次。依此類推至各版本冊末之所有相關內容，皆予以分析統計。唯因置於冊末，教師是否有完全引導或做為學生課後自行閱讀之補充內容，則不在本文分析之內，但做為本研究之結果討論之補充說明。

圖 23

整數的乘法特性

✓ 整數的乘法特性

1. 乘法交換律

我們知道兩個正整數相乘會滿足乘法交換律，例如： $7 \times 2 = 2 \times 7$ ，那麼含有負整數的乘法運算是否也會滿足乘法交換律呢？

$$7 \times (-2) = -(7 \times 2)$$

$$(-2) \times 7 = -(2 \times 7)$$

因為 $7 \times 2 = 2 \times 7$ ，

所以 $7 \times (-2) = (-2) \times 7$ 。

$$(-5) \times (-6) = 5 \times 6$$

$$(-6) \times (-5) = 6 \times 5$$

因為 $5 \times 6 = 6 \times 5$ ，

所以 $(-5) \times (-6) = (-6) \times (-5)$

我們可以發現，含有負整數的乘法也滿足乘法交換律。

圖 24

乘法交換律的例題說明

例 4

乘法交換律、結合律的應用

計算下列各式的值。

(1) $(-5) \times (-129) \times (-2)$

(2) $(-231) \times (-125) \times 8$

習時光機 Ans

圖 25

乘法交換律的隨堂練習

隨堂練習

重新布題

判斷 $(-12) \times (-13) \times (-14) \times (-15) \times (-16) \times (-17) \times (-18)$ 的計算結果是一個正數還是負數？說明你判斷的理由。

(二) 編碼者信度與分析模型

教科書內容之「知行識」類目分析完成之後，則採用「評分者一致性」做為信度的檢驗方式，編碼者信度編碼過程分別由三位：研究者本人 (A)、數學系教授 (B)、統計評量領域助理教授 (C) 組成。檢驗方式由編碼者 A 選取負數及分數單元各隨機選取 33 個「小概念」（共 66 個任務），交由另外二位 (B)、(C) 評分員針對相關單元之教科書內容，依據「識能規準」的「知行識」向度分類，進行一致性檢定。本研究刻意選擇非數學專科領域者為其中一名評分員，意在以非專業角度下，不僅更能客觀分類，亦能針對「知行識評量規準」做更完善的修正。並針對不一致的地方進行討論及微調架構讓定義更清晰且容易執行。內部一致性如表 16 所述。

1. 信度分析步驟

其題目信度考量，採用評分員信度法檢視評分者間同意度，先計算評分者間的相互同意度 (Pi)，再求得平均相互平均值 (P)，最後歸類之結果依伯格納簡易信度公式計算信度 ($R \doteq .934, R > 0.8$)，相關公式如下 (歐用生，2000)。信度計算結果如表 16。

相互同意度 (Pi) , $Pi = \frac{2M}{N1+N2}$,

M：兩人共同同意的項目數；

N1、N2：第一、二位評分員應有的同意數

平均相互同意度 (P)

$P = \frac{\sum_{i=1}^n Pi}{N}$, N：評分者相互比較的總次數

簡易信度 (R)

$$R = \frac{nP}{1 + [(n - 1)P]} , n : \text{評分者總人數}$$

表 16

第一次「知行識」向度分類信度結果

編碼者	「知」向度		「行」向度		「識」向度	
	B	C	B	C	B	C
研究者 A	.70	.66	.86	.80	.65	.50
編碼者 B		.60		.80		.52
編碼一致性度	$R \div 85\%$		$R \div 93\%$		$R \div 79\%$	

第一次「知行識」向度分類的檢核，其簡易信度知能的評分員信度相對較低，識能信度則未達標準值，主要是對於知、識向度未有明確共識，不一致的原因主要來自描述「小概念」之「知行識」概念仍有許多因個人主觀對知能、技能、與識能的認知不同，舉例來說：以生活情境的「主題引導」會誤以為是識能連結，所以必須再定義識能是必須要增加「能將情境問題轉換為數學式子的表徵有跨概念的連結」之陳述。又或是雖動手標示位置，但若已分割好單位，只需標示，則應屬知能而非技能。故於知能定義再修正為「屬於事實資訊(也包含一系列連貫的事實資訊)或非對即錯等事實區辨之學習內容」，諸如這些，對於不一致的部分都會逐一討論，直到三位編碼者都可以接受為止。最後經完全溝通後，得表 17 之「知行識」向度信度結果。

表 17

第二次「知行識」向度分類信度結果

編碼者	「知」向度		「行」向度		「識」向度	
	B	C	B	C	B	C
研究者 A	.95	.90	.98	.95	.96	.83
編碼者 B		.90		.96		.82
編碼一致性度	$R \div 97\%$		$R \div 99\%$		$R \div 95\%$	

2. 分析模型

研究者將所有「小概念」依據文獻整理類目為(知能、技能、識能)三個能力，分別以(知能、技能、識能)做建模研究，再將統計數據做折線圖比較三版本負數與分數各小概念在「知行識」向度的鋪陳趨勢。舉例來說，以每一個小概念為一個事件，並將是否涵蓋知能、技能、識能設定為 1 或 0，有涵蓋為 1(折線圖上對應為高點)，無涵蓋為 0(折線圖上對應為低點)，故若其(知能、技能、識能)對應值為(1, 0, 0)，即代表此小概念有知能概念，但沒有技能，也沒有識能概念。舉例來說，若有三個小概念，

其(知能、技能、識能)對應值分別為(1, 0, 0)、(1, 1, 0)、(1, 1, 1)，那麼所繪製出的折

線圖如 其三組對應值分別對應 ①區(1, 0, 0)、②區(1, 1, 0)、③區(1, 1, 1)。

五、資料處理與分析

研究一以三個版本數學教科書中的負數與分數教材內容中，所有「小概念」與「學習活動」(合計 162 個) 為分析單位進行分析，並將分析結果登錄於隸屬的類目中，並統計各類目所占的百分比，以瞭解各單元對該教學事件的編寫情況。統計該單元對於知行識分佈比例，並繪製相對應之折線圖，做為分析教科書實踐知行識向度之依據，並比較三個版本對於知行識分佈的差異性。使用之統計方法有：敘述性統計(descriptive statistics) 說明每個「小概念」與「學習活動」在「知行識」各向度的分佈狀況，並以次數分配及百分比進行描述，再以分析模型折線圖比較各版本「小概念」與「學習活動」差異模式，以及卡方獨立性檢定 (Chi-square independent test)，說明各版的教材的「小概念」與「學習活動」在「知行識」向度的布題比例是否有差異，從而進一步說明各版本之數學素養的內涵以及編寫情況。

研究二 識讀文本開發研究

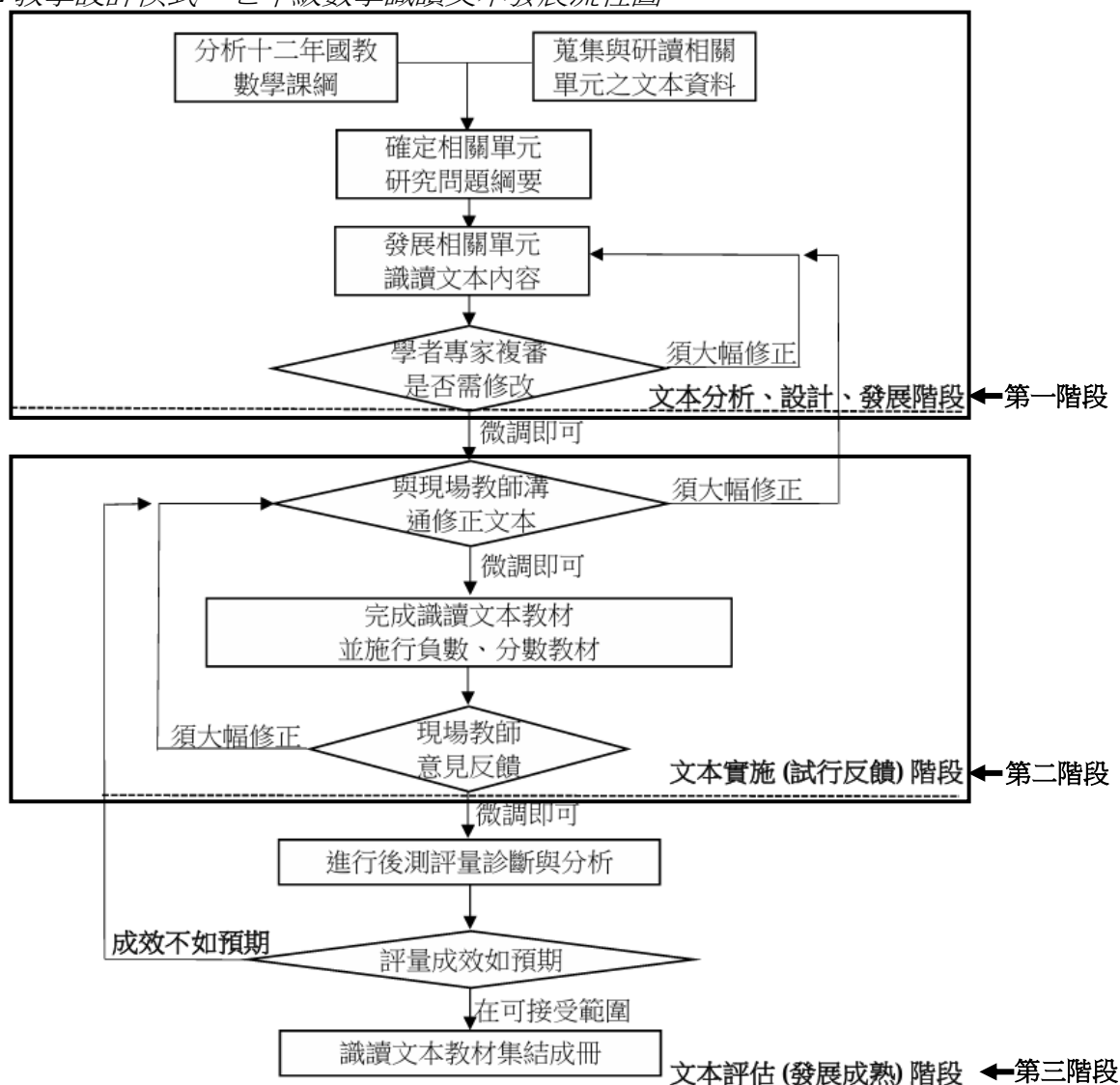
研究者自 2020 年即開始研發「數學識讀文本」之編寫，並同步針對研究者任教學校的七年級部分班級學生進行試教，然後逐年修正與自主改善，以下說明文本開發所進行的流程。

一、識讀文本開發流程

研究二之目的在於發展數學識讀文本，以 ADDIE 教學設計模式，做為識讀文本設計歷程之研究策略。以分數識讀文本為例，研究流程探究二個階段：第一階段以 108 課綱與識讀文本相關文獻為本，再依據數學相關理論發展以數學素養為導向之「分數識讀文本」(圖 26 上框)，即分析、設計、發展階段；第二階段依 ADDIE 設計流程進行實驗修正，同時針對分數單元進行教學分析，透過學習後的教師與學生回饋進行反覆修正、增強或補充應習得之知能、行能、識能內容，以完成識讀文本開發(圖 26 下框)，至於第三階段的「文本評估(發展成熟)」階段，則不在本研究範疇。

圖 26

ADDIE 教學設計模式—七年級數學識讀文本發展流程圖



文本開發的第一階段，探究二個部分。其一為文本格式的設計，包含可閱讀性、閱讀量的恰當性、用詞遣字、內容接受度等的設計內容探究；其二為文本內容對於「知行識」向度的設計。本研究之識讀文本是以分數單元為例，稱之為「分數識讀文本」，並提出三個主題的學習目標，分別是：「分數的意義（包含分數與小數的應用）」、「單位分數」、以及「分數的乘除」。文本開發的預期成效皆利用「差距分析概念描述」（如圖 7），所設計的「執行評量摘要表 (performance assessment chart)」（引自 Branch, 2009，頁 30) 進行檢核。

文本開發的第二階段，為「文本實施(試行反饋)」，也是檢核文本設計歷程階段與預期目標之差距。內容包含單元學習完成後之學習評量活動(包含隨堂練習、閱讀整理、隨喜練習或課後評量)的設計。此階段主要在經過課程的前導(pilot study)施行後，與現場教師溝通並檢討待修正或未如預期成效部分。此外，本階段也是在檢核學習內容是否已達到「知行識」層次的知能、技能、識能。此階段以一個學年為一個試行單位，試行1年後針對試驗班級施作半結構性問卷回饋，並對部分學生質性晤談且錄製影音存檔。問卷主要調查目標為文本可讀性層次，如：識讀文本難易度、文本內容量的學習負荷、排版的可閱讀性，以及文本內容喜好度等，並加以訪談為輔。調查之後依據現場教師教學心得及施測學生資料回饋整理，再經由專家審核反饋做二次修正，建立可行性之教學策略再次試行。第二次則著重於教學內容成效性，如：文本的精簡與單元修正，以及課後反思之聚焦提問，同時為檢核「知行識」學習成效，開始編製「數學識能評量規準」，於教學完成後，進行識能學習分析，然後依此回饋做為第三次施行之參考。

第三階段的發展成熟階段，則是在歷經三年實驗之後，預期進行成效評估後的最後修正，期能發展可滿足教學需求效能下的有效識讀文本，並將此識讀文本作品集結產出。但此階段不在本研究範疇。

二、 研究參與對象

研究二歷經三年(109、110、111年)實驗與試教，參與對象說明如下：

- (一) 研究者：此質性研究的教學者與觀察者，負責資料的收集、整理與分析，收集學生的各種學習資料，並與協同研究者共同討論修正教學方案。
- (二) 協同研究者：為數學教育研究之教育專家，在研究過程中提供理論的支持，使研究能往前邁進。並與研究者就教學現場實際發生問題進行討論，提出適切見解，使研究更為完善。在資料分析時，協助檢驗原案分析的適當性，共同進行三角校正使資料的詮釋更加客觀。
- (三) 參與教師：2位，皆為數學教師，僅提供對於識讀文本在閱讀上的意見，並未參與文本設計與教學研究。

(四) 參與學生：本研究採便利取樣，以研究者任教的北部公立高中的國中部一年級學生 (歷時 109、110、111 學年的三屆學生) 為參與對象。分數識讀文本亦歷經三屆不同七年級學生教學實驗與文本修正，各屆人數分佈情形如表 18。在 109 學期結束時，採自願參與的 6 名學生進行深入錄影晤談，編號分別為 S10901 (女)、S10902 (男)、S10903(女)、S10904 (女)、S10905 (男)、S10906 (女) (編號說明：S10901 代表 109 學年度序號 1 的學生，其餘以此類推)，訪談問卷如附件八。

表 18

109、110、111 學年參與「數學識讀文本」教材實驗學生分布一覽表

年度	參與實驗 班級數	參與實驗學生 總人數	男生人數	女生人數	參與教材實驗 教師
109	6	126	66	60	研究者
110	4	101	51	50	
111	4	91	58	33	

學生來源皆為新北市三峽區某市立高中之七年級學生，由同一位數學教師 (研究者) 進行識讀文本教學實驗。研究對象皆為 S 型常態編班，每週 5 節的數學課，唯實驗組學生依據負數文本內容安排 4 週，進行每週 1 節的識讀文本閱讀。

三、 研究對象

研究二的研究對象是依據 ADDIE 發展設計流程所設計的「分數識讀文本」，內容共有三個單元，分別是「分數的意義」、「單位分數」、「分數的乘除」。基於本研究乃聚焦於識讀文本設計歷程，故採質性詮釋文本設計流程與可行性。識讀文本皆透過教學、教師回饋、學生回饋、以及專家指導試行三年，包含內容、排版、與單元份量等的修正，文本內容經排版修正、難易度修減、活動時間考量，以及文字精簡表達等因素，逐年修正，最後完稿內容如附件三、四、五。

四、 研究工具

研究二之研究工具有：分數概念檢核卷、數學識能評量規準、半結構訪談問卷、執行評量摘要表、學習單，以及學習日誌。分別說明如下：

(一) 分數概念檢核卷

表 19 呈現分數概念檢核內容雙向細目分佈，檢核命題係以研究者的教學經驗為命題的出發點，目的在做為文本設計內容回饋的參考價值，並和數學教育專家、有經驗的教師共同檢視並加以修正，使其具有專家效度，檢核卷內容參見附件八。

表 19

分數概念檢核內容雙向細目表

分數概念	分數的意義(A)	單位分數(B)	分數的乘除(C)
題號	二-(1)、二-(3)、三-(2)、四、五、七	— -(1)、— -(2)	— -(3)、二-(2)、三-(1)、六-(1)、六-(2)

(二) 數學識能評量規準

此規準與第一節之「識能規準」相同，做為文本設計時「知行識」向度的準則，故不在此贅述。

(三) 半結構訪談問題

在半結構訪談問卷中，加入「分數概念檢核卷」測驗問題中的 A、C 二類中，各選取兩題即 A (四、五)、C (二-(2)、三-(1))，當作訪談問題並訪談了解學生對於文本設計的感受進行學生質性錄音訪談。此外，因為單位分數學習有部分成果為幾何創作發表，故亦參酌實體成果做為識讀文本修正參考依據，訪談問卷內容可參閱附件九。

(四) 執行評量摘要表

「執行評量摘要表」目的在於檢核識讀文本設計是否具有可閱讀性、閱讀量的恰當性、用詞遣字等的設計、以及識讀文本對於預期實踐之「知行識」向度內容等成效探究，而檢核流程如表 20 說明。

表 20

識讀文本分數單元「執行評量摘要表」

執行目標	1. 分數的意義，內容有：分數、有理數除法、分數與小數，4 頁 2. 單位分數，內容有：單位分數，4 頁 3. 分數的乘除，內容有：分數的乘法、分數的除法，4 頁
預期目標	1. 在三週內完成分數單元學習 2. 相關概念：除式非分式、有理數除法、帶分數的轉換、單位分數、分數乘法、乘除互逆、分數的除法、檢核學習單與隨堂練習的正確性
探究落差原因	1. 透過半結構問卷，晤訪學習者對文本的閱讀感受程度 2. 與參與者教師溝通文本內容的適當性，以及可使用之輔助教學媒體 3. 透過單元評量，觀察文本內容用詞遣句的恰當性
修正方式	1. 與專家請教溝通與指正 2. 於隔年的文本中增補、修正、或刪除

(五) 學習單

學習單並非每一個單元都有，乃研究者視單元內容而設計，以分數識讀文本為例，僅針對單位分數設計有學習單。

(六) 學習日誌

學生每人一本學習日誌小本，主要針對每個單元學習心得書寫於日誌內，以分數概念學習為例，研究者以相關之分數學習心得回饋做為質性分析資料。

五、資料收集與分析

研究二之分析資料為質性資料詮釋。主要在實驗對象於試行識讀文本教學後之逐年相關回饋資料的分析：在教師方面，與實際進場參與教學的二位現場教師 (109 年) 於分數單元結束後進行訪談，做為教學回饋；學生方面則是在施行課程的學期結束之後採取立意抽樣，從任教的三個班級中分別請各班導師由數學成績中抽取 2 名中上成績，1 名中下成績的學生進行訪談 (因為訪談時間在期末最後一天，為不影響班務運作，故由導師指派時間上較能配合的學生)，以下則為資料收集方式與處理說明。

(一) 半結構式問卷個別訪談錄影錄音

在 109 學年的教學活動結束後，採自願參與問卷調查，訪談內容主要為學生對識讀文本的可讀性，如：識讀文本難易度、文本內容量的學習負荷、排版的可閱讀性、以及文本內容喜好度等。選取 6 名學生且意願高者，每人大約 15 到 20 分

鐘的一對一半結構式晤談，由研究者設計半結構式問卷提問，進行全程訪談錄影。訪談內容與問卷內容收集之資料，提供研究者反思及文本設計反省改進主之佐證。研究者對於訪談資料建檔並謄打成逐字稿。

(二) 原案資料編碼

各種原案資料編碼所代表之意義舉例說明如下：

T 研：代表研究者。

T01 訪：代表 1 號教師的教學後訪談。

S10901 晤：代表 109 學年序號 1 學生的晤談內容。

S10902 誌：代表 109 學年序號 2 學生的學習日誌內容。

S11003 檢：代表 110 學年序號 3 學生的檢核卷內容。

S11104 習：代表 111 學年序號 5 學生的學習單內容。

S11105 果：代表 111 學年序號 6 學生的學習成果表現。

S11106 課：代表 111 學年序號 7 學生的上課表現。

本研究所蒐集之資料有教師觀察，學生學習單、數學日誌等，從不同的向度做資料多元的蒐集，做為資料的三角校正。例如：

(1) 上課對話一 (利用單位分數做乘法運算)

T 研： 可以說明為什麼 $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$ 就是「分母乘分母，分子乘分子」嗎？

S11101 課： 這裡有寫呀 (手指文本說明處)！

T 研： 你可以解釋一下嗎？

S11101 課： 因為 $\frac{2}{3}$ 就是 $2 \times \frac{1}{3}$ ， $\frac{7}{8}$ 就是 $7 \times \frac{1}{8}$ 然後就得到 $\frac{14}{24}$ ，也可以再約分啦。

T 研： 那這樣最後答案會是多少？

S11101 課： 那就是 $\frac{7}{12}$ 。

再利用「分數概念檢核表」核證，S10715 針對第一一(2)題目 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{1}{7} \times 3 \times \frac{1}{5}$ 可以回答正確，即表示文本內容敘述學習者已掌握分數相乘原理的理解。

(2) 上課對話二 (將二條餅乾平分給三個人的活動)

T 研： 這看起來沒有平分，可不可以說清楚一點！

S11002課： 因為太短不好分，就是每人要平分，那就每條各三分之一呀。

T 研： 你有沒有看一下其他組的分法？

S11002課： 有呀，但我覺得我的比較簡單。

然後在學習日誌中，針對 $\frac{8}{9}$ 可以分成 $\frac{32}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$ ，藉以輔助說明對於一般分數可以利用單位分數的多元表徵以及擴分能力的熟練。

(三) 質性資料分析

對於學生的調查問卷、訪談等文件資料，採取三角校正法驗證質性資料的一致性。同時將所蒐集到的質性資料 (包括錄音檔、半結構式晤談紀錄逐字稿等)，經由研究者將資料內容依照時間的順序先後排列並歸類編碼，並建立資料代碼。經由反覆閱讀、檢視，對原始資料作有意義的分析後，並依據其上課表現與學習日誌等敘述，相互比較詮釋及佐證以減少研究發現的偏差。

六、 研究倫理審查

本研究涉及學生的部分，皆通過國立臺灣大學行為與社會科學研究倫理委員會，審查核可證明。計畫名稱一：數學識讀文本研究——以發展七年級的閱讀文本策略為例。倫委會案號：202005ES035；計畫名稱二：從「概念譬喻」觀點發展數學識讀文本之研究。倫委會案號：202105ES055。

研究三 識讀文本實徵研究

本研究雖已完成七年級全學年的數學識讀文本開發，然基於七年級的學習者在負數與分數的數學素養上仍有可以補充或銜接之處，亦想探究此識讀文本之成效，故本研究三選擇探究負數的識讀文本進行實徵研究，預期回答研究問題三之「數學識讀文本」達到之「知行識」成效。研究三設計測驗的三項教學目標為負數在數線上的位置標示、加減負數的二元運算，以及「取相反數」的單元運算。同時，仍以本研究所發展之「數學識能評量規準」(陳玉芬、單維彰，2022)，做為檢核學生在「知行識」向度所到達的學習層次。

一、 研究對象

研究三之研究對象為新北市立某所公立高中 110 學年度國中部的七年級學生，實驗組學生 91 人 (4 個班，男 58 人、女 33 人)，對照組為 45 人 (2 個班，男 29 人、女 16 人)，合計 136 名學生，二組皆為 S 型常態編班，兩組數學課程每週皆為 5 節課，每節 45 分鐘，為期四週。本研究採方便性取樣，即由研究者 (數學教師 A) 之授課年級為實驗組，實施每週 1 節的「負數識讀文本」教學，其餘 4 節數學課則由其他的數學教師 C 或 教師 D 教學，彼此獨立進行互不干擾；對照組的每週 5 節課皆使用一般教科書教學 (數學教師 B)，未介入任何識讀文本閱讀課程的干預教學，維持 5 節正常的負數課程學習。研究三僅針對數學師 A 授課班級列入研究對象，如表 21 (資料引自陳玉芬等，2023)。

表 21
負數教學實徵研究對象基本資料

組別	相關班級	數學課節數／週	任課教師	參與人數
實驗組	4 個班	4 節數學課 (使用教科書)	其中 2 班的 4 節數學 課為數學教師 C、另 外 2 班的 4 節數學課 為數學教師 D	男 58 人 女 33 人
		1 節彈性閱讀課 (使用識讀文本)	4 個班的 1 節彈性閱讀 課，皆為數學教師 A (研究者)	
對照組	2 個班	5 節數學課 (使用教科書)	5 節數學課皆為數學教 師 B	男 29 人 女 16 人

二、 研究工具

研究三旨在探討識讀文本施行後實驗組對負數理解之相關素養之改變，研究工具有四種，依序是：「負數識讀文本」、「負數素養評量通則」、以及「負數素養測驗測 (前、後測，分別如附件六、附件七)」。「負數識讀文本」為研究三實驗組之主要教學工具；「負數素養評量通則」則是評量「知行識」向度表現的依據與規準；「前測」與「後測」則是根據欲達成預期目標所設計之評量工具。

(一) 負數識讀文本

「數學識讀文本」乃研究者自 2020 年起研發，經由專家指導，歷經三年試教並根據學習者與訪問參與教師之回饋再進行修正與改善，研究三之識讀文本則為修訂後之第三版內容。以下針對「負數識讀文本」單元，分別示例說明預期達到「知行識」不同層次之設計內容，文本的設計則以「概念譬喻」與「視覺操作」為主要策略。

(1) 知能文本設計

基於剛進入國中階段的七年級生，尚未適應文字較多的數學文本，故不適合整篇文本由學生自行閱讀，因此在此階段先由教師以段落式引導閱讀，強調文本中有黑體字之部分，透過概念譬喻「物質」與「性質」的對比，讓學生感受為何負數是比空無還小的數，如圖 27。此譬喻是學生日常生活中確實能感受之情境，也做為負數抽象概念的具體感受。

圖 27

知 1 層次的概念譬喻

比空無還小的數

♠ 小時候所知的正數或零，只能用來計算「物質」的量，例如有多長？有多重？有幾人？有多少？等等的問題。這些「物質」量，最少就是「沒有」，不能比「沒有」更少。例如一條繩子不能比 0 公尺更短，一張紙不能比 0 公克更輕，一間教室裡的人數不能比 0 人更少。

到國中，我們長大了，要遭遇「性質」的量。「性質」不像「物質」，它不是具體的東西。例如冷熱，它是相對的性質，並不會「沒有」冷熱。用攝氏溫標 (C) 來測量冷熱時，所得的溫度可能大於



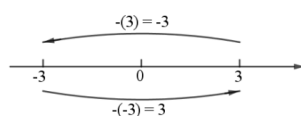
接著，圖 28 亦是強調連結符號意義之目的，意欲透過「負即相反」之概念譬喻，再輔之以視覺的數線操作變化，讓學習者印證「負負得正」的具體結果，而不是口訣的背誦，同時也透過觀察圖形變化，間接引入單元符號所呈現的對稱性。讓學生開始反思當讀音為「負」或「減」時的概念差異，預期達到知 2 層次的連結反思概念。

圖 28

知 2 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」

♠ 「負」即「相反」

在數線上，「負」就是「相反」的意思。就像與原點 0 的距離相等的兩個數，互為「相反數」。如下圖， $-(3)$ 唸作「負 3」，是 3 的相反數，簡記作 -3 。而 $-(-3)$ 是 -3 的相反數，那就是 3。所以 $-(-3) = 3$ 不過就是「相反再相反就還原」，就好像「向後轉」再「向後轉」就回到原來的方向，也就所謂的「負負得正」。



(2) 技能文本設計

圖 29 強調「負非減」，由最基本的負數加法開始，因為學生對於正數在數線上的操作是熟悉且自然的，接著補充說正與負的相反特性，「加」是朝箭頭方向前進，所以「減」自然可以理解是朝箭頭的反方向，再次觀察數線操作後的變化，以及「減」與「負」的差異，預期達到行 1 層次。

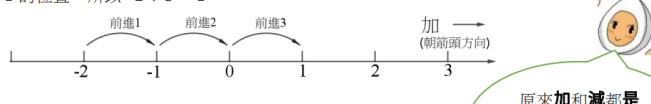
圖 29
行 1 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」

♥「負」非「減」

因為「負」和「減」恰好使用了同樣的符號「-」，害得很多同學剛開始學「負數」的時候，以為「負 1」和「減 1」是一樣的。不！「負」是代表一個數的屬性，例如「負 1」代表在原點 0 的左邊 1 個單位的「位置」，但是「減」卻是代表兩個數的運算。比方說，「加 1」是朝數線的箭頭方向前進 1 個單位，而「減 1」是朝數線的「沒箭頭方向」前進 1 個單位。

(1) $(-2) + 3$ (妳/你會讀此算式嗎？注意 $-2+3$ 和 $(-2)+3$ 是同樣意思的算式。)

數線上的動作：從運算元 -2 在數線上的位置開始，朝數線箭頭方向前進 3 單位，到達 1 的位置，所以 $-2 + 3 = 1$ 。



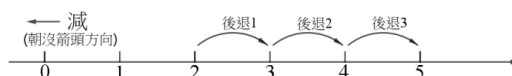
在熟悉行 1 層次的符號化簡操作與類題演練之後， $(-3) - (-2)$ 即屬於混合運算操作，在本階段研究者預期學習者必須要能熟練處理負與減的化簡，以及負數的四則運算二種操作能力，方能達到行 2 層次的目標，如圖 30。

圖 30
行 2 層次的「概念譬喻」與「視覺操作」

(4) $2 - (-3)$ (注意，因為 $--$ 接連在一起不容易讀，所以不寫 $2- -3$ 而寫 $2-(-3)$)

這個算式讀作「2 減負 3」，代表著「從 2 的位置朝沒箭頭方向 (這是「減」的意義)

倒退 (這是「負」的意義) 3 個單位」到達 5，所以 $2 - (-3) = 5$ 。



(原來：「-」號與「-」號可以化簡成一個「+」號)

(3) 識能文本設計

本研究之識能規準之識 1 層次，其中之一即是可以運用所習得之數學知識解決生活中的應用問題。如圖 31 所示，學生若在 (1) 式中回答 $20 + 25$ 或 $-25 - 20$ 都算正確，只是層次不同，若回答 $20 + 25$ 屬行 1；若回答 $-25 - 20$ 表示有意識到利用負數做減法運算的連結概念，且回答正確故屬行 2。此外，若能在 (2) 式寫出答案中，寫明「下降」則表示對於「負號(-)」此符號已產生意義，屬「識 1」。

圖 31

識 1 層次的符號意義與解決問題能力

2. 疫苗裝瓶之後，從攝氏 25 度急速冷凍到零下 25 度。它上升還是下降了幾度？

(1) 寫出數學算式並計算出答案。

(2) 寫答案。（注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。）

接著圖 32，透過網路上常見的數學問題，引導學生利用正負號表徵或口語表達，以三兄弟、住宿老闆、服務生等彼此之間的金額流向，說明自己的觀點或是問題的矛盾與不合理之處，以培養識 2 層次。

圖 32

識 2 層次的論述表徵

◆ 「負」的應用：消失的一元

友直、友諒、友多聞三兄弟到旅館住宿，服務生說要 30 元，所以他們每人出 10 元來付住宿費。剛好今天旅館特價優惠，住宿費減價，只要 25 元，於是老闆叫服務生把 5 塊錢找還給三位旅客。當服務生退還 5 塊錢給三兄弟時，友直建議付 2 元小費給服務生，剩下的 3 元三兄弟剛好可以平分，大家也覺得贊成就都同意了。到了晚上，友諒卻覺得很奇怪，他說消失了 1 元。他的理由如下。

三人各出 10 元減去服務生還給他們一人 1 元，等於三人各出 9 元。

所以 $9 \text{元} \times 3 \text{人} + \text{給服務生的 } 2 \text{元} = 27 + 2 = 29 \text{元}$ 。

怎麼不是最初的 30 元呢？還有 1 塊錢去哪了呢？

(二) 負數素養評量通則

表 22 所述之評量通則即延續陳玉芬、單維彰 (2022) 所述之「數學識能評量規準」之準則說明 (見表 15)，基於本文目的在於檢核學生負數識能學習成效，故本研究即依據表 15「知行識評量規準」中的「知行識」向度與層次，針對「負數概念應檢核之學習表現」做說明，而表 22 亦增加「知能、技能、識能規準」敘述，以及知 0、技 0、識 0 等級，以強調未達知 1、技 1、識 1 等級。

表 22

負數學習評量通則

知能規準

知 0：未達知 1 層次。

知 1：能記憶、辨識、指認負數符號及其在數線上的位置；

能以「正、負」表示生活中性質相反的量。

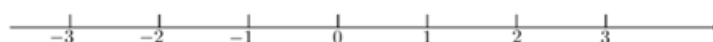
知 2：能正確聽說讀寫正負與加減混合的數學式；

能判斷單元或二元運算的正負性；

能將正負與加減混合的數學式轉換為所需的正數加減算式。

以上指標可包含絕大多數適齡學生能熟練操作的正整數計算。

- 「知 1」層次
- (1) 知道負數在數線上 0 的左邊
 - (2) 溫度零下 10 度用 -10 表示
 - (3) 能標示：請在數線上標示出 -1 、 -2 的位置



- 「知 2」層次
- (1) $3 - (-2)$ 知道讀作：3 減負 2
 - (2) $-(-2) = 2$
 - (3) 負數包含了負整數、負分數、負小數

技能規準

行 0：未達行 1 層次。

行 1：能執行單步驟正負整數加減運算且不含減負者或能比較負數大小。

行 2：能執行減負運算；能執行多步驟正負整數的加減混合運算。

- 「行 1」層次
- 能算出： $-3 + 2$ 的值並無誤

- 「行 2」層次
- (1) 能算出： $-3 - (-2)$ 的值並無誤
 - (2) 能對 $-3 - 5 - 7$ 進行化簡為 $-(3 + 5 + 7)$ 並計算正確

識能規準

識 0：未達識 1 層次。

識 1：能將正負數適當對應於情境中的數量；

能將情境問題轉換為正負混合的算式。

識 2：能為正負混合的加減算式賦予符合經驗的意義；

能以數學語句說明自己的論點；

可以判斷解題的優劣，欣賞數學的價值。

- 「識 1」層次
- 舉例說明一個生活中用 -15 表示的情境。

- 「識 2」層次
- 剛從遠洋捕獲的鮭魚在送上岸之後，需立刻從攝氏 25 度急速冷凍到零下 20 度。
- 問：它上升還是下降了幾度？

(1) 根據題意寫出數學算式。(不必寫出單位。)(5%)

(2) 計算出答案並寫出答案。(注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。)(5%)

(改自陳玉芬等，2023，頁 43)

(三) 負數素養測驗

為檢測學生的負數素養是否有所差異，負數素養測驗之設計有前測與後測，負數前、後測內容如附件六、七。前、後測皆分為兩個部分，第一部分主要在分析學習者(實驗組與對照組)在教學前與教學後，對「負數想法」與「負號認識」的文字描述，譬如說：「你認為負數是什麼？」。研究者依據回饋資訊及文字描述分為「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」5種等級，分類等級亦參酌心測中心之「標準本位評量」，如表 14 之理解層次，分別以 5 至 1 分對應，如表 23。舉例來說：其中最高等級 5 為「識能理解」，表示可以完整說明負數概念並可表達自己想法，如：負號包含一元運算、二元運算、或具有對稱等相反數概念；次高等級 4 則是「一般理解」，算是對於負數概念有一般性的正確基本認識，比方說：負就是不夠、扣除或在數線原點的左邊等屬之；依此類推，「錯誤理解」則指已懂得使用數學概念說明，只是理解不夠正確，屬等級 3；「字詞誤解」則是僅依照負數的字面解釋來說明，並無察覺任何的數學概念，屬等級 2；「無法表達」則代表對於負數概念完全無法理解，屬等級 1 (陳玉芬等，2023)。然後依學習者文字回饋做為負數素養表現的依據，再與後測結果進行卡方檢定的前後測數據差異分析，檢核學習前後對於「負數的認識」之理解變化。

表 23

「負數的認識」理解分類表

理解分類	表述內容	等級
識能理解	性質符號／正數的相反數／相對概念／在數線的左邊／負非減／在原點 0 的左邊	5
一般理解	比 0 還小的數／小數減大數／減到不夠時／不是正數也不是負數	4
錯誤理解	不大不小的數／比 1 還小的數／不超過 1 的數／很小的數／除不盡的數／計算溫度／負整數／0 以下的整數／可以是正數也可以是負數	3
字詞誤解	就是一種數／不足/沒有東西還去借／負債／要花錢/一種不好的數字／負面的數字／「-」號要加在前面數字裡／負數就是數學中的一員	2
無法表達	很難的數／不知道／空白	1

(引自陳玉芬等，2023，頁 44)

第二部分，前、後測皆為測驗題型，前測所有之題目設計皆與後測問題（預期目標）呼應，同時前測做為共變項，與後測進行共變項分析，做為回應問題二的研究根據。前、後測試題各題配分與題數不盡相同，試題設計依表 22 「負數學習評量通則」設計「知行識」三種向度類別。各分類的試題範例如表 24，試題內部一致性信度 Cronbach's α ：前測為 .80、後測為 .83。

表 24
負數素養知行識向度分類試題範例表

知行識 向度	試題範例說明	總題數 (前測/後測)
知向度	聽力測驗：寫出你所聽到的式子表示法 (1) $(-3) - 1$ (2) $2 - (-7)$	10/11
行向度	計算 $-2 - 9 - 7$	7/6
識向度	剛從遠洋捕獲的鮭魚在送上岸之後，需立刻從攝氏 25 度急速冷凍到零下 20 度。問：它上升還是下降了幾度？(1) 根據題意寫出數學算式。(不必寫出單位。)	7/6

試卷完成後再與另外二位專家針對試題部分，依據「知行識評量規準」進行「知行識」向度題目信度考量，其採用評分員信度法檢視評分者間同意度，若有不相同者，仍經由研究者說明或透過專家解說尋求最大共識，評分者與計算方式皆與本章第一節之信度檢定標準相同，故不在此贅述，僅呈現表 25 之信度結果。

表 25
「知行識」向度分類信度結果

評分員	甲	乙
研究者	.875	.750
甲		.853

平均相互同意值 $P \doteq .826$ (約至三位小數) 信度 $R \doteq .934$ (約至三位小數)

三、資料收集與分析

研究三採以量化資料為主，質性資料為輔的方式分析。資料分析亦分為兩個部分。第一部分是將前、後測的題目中，針對「負數的認識」的文字回饋，編碼歸類為「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」5 種等級後，因其前後測為相依資料，故採用 McNemar-Bowkert 法檢定實驗組與對照組兩組學生各自在前後測分類中是否有顯著改變。表 26 為學習者在前、後測中針對「負數的認識」描述文字之示例說明。

表 26

「負數的認識」前後測表現差異示例說明

前測對負數之識能表現	前後測對負數之識能表現
<p>五、你認為負數是什麼？</p> <p>A: 不超過1的數字</p>	<p>學過「閱讀數界」中對負數的描述後，現在的你會如何說明負數是什麼？</p> <p>負數不是正數，是一個比0小的數，負非減它們只是符號相同意思卻不同，一個是運算符號(減)，一個是性質符號(負)。</p>
<p>說明：S10717 學生在前測時，只有單純從字面意思回答對負數的認識，但後測的表現，除了可以回答正確，也能寫出「(負號)符號相同意思卻不同」做輔助說明，同時描述的文字也更豐富完整。</p>	

後測第二部分則是針對實驗組與對照組之前測資料進行獨立樣本 t 檢定，檢視實驗組與對照組在教學前，其負數概念表現是否有所差異？另外，研究三使用多變量共變異數分析(Multivariate analysis of covariance, MANCOVA)，進行將前測分數做為本研究控制變因，分析後測的「知行識」三向度的兩組表現是否達顯著差異。

四、 研究倫理審查

本研究涉及學生的部分，皆通過國立臺灣大學行為與社會科學研究倫理委員會，審查核可證明。計畫名稱一：數學識讀文本研究——以發展七年級的閱讀文本策略為例。倫委會案號：202005ES035；計畫名稱二：從「概念譬喻」觀點發展數學識讀文本之研究。倫委會案號：202105ES055

第肆章 研究結果

本研究有三個研究主題，本節針對此三個研究結果以三個小節分述之。第一節陳述研究一結果，三版數學教材的「知行識」內涵；第二節陳述研究二結果，分數識讀文本發展歷程設計；第三節陳述研究三結果，負數識讀文本實徵研究。

研究一 三版數學教材的「知行識」內涵

研究一針對三版教材內容在「知行識」各向度的內涵之研究結果有四，分別說明如下：一、教材內容分佈有趨同現象；二、「識」向度內容有獨立布題趨勢；三、「識」向度內容偏少；四、教材設計觀點影響布題形式。

一、三版本之「知行識」向度內容分佈有趨同現象

表 27 為各版本教材在「負數」、「分數」單元內出現的相關統計描述。其中甲版分析題總數 70 題、乙版 78 題、以及丙版 67 題。三家版本的編排中，「知」向度內容占比皆在 70% 以上，其中最高者為乙版 78.2%；「行」向度占比皆在 62% 以上，最高者為丙版 76.1%；「識」向度占比皆在 25% 以下，最高者為乙版 23.1%。雖然各版比例有所差異，然依據卡方檢定，得 $\chi^2 = 5.987$ ， $p > .05$ 未達顯著水準，說明「知行識」三個向度的題目分佈比例並未因版本的不同而有所差異。也可以說三版本教材內容之對於「知行識」各向度布題的設計比例大同小異。

表 27

「負數」與「分數」教材在「知行識」向度的敘述統計

向度	知		行		識	
	個數	(%)	個數	(%)	個數	(%)
甲版 (70)	50	71.4	49	70.0	16	22.9
乙版 (78)	61	78.2	49	62.8	18	23.1
丙版 (67)	47	70.1	51	76.1	9	13.4

二、三版本之「識」向度內容有獨立布題趨勢

在教材內容鋪陳中，三版本皆有獨立區塊 (即學習活動)，依其區塊名稱皆可理解主要目的在於探索思考，亦可說應較具有識能啟發：甲版有「探索活動」、「迷思診察」、「素養花路米」；乙版有「學習時光機」、「動動腦」、「數學好好玩」；以及丙版有「碳足跡」、「自我挑戰」、「趣學數學」等。若獨立區塊不列入計算，三版「知行識」各向度內容所占比如表 28，其中「知」向度內容佔比最高者仍為乙版 86.4%；「行」

向度最高者仍為丙版 82.1%；「識」向度最高者亦為乙版為 16.7%。相較於表 27，乙版「知」向度百分比提高了 8.2%、丙版「行」向度提高了 6%、乙版「識」向度則減少了 6.4%，此結果說明各版的識向度設計出現於獨立區塊的比例較高。

表 28

「負數」與「分數」教材在「知行識」向度的敘述統計(不含獨立區塊)

向度	知		行		識	
	個數	(%)	個數	(%)	個數	(%)
版本 (N)						
甲版 (58)	48	82.8	45	77.6	9	15.5
乙版 (66)	57	86.4	47	71.2	11	16.7
丙版 (56)	42	75.0	46	82.1	2	3.6

三、三版本之「識」向度內容偏少

以分數單元為例，圖 33、34、35 為三版本各小概念之知能、技能、識能含量比較圖。像在圖 33 中，幾乎每個小概念都有知能鋪陳，僅分數應用問題與計算機的應用二個小概念中沒有知能鋪陳；圖 34 各版本的小概念中沒有技能鋪陳部分的題數，甲、乙、丙三版依序只有 2、4、1 題；至於圖 35 則明顯可看出只有兩個版本在 2 個小概念上有安排識能的鋪陳，此結果說明各版本在知能、技能的教學頗為完整，識能相對不足。

圖 33

三個版本分數單元小概念之知能鋪陳樣式比較

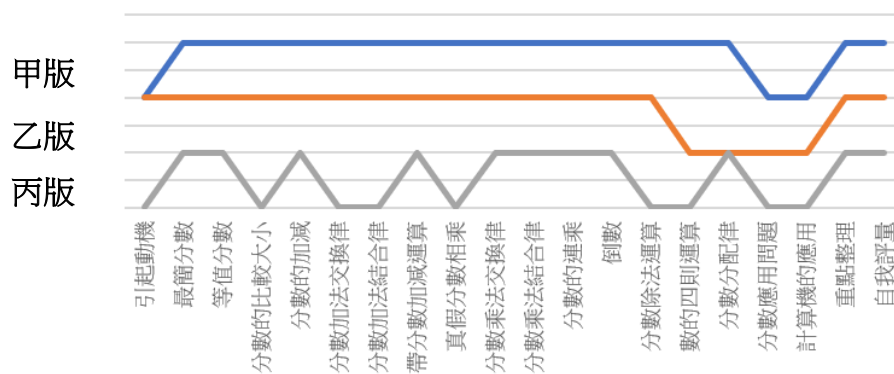


圖 34
三個版本分數單元小概念之技能鋪陳樣式比較

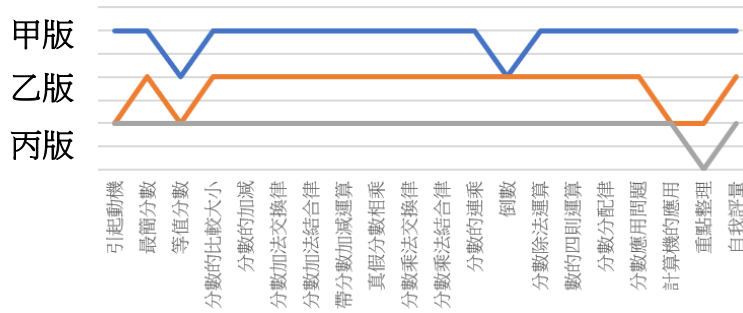
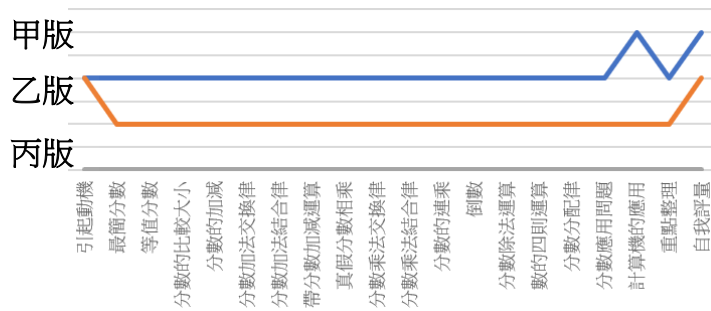


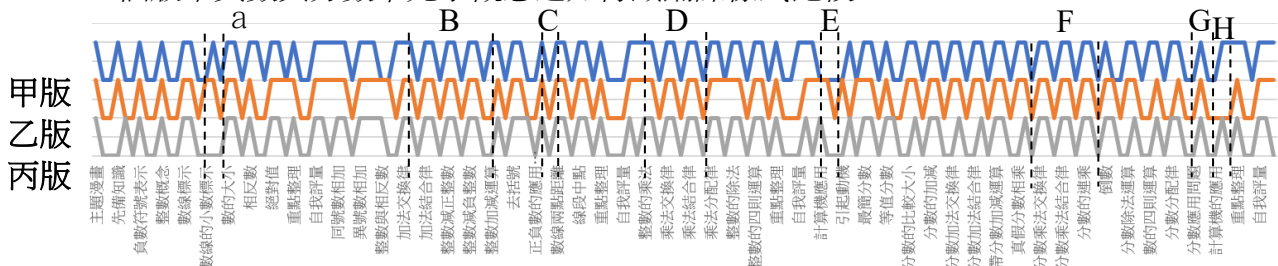
圖 35
三個版本分數單元小概念之識能鋪陳樣式比較



四、教材設計觀點影響布題形式

首先說明分析模型的分析策略。在研究中，將統計數據做折線圖比較三版本負數與分數各小概念在「知行識」向度的分布趨勢。舉例來說，以每一個小概念為一個事件，並將是否涵蓋知能、技能、識能設定為 1 或 0，若有涵蓋為 1，無涵蓋為 0，故(知、行、識) 對應值若為 (1, 0, 0)，即代表此小概念中有知能概念，但沒有技能與識能概念。又若有三個小概念，其(知、行、識) 對應值分別為 (1, 0, 0)、(1, 1, 0)、(1, 1, 1)，那麼所繪製出的折線圖如 $\overset{\textcircled{1}}{\underset{\textcircled{2}}{\underset{\textcircled{3}}{\text{VV}}}}$ 其三組對應值分別如 ①區、②區、③區。

圖 36
三個版本負數與分數單元小概念之知行識鋪陳樣式比較

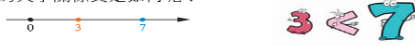


前圖 36 為三個版本所有小概念 (每一個事件) 的「知行識」鋪陳樣式比較，趨勢差異不大，由整個折線圖觀之，乙版較寬的平緩區段相對較多段，顯示該版本在設計每個小概念時，較有兼顧知行識概念的面向，即知、行、識對應值皆為 1。而前圖 36 中虛線 A 區段為各版本在「數線的小數標示」的小概念中，對於知能、技能、識能的布題方式完全不同：丙版為 (0, 0, 0)，說明沒有此小概念的設計內容；乙版為知能、技能鋪陳 (1, 1, 0)，教材內容參見本文前圖 9 處說明，雖有探索活動，但仍止於知能與技能的鋪陳；甲版著重於技能鋪陳 (0, 1, 0)，教材內容如圖 37 說明，僅於首段說明數線上標示特徵右邊為正，左邊為負，小數點的標示則視為小學已習得，然後於隨堂練習中鋪陳即結束。

圖 37

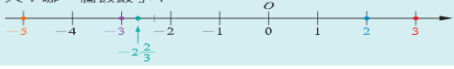
甲版小數在數線上的標示之教材鋪陳

國小時我們學過比較兩個正數的大小，例如 7 比 3 大，記為 $7 > 3$ ，也可記為 $3 < 7$ ；同時，由 7 與 3 在數線上的位置可知，0 的右邊代表正數，愈往右邊的正數愈大。但是負數之間的大小關係又是如何呢？



例 4 利用數線比較數的大小

- 在數線上標示出 -5 與 -3 這兩個數，並比較他們的大小。
- 下圖是數線上代表 -5、-3、2、 $-2\frac{2}{3}$ 、3 各數的點，哪一個數最大？哪一個數最小？



解 1

解 2

隨堂練習

在數線上標示出 2、-1、-3.75、 $2\frac{4}{5}$ 這四個數，並判斷哪一個數最大？哪一個數最小？

解

另外，對於核心素養所強調的計算機應用 (前圖 36 虛線 E、H 區段)，三家版本之設計亦是迥然不同。甲、乙、丙三版在負數單元的計算機應用分別為 (0, 0, 0)、(1, 1, 0)、(1, 0, 0)，分數單元分別為 (0, 1, 1)、(0, 0, 0)、(0, 1, 0)，也可以說在每一個單元中，三家版本對於計算機的應用教導，想要引導的策略不同，各版在負數與分數的鋪陳內容參考圖 38、39、40、41。

儘管各版本「知行識」向度的布題有趨同現象，此可能基於長期市場需求之彼此學習，但以現今 108 課綱強調之科技 (計算機) 融入觀之，依據本研究之分析模型分析，

顯示各版著重觀點卻完全不同，亦或可推論：教材設計觀點仍為影響內容編排形式之因素之一。

圖 38
乙版負數的計算機應用之教材鋪陳



圖 39
丙版負數的計算機應用之教材鋪陳

3 正負數加減混合運算

正負數的加減
對於正負數加減，我們可使用計算機協助計算或驗算，以下介紹計算機的基本功能與操作方法。

1. 計算機的基本功能：

- 按下 ON 可開啟電源； AC 可刪除螢幕顯示的數值，並重新執行計算。
- 計算機上的按鍵有數字 0 到 9、小數點、加減乘除及功能鍵等，其中 = 鍵用於顯示計算結果。
- 按下 +/- 可更改螢幕中數值的正負號，例如：輸入 5 +/- ，則顯示 -5 。

2. 計算機操作：

算式	按法	螢幕顯示
(1) $(-9)+(-21)$	9 +/- + 21 =	-30
(2) $(-23.5)-56.3$	23.5 +/- - 56.3 =	-79.8
(3) $(-25)-(-3)$	25 +/- - 3 =	-22

圖 40
甲版分數的計算機應用之教材鋪陳

探索活動

如何用計算機計算分數的四則運算

請你使用計算機來計算 $(2 \times 4 - 3 \times 3) \times \frac{2}{3} \times (322 - 103) = ?$
寫出你遇到的困難，並將得到的答案與同學討論是否正確？

圖 41
丙版分數的計算機應用之教材鋪陳

使用計算機將分數轉換成小數的方法如下：

以 $-\frac{6}{25}$ 為例，輸入 6 +/- \div 25 = ，螢幕顯示 -0.24 ，
又 $-\frac{6}{25} = -\frac{6}{25}$ ，所以輸入 6 +/- \div 25 = ，螢幕也顯示 -0.24 。

再觀察三個版本的負數或分數的四則運算，其鋪陳方式卻有相當的一致性，皆為告知計算概念後即聚焦於技能練習，對應值皆為 (1, 1, 0)，如前圖 36 之 B、D、F 區段。但值得觀注的是，負數與分數的應用題，其鋪陳方式雖為應用題，但仍為技能的演練 (0, 1, 0)，如前圖 36 之 C、G 區段，其內容並未有更多知識連結。或可推論在四則運算部分，教材設計觀點普遍皆有偏重於技能演練的布題需求。

此外，如圖 42 雖為探索活動，但僅為標示數線上的位置以及判斷值是否相等，當屬技能內涵；錯誤(或迷思)診察內容中並未給予陳述的機會，則屬知能內涵。圖 43 的數學好好玩，目的在於等值分數判斷與擴分演練，僅屬知能與技能的熟練機會。

圖 42

甲版獨立區塊之小概念分析

探索活動

解 分解帶分數

1. 請在數線上標出 $-2\frac{1}{3}$ 。

2. 下列哪些值與 $-2\frac{1}{3}$ 相等？
甲： $-2 - \frac{1}{3}$ 乙： $-2 + \frac{1}{3}$ 丙： $-(2 + \frac{1}{3})$

錯誤診療

小明和小美針對兩個數 a 、 b 與它們的絕對值說法如下：

① 小明：兩個數 a 、 b ，當 $|a| < |b|$ 時， $a < b$ 。
② 小美：兩個數 a 、 b ，當 $a < b$ 時， $|a| < |b|$ 。

解 請問下列選項何者正確？
(1) 只有小明正確 (2) 只有小美正確
(3) 2 人都正確 (4) 2 人都錯
答：_____。

圖 43

乙版獨立區塊之小概念分析

數 學 好 好 玩 數字迷宮

從入口處通過與 $\frac{12}{18}$ 相等的分數走到出口，並請將走過的地方依序用線連接起來。

Ans 入口 →

12	1	3	20	30	4
18	2	8	30	45	6
2	10	-4	0	-6	2
3	15	-6	-9	-9	8
3	4	-6	14	18	2
4	10	-9	21	27	-3
9	12	42	-12	-28	6
15	18	63	18	-42	9
7	4	-16	32	3	40
21	3	-24	48	10	66
20	1	25	48	96	22
36	4	75	72	144	33

→ 出口

同樣地，圖 44 丙版的分數單元獨立區塊，在趣學數學布題中使用半頁篇幅描述活動內容，仍為操作等值分數的判斷與計算，屬知能與技能的精熟練習。這些都說明各小概念或學習活動的設計形式皆受教材設計者的觀點而不同。

圖 44

丙版獨立區塊之小概念分析

趣學數學

本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

2 配合 2-3

有隻可愛的貓頭鷹藏在右邊的分數方格中，你看的到牠在哪裡嗎？

規則：

- 將 $\frac{1}{2}$ 的等值分數方格塗上顏色。
- 將 $-\frac{3}{5}$ 的等值分數方格塗上顏色。
- 將 $\frac{1}{4}$ 的等值分數方格塗上顏色。
- 將 $-\frac{1}{3}$ 的等值分數方格塗上顏色。

Hint：
每個步驟塗上不同顏色，會更容易發現囉！

$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{13}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{5}{13}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{11}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{8}{16}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$-\frac{6}{10}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{6}{12}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{20}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{4}{12}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

小結

上述分析發現，各家版本對於「知行識」向度的設計有趨同現象，有此現象或可理解，畢竟一綱多本已實行多年，各家相互學習其所長，致使得此結果實不意外。尤其在分析模型中，觀察出各版本在「識」向度的布題亦明顯偏少，且大部分皆另闢專區布題，此皆說明各版的趨同現象。但對於新融入的科技資訊(計算機應用)，各版本在「知行識」向度的設計又明顯不同，本研究認為此乃基於新議題，各家尚未相互學習，這些小概念或學習活動的設計形式，或可推論為教材設計者的觀點為何。此外，從各版獨立區的學習活動觀之，教材設計者對於識概念的認知仍有差異，雖然名稱有所不同但實質內涵或目的可以理解是讓學習者思考或探索的，只是有些活動目的雖然意在探索，仍流於知能與技能的培養。而教科書中的例題說明與隨堂練習，或是自我評量又大部分都聚焦於數學筆算能力的培養。

研究二 分數識讀文本實作設計發展歷程

研究二探究可行的識讀文本開發歷程。整體而言，研究者依循 ADDIE 教學設計模式做滾動修訂，在個別小概念的設計上，以分數單元為例，則採用「執行評量摘要表」(表 20) 做為檢核工具。本節分為三小節：一、在 ADDIE 第一階段開始循環之前(前圖 26)，文本設計所需執行的工作；二、識讀文本運用 ADDIE 模式的循環修訂實例，此小節著重於格式設計的歷程，主要說明版面格式、文本段落、文本可讀性、文本內容量、以及學習者對分數識讀文本之學習想法；三、同前，但此小節著重於分數單元「知行識」內容之設計，檢核達到預期「知行識」向度目標之歷程。第二、三小節皆依照「執行評量摘要表」實踐歷程的四個步驟：預期目標、執行過程、尋找落差原因，以及解決落差，進行文本的循環檢核與修訂。以下透過質性資料的詮釋，說明這是有效的文本開發模式，並說明分數單元識讀文本如何產生預期成效。

一、ADDIE 第一階段啟動

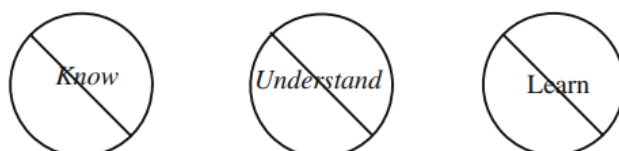
ADDIE 模式開始循環修訂之前，必須先啟動屬於第一階段的分析、設計、發展，才能開始後續的實施、評估與循環修訂。本小節描述這一階段的文本設計工作。

分析階段：書寫與編排。現有的數學文本(小學)中充滿很多概念說明不清之處，如要教旋轉角卻不談旋轉角的構成要素與方向性，或是一些專有名詞應能有精確的數學語言來說明，卻使用「像這樣……」，像這些科書中的疏忽就需要教師的特別說明

(秦麗花，2016)，同樣地在國中階段，教師也可能會習慣於使用一些文字來表達，看起來又似乎很直觀，例如：「知道 (know)」、「理解 (understand)」、「學習 (learn)」，但這是會產生實際上不可能實現的目標陳述，亦即在以成效為基礎的學習環境中，應避免使用這些字詞和類似的字詞，如圖 45 (Branch, 2009)。

圖 45

在學習環境中應避免使用的字詞



引自 Branch (2009)，頁 36

像數學教科書也會有這樣的隱憂，比方說：三家版本教科書中的分數運算單元，在處理分數相乘時，全部一致性地引入「國小曾學過正分數的乘法，方法如下：①將分母相乘當做新的分母；將分子相乘當做新的分子，這樣所得到的新分就是它們的乘積。②如果有某個數是帶分數，則先將此化成假分數，再用前述的方法相乘」這段話，隨後即緊接著即是例題演練，彷彿學生已都「知道」這些原由，學生也無法明確釐清「以整數的運算類推分數加法」、「等值分數的求法和分數的乘法混淆」及「無法將分數視為數線上的一個數值」等這些迷思概念(楊德清、洪素敏，2008)，像這些「分數意義」概念應予設計並澄清，而這些即為文本設定應學習的預期目標之一，並整理「執行一預期成效的指標」，找出未達成預期指標的原因。

分析階段：分數再教學。前面已經說明：有相當高比例的國小畢業生需要分數概念與四則運算的補救教學。因為國中生畢竟不是分數的初學者，而且學生此時畢竟比起初學的時候略為成熟，所以國中階段的補救教學不宜重教國小教材，這是識讀文本在分數單元想要達成的任務：找到一種有效的重新學習分數的教材教法。分析分數的數學本質與國小教科書的教學設計之後，研究者認為小學階段使用了過於多元的表徵，而且當時加諸於學生的認知負荷可能過高，導致部分學生的失敗。因此，研究者企圖以盡量單一的表徵與一致的操作原理，重建分數的概念與算則。分析的結論是：使用單位分數。所謂單位分數即分子是 1 的分數，例如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 都是單位分數。它們的性質是：把 m 個分母是 m 的單位分數相加起來，結果是 1 (前述 m 代表某正整數)。例

如： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 、 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 。也可以說單位分數是一般分數的基本組成元素，就像 1 做為自然數的基本元素概念。本研究設計之分數四則運算，即運用單位分數進行一致性合理的程序操作。所謂的程序性運算它是有結構性的，有時看似是概念的知識認識但實質確是程序操作的開始 (Hiebert & Lefevre, 1986)。換句話說，概念性知識與程序性操作彼此是相互關係，有時也是難以有清楚的界線，所以程序性的運算若能建立在根本的原理性上闡述，將會變得易於理解該如何 (how) 進行或為什麼 (why) 會如此了。

設計階段：程序性文本。在 ADDIE 概念架構中是確認想要執行的內容以及採用適當的方法，它包含了文本的可閱讀性，以及內容的設計。以分數單元為例，大部分屬於程序性文本，即如前文所述，文本設計之主要程序在於確定為程序文本的書寫策略，亦或是技能的文本設計，那麼此文本的描述即應聚焦於演算能力、規則的熟練以及解題的完成等主要特徵，並隨時監督進度執行的關鍵特徵。同時程序性文本亦關注計算的流暢性或是否具備了可遷移的能力、具備有意義的推論 (Wiggins & McTighe, 2014)，亦可做為呈現理解的一種表徵。所以文本的設計聚焦於「刻意的學習 (intentional learning)」策略，有目的地設計預期連結的概念，又如文本設計的預期目標在於融入可進行數學情意欣賞的價值，或是與結構性概念連結，舉例來說，單位分數源自於生活中「物件要均分」的情境，如何讓學習看到 $\frac{2}{3}$ 的多元表徵，如： $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ，程序性操作結構性的概念連結，如果進而發展多種分數的多元表徵，如： $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ 或 $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ 等，做為代數與幾何的連結創作，那就是提供了數學情意欣賞價值。不僅文本設計有了不同的面向，在設計策略中，亦應提供學習者多元探索的機會。

設計階段：單位分數的四則運算。前面已經說過，本研究如何利用「分數與小數併陳的數線」鞏固「分數也是一個數」的概念，特別著重於單位分數的認識。在此前提之下，設計分數的四則運算教法，分述如下。

(1) 分數加法：(減法概念與加法同，不在此贅述)

同一個數的連加就是乘法，一般分數即可視為多個相同的單位分數相加。即：

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2;$$

(2) 分數乘法

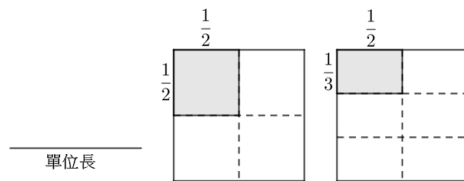
對於一般分數的乘法，則引導為單位分數相乘的倍數(整數倍)，後者以單位正方形的切割為典型概念，例如圖 46 呈現 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的概念心像。那麼一般分數的

相乘就可延伸操作。如： $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{5} \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 2 \times 4 = \frac{1}{15} \times 8 = \frac{8}{15}$ ，不再

以口訣 $(\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}})$ 處理。這使得分數的運算可在操作的一致性下完成，更能對單位分數的重要性有深刻理解。

圖 46

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的概念心像



(3) 分數除法

分數除法的引入，仍是從單位分數的概念開始，如：

(a) $1 \div \frac{1}{3}$ ，就好比 1 呎長的緞帶，如果每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，那麼可以剪成幾段？是可以理解答案是將均分為 3 段。即： $1 \div \frac{1}{3} = 3$ ，而 $3 = 1 \times \frac{3}{1}$ ，符合「除以分數，就是乘以它的倒數」。

(b) $6 \div \frac{1}{3}$ ，相當於 6 呎長的緞帶，如果每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，可以剪成幾段？很明顯，它只要延伸(1)式的概念，得到 $6 \times 1 \times \frac{3}{1} = 18$ 。

(c) $6 \div \frac{2}{3}$ ，可視為一條 6 呎長的緞帶，每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，且完成一個花式蝴蝶結需要 2 小段來組成，那麼 6 呎長的緞帶可以做出幾個花式蝴蝶結？這表示原本的答案 18 要再除以 2 (因為每個花式蝴蝶結需要 2 小段)。寫成數學式子就是：

$$6 \div \frac{2}{3} = 6 \times 3 \div 2 = \frac{6 \times 3}{2} = 6 \times \frac{3}{2} = 6 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

，而這式子也是符合「除以分數，就是乘以它的倒數」。於是我們得到一個普遍的性質：除以分數，就是乘以它的倒數。

上述的四則運算中，我們始終從單位分數著手，不僅是因為它的計算非常易於理解，它也是易於在情境中描述，而且在學習策略上有著一致性，此外若能應用概念性的理解與程序性的運算彼此間的著交互關係，更有助於對於該概念間關係的洞察 (李國偉，2018；Hiebert & Lefevre, 1986)。在七年級的分數學習過程，僅有程序操作的精熟練習，若能增加對單位分數的深層認識，亦不失為在中學階段對相關概念連結或橫向概念統整的好策略。單位分數的等值表示，可提供程序性的熟稔，如擴分、約分的操作，而單位分數與前文所述之面積概念連結，更能深刻體會分數概念在面積中的意義。

發展階段：在此階段文本已經過專家反覆討論修正，產出分數識讀文本，並已確認在執行計劃中所需的所有資源，例如在單位分數單元的進行的教學活動材料與創作設計之教學工具。與現場教師溝通教師手冊之注意事項，並進行部分班級的前導測試 (pilot tests) 等。

二、識讀文本格式設計歷程

本小節研究結果依據半結構問卷晤談、分數檢核卷、文本設計回饋等質性資料詮釋，將「識讀文本設計歷程」之研究結果再分為兩個部分，第(一)部分為「文本版面編排設計」，其研究結果有三，依序為：(1) 文本格式規格化；(2) 避免冗長程序性操作；(3) 避免簡答或模糊抽象的提問。第(二)部分為「對分數學習想法」，研究結果有二，分別是：(1) 改變固有對數學文本的看法；(2) 改變固有對分數概念的認知。

(一) 文本版面編排設計依據「執行評量摘要」實踐歷程結果

預期目標： 文本內容在進度中執行完成、文本內容設計段落明確易於理解、學生可正確使用帶分數數學式表徵。

執行過程： 發現文本文字量過多，分段不夠明確較難描述段落，無法引起學生注意力；學生已習慣於直接找算式計算答案，忽略閱讀文字，答錯再修正。

(1) 文本格式規格化

尋找落差原因： 與參與的教師溝通，均認為學習者未能適應文字較多的數學文本，亦無法達到預期進度。T01：「我覺得既是讓學生閱讀，應該在文本中可以有助於分段閱讀的符號，而不是密密麻麻的文字」。

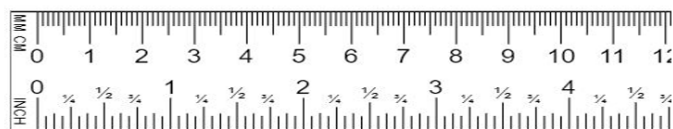
解決落差原因： 在下一版本中加入了分段符號，分別以撲克牌的四種花色為主，如圖 47。同時也限制文本設計的段落最多四段，同時包含隨喜練習最多四頁，以求掌握學習進度。

圖 47

增修識讀文本分段符號

♥ 「分數」與「小數」

分數和小數都是測量所需的數。以測量長度為例，下圖是一把常用的尺，它同時顯示公分 (cm) 刻度和英吋 (inch) 刻度。



世人的習慣是：當我們使用公分來測量長度，就習慣用小數，例如 3 公分和 3.2 公分是可以用尺精確測量出來的，但是 3.25 公分就得目測估計了。此外，生活中充斥著習慣用英吋來測量的東西，例如蛋糕和披薩的直徑、手機和電視螢幕的對角線長、水管的口徑、襯衫的領圍等。¹ 當我們使用英吋來測量的時候，就習慣用分數了。例如大樓的主水管口徑可能是 $1\frac{1}{4}$ 吋，淋浴蓮蓬頭的水管口徑通常是 $\frac{1}{2}$ 吋，飲水機的出水口通常是 $\frac{3}{8}$ 吋。

為便於閱讀引導，每個文本皆固定設計「例題說明」、「隨堂練習」、「學習摘要」、「課後隨喜練習」四大區塊。「例題說明」目的在於輔助文本內容的觀念說明與技能熟練；「隨堂練習」則做為學習概念澄清之目的；「學習摘要」則是安排於學習單元結束後之反思統整；最後才是「課後隨喜練習」，做為整個單元包含知識概念、計算能力或生活連結的實際應用，使用「隨喜」二字，則是希望學生是主動且快樂學習，避免學習數學給予負面壓力。

(2) 避免冗長程序性操作

尋找落差原因： 研究者發現，部分學生練習分數的分割時，因無法理解真正用意，以致耗費較多時在切割格子的操作，如圖 48。

解決落差原因： 為減少重覆的操作次數，則將 4 公分修正為 2 公分，讓操作次數減少，增加學習耐心並在活動結束之處，給予此段學習目的總結，如圖 49。

圖 48
分數分割的意義

「分數」為什麼有兩種寫法？

一般而言，我們都用帶分數來溝通，例如襯衫的領圍會寫 $14\frac{1}{2}$ 吋，不會寫 $\frac{29}{2}$ 吋。水電行會標示 $1\frac{1}{4}$ 吋的水管，不會寫 $\frac{5}{4}$ 吋，但分數與帶分數，只是同一個數的兩種寫法，如下圖。問題是：當我們對分數做計算的時候，帶分數非常難算，而且很容易出錯。所以做計算之前，會先把帶分數都轉換成假分數。可是，我們最好用帶分數來寫答案，才是「有素養」的寫法。

[隨堂練習 4]

1. 請以 4 公分為單位長，畫一條數線，標示這 16 個四分點： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、...、 $\frac{16}{4}$ 。在它們之中，特別標示 $\frac{11}{4}$ 、 $\frac{14}{4}$ 對應的帶分數。（注意：寫成帶分數的時候，分數的部分要化到最簡，才是「有素養」的寫法。）

圖 49
分數分割的練習

[隨堂練習 3]

請以 2 公分為單位長，畫一條數線，標示 8 個四分點： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、...、 $\frac{8}{4}$ 。在它們之中，特別標示 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 對應的帶分數。（注意：寫成帶分數的時候，分數部分要化到最簡，才是「有素養」的寫法。）

總結來說：分數應該用「帶分數」來說、寫，但是用「假分數」來算。

尋找落差原因：針對文本中較為艱澀用詞及相關文本格式予以增減部分文本文字量與修正內容，詢問學生想法(已經知道的內容且符號部分太複雜所以跳過)，以及依據現場學習反應學生忽略閱讀文字文本，習於直接計算／課室觀察，此外也與參與教師訪談。T01：「我認為帶分數部分，雖然學生在概念上還不是很理解，但換算方法在小學都已學過，所以對於概念的學習也就不在意了」。且研究者發現，學生對於拿到的文本直接跳至「隨堂練習」，調查皆認為寫完「隨堂練習」即表示作完一份作業。

解決落差原因：研究者亦認為數學式子對七年級學生而言，過於抽象而顯得無關緊要，縱使教師加以引導或提醒，發現許多學生仍是視而未見地完全跳過。經與專家討論後刪除圖 50 內容，以減少一些閱讀負荷。對於隨堂練習部分增加與文本內容相關的練習。

圖 50

帶分數轉換

帶分數轉換

做有理數乘、除計算的關鍵步驟，其實倒不是乘、除本身，而是分數與帶分數的轉換。

同學們應該已經會做兩種分數寫法的轉換。現在藉 $\frac{8}{3}$ 與 $2\frac{2}{3}$ 為例，正式說明一遍。

(1) 從 $\frac{8}{3}$ 到 $2\frac{2}{3}$ ：因為 $\frac{8}{3}$ 是 8 個 $\frac{1}{3}$ 的意思，每 3 個 $\frac{1}{3}$ 可以集成一個 1， $8 \div 3$ 得商數 2 的意思是可以湊滿二個 1（即 6 個 $\frac{1}{3}$ ）， $8 \div 3$ 餘 2 的意思是剩下兩個 $\frac{1}{3}$ 。故總共是 $2\frac{2}{3}$ 。同理， $\frac{50}{7}$ 的轉換方法為： $50 \div 7$ 得商數 7（即 49 個 $\frac{1}{7}$ ），故湊出 7 個 1， $50 \div 7$ 餘 1，故剩下 1 個 $\frac{1}{7}$ ，所以總共是 $7\frac{1}{7}$ 。公式：

$$\frac{b}{c} = (b \div c \text{ 的商}) \frac{b \div c \text{ 的餘}}{c} \quad (b \text{ 與 } c \text{ 為正整數})$$

(3) 避免簡答或模糊抽象的提問

尋找落差原因： 研究者發現在文本設計中，應避免使用行不行？可不可以？有沒有？這樣的簡答句，會造成無法預測學生的學習成效，如圖 51。雖是負數的評量問題，但仍指出學生作答的模式。（試後研究者亦詢問想法，該生仍回答：你只問有沒有意義呀）。

解決落差原因： 問題的設計增加描述性語句，如下陳述。

七、你覺得生活中比較常見到「帶分數」的表示？還是「假分數」的表示？(2%) 試舉個例子說明你的答案。(5%)⁴

圖 51

不合宜的簡答提問語

(2) 承(1)，你覺得符號「-」，讀「減」或讀「負」的意義有沒有

意義

尋找落差原因： 在每篇文本閱讀結束後的反思區，目的在於讓學生思考與反思，如第一年為一頁較為空泛之讀後札記，或使用籠統的用詞遣字，致使學生無法明白該如何回答內容，如下圖第一版。

解決落差原因： 第二年修正為閱讀整理，改為「我所知道的冷知識」、「我學到的冷技巧」、「我發現的為什麼（原來如此）」等「知行識」向度的描述，但學生對於「冷」知識有著疑惑，部分學生懷疑既是「冷知識」為何要學習？部分學生則是仍無法具體回應有哪些冷知識，如下列第二版內容—1、第二版內容—2，但也有表現較為具體的內容，如第二版內容—3；目前策略則修正為針對該單元「知行識」向度學習的內容做具體描述，如第三版。最後在文章末段的閱讀整理，除了剛開始學生對於冷知識這樣的用語感到疑惑之外，後來在教師的解釋之下，學生表現也更為聚焦。

【第一版】

13 分數 1090613

學習心得與札記




 閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼都要寫出完整的意思哦）

【第二版—1】


<p>● 告訴你冷知識 =多少吋多少吋的單位</p>	<p>● 告訴你冷技巧 非磨筆線</p>	<p>● 告訴你為什麼 因為筆線才可以算</p>
--------------------------------	--------------------------	------------------------------

【第二版—2】

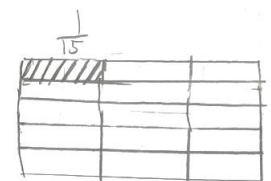
 閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼都要寫出完整的意思哦）

<p>● 告訴你冷知識 但假分數一黑占也不假</p>	<p>● 告訴你冷技巧 假分數只是分子比分母大。</p>	<p>● 告訴你為什麼 方便使用</p>
--------------------------------	----------------------------------	--------------------------


【第二版—3】

 本篇文本閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。）

- 我學到的冷知識 負號在仔旁和在中間是一樣的。
例： $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$
但還不會用
- 我學到的冷技巧
 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{5}$
- 我發現的為什麼(原來如此)
分數乘法要換假分數 負負得正
仔×分子, 分母×分母。負號不管在仔還是旁邊都一樣。



【第三版】

 本篇文本閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。）

- 在這單元中我學到的新知識是什麼？例舉二個並完整說明或介紹。
- 二個正分數相乘，該如何計算？請舉個例子說明。
- 像文章中， $\frac{4}{5}$ 可以有多種的不同單位表示法，我發現它們的式子表示法中有何關聯性？

亦即在文本設計過程，重新思考提問的目的是在何種視野脈絡下提出，使問題更加具體，亦使學習者能產生有效回應。

(二)對分數學習想法的改觀

預期目標： 具體了解學生對本課程想法與修正。

執行過程： 此預期目標並非是上課中刻意進行，而是透過各種質性描述來反覆修正，使用之工具諸如：教師上課觀察或調查、半結構問卷對學生晤談、分數識讀文本回饋、分數檢核卷、單位分數活動學習單、學習日誌等。

(1) 改變固有數學文本形式

尋找落差原因： 透過半結構問卷與學生晤談，發現學生對既有的數學印象就是算數學，而不是思考數學；學生第一次接觸這樣的課程，部分學生經歷一學期，才明白這也是數學課；內容量較多，造成學生回饋或提問不多。

以下轉述晤談內容

晤談內容一：說一說你一開始拿到這文本時以為是上什麼課？(第 18 題)

S10901 晤：我以為是國文閱讀課，可是又有數學題目。

S10701 晤：我不知道那是數學課，後來老師有說那叫「閱讀數界」。

S10903 晤：經過一個學期，發現以前就是計算，但現在會多想想。

晤談內容二：你覺得每週 1 節的閱讀數界課，會影響你的一般數學課的學習嗎？(第 1 題)

S10901 晤 (數學績良好) 不會 (回答快速且表情相當肯定)，會增加知識，不會影響課業，有些內容是課本沒有的。

S10902 晤 (數學成績中下) 嗯…應該沒差，就算多一節數學課也肯定不會提高數學成績，因為都是有相關的。(意指還是上相同內容，還是不會)

S10903 晤： (數學成績良好) 多了閱數應該能幫助正課學習，單元也有相同，所以沒較差。

S10904 晤： (數學成績中下) 閱數不會影響一般的數學學習 (指一般數學課)，現在數學題目都比較長。

晤談內容三：你覺得這門課跟一般數學課有什麼不同？(第2題)

S10901晤 (數學成績良好) 最大差別，閱數會告訴我們公式為什麼是這樣。…有些內容顯多餘…

S10902晤 (數學成績中下) 與數課不同，一個講解，一個解題。

S10903晤 (數學成績良好) 一般數學教理解，閱數融入生活常識，有時對比較數學的專有名詞比較陌生，雖然有敘述但多少還有些不懂。

S10904晤 (數學成績中下) 文章都可以讀得下去，看文章有趣，但考數學還是不有趣。

晤談內容四：在閱讀文本時，你最需要克服的是什麼？(專有名詞、數學公式、

S10904晤 (數學成績中下) 現在數學題目都是較長的數學理解，有時對比較數學的專名詞較陌生，雖然有些敘述，但多少還有些不懂。就多讀幾遍。

S10905晤 (數學成績中上) 多閱讀應該能幫助正課學習吧
數學符號、太多文字、耐心)(第3題)

晤談內容五：針對文本設計的回饋，呈現部分晤談學生對於文本理解與感受的回
答內容：

「S10901 晤：學習這門課的心情，有點像數學，又不像數學，剛開始（感覺）這門課比較多的文字，結束時，可以多這樣的課。」、「S10902 晤：這是好的影響，開始有想要閱讀了，也不會影響正課學習，……分數乘法較簡單。」、「S10903 晤：時間不是壓力問題，本身不喜歡數學。」、「S10904 晤：正課解題列式，閱數課是告知式子如何來，文章裡面有些沒見過的詞，看前後文輔助，文章不會長，從小三開始數學成績變好，成就感就來了。」、

「S10905 晤：文章長度都還好，喜歡科普的數學，很多科學小說裡面都有很多數學，發現生活中有數學，比平常課本內容少，題目接近生活。」、

「S10906 晤：閱數看閱讀理解，將數學應用於生活中，數學課主要在計算，不會影響正課學習，可學習到其他知識，……我覺得分數的乘法比較簡單。」。

(2) 改變固有對分數概念想法

尋找落差原因：透過分數檢核卷，瞭解學生對分數想法是否有改觀？

解決落差原因：根據檢核卷的加分題、單元結束時的閱讀整理等回饋，綜合現場教師、學生回饋資料與專家討論；針對分數學習回饋，設計多元性回饋策略如圖 52、圖 53、圖 54。

圖 52

分數檢核卷一對分數想法改觀的多元描述

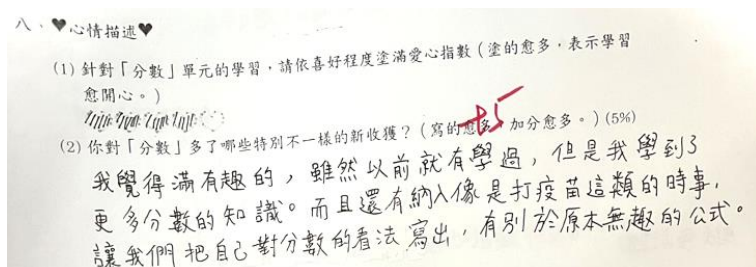


圖 53

分數檢核卷一對分數在生活中的連結描述

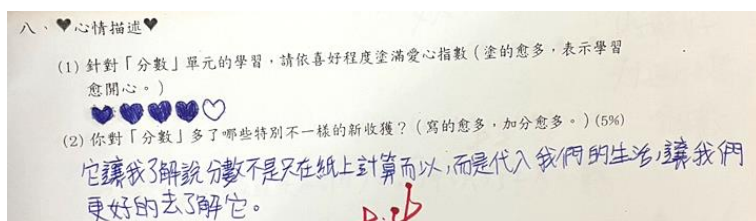
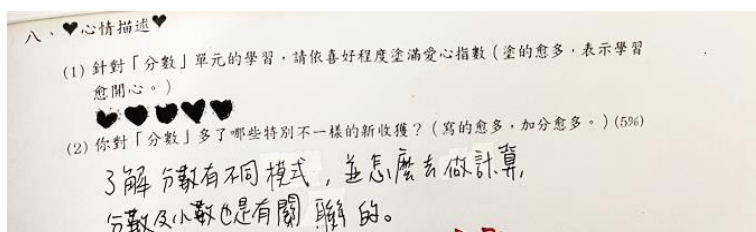


圖 54

分數檢核卷一對分數與小數產生關聯的描述



三、識讀文本「知行識」內容設計歷程

本小節針對識讀文本「知行識」內容設計，其研究結果分為兩個部分說明，第一(一)部分，建立「分數識讀文本」教案摘要表，共計三份。分別是：分數的意義、單位分數、分數的乘除，每一份教案摘要表皆包含學習目標摘要與文本教學流程摘要；第二(二)部分，依此三份教案摘要(分數的意義、單位分數、分數的乘除)，陳述知能、技能、識能設計三個面向之研究結果於該小節中。

(一) 建立「分數識讀文本」教案摘要表

在 ADDIE 課程設計流程中，設計、發展階段要先分析預期學習目標、教師課前準備以及學生起點行為，因此需先建立「分數識讀文本教案摘要表」，如表 29，做為課程發展的依據，其預期目標皆依據表 15 對分數學習準則設計。

表 29

「分數識讀文本」教案摘要表

單元名稱	教學目標	內容大綱	設計理念
分數的意義 (附件三)	(1) 分數的意義	比較正整數除法與有理數除法的差異	強化有理數除法與連續量的概念
	(2) 分數在生活中的應用	透過直尺測量理解分數與小數的應用時機	學習分數表示的精確位數
	(3) 帶分數與假分數的使用時機	舉例說明帶分數與假分數的使用目的	分數應該用「帶分數」來說，用「假分數」來算
單位分數 (附件四)	(1) 單位分數的意義	透過具體操作過程理解抽象的數學概念，如餅乾或麵包的分割	理解單位分從生活產生的原始意義
	(2) 正分數與相異單位分數的表示	探討各組在餅乾與麵包操作過程中，所有合理的組合方式	建立抽象表徵能力以及培養擴分、約分的能力
	(3) 單位分數與幾何創作結合	連結分數與面積比例，再融入對稱概念的活動操作	整合代數與幾何的跨域連結
分數的乘除 (附件五)	(1) 一般分數相乘	延續單位分數概念進行乘法操作	活動中包含分數概念由淺至深，由基礎至延伸的一致性操作
	(2) 分數相除	透過文字閱讀探索分數相除概念，再進行一般分數與正負分數相除	學習理解分數相除是 $\frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}$ 的原理，而非口訣，並延續乘法的一致性操作。

上表三個單元皆有相關的學習目標與教學活動摘要表。依序為「分數的意義」：表 30、表 31；「單位分數」：表 32、表 33；「分數的乘除」：表 34 與表 35。此外，「分數識讀文本」的「知行識」向度內容設計是從分數的意義進入單位分數的產生，再透過一般分數即為單位分數的倍數表示法，進入分數的乘除運算，每個教學活動都有設計「識讀評量」。

(1)「分數的意義」教案摘要

表 30

分數識讀文本學習目標—分數的意義

概念說明： 小學階段：分數的意義自然是由分不盡的概念產生，亦即從理解整數相除的概念產生，再帶入連續量與離散量的差別。 本研究：透過輕鬆對話敘述分數的發展有其學習上的困難，然後鋪陳有理數的除法，以及數學語言的使用，提供學生漸漸進入抽象思維的機會，亦說明分數的表示在生活中的應用。 學習目標： 1. 能理解分數概念由整除擴展至有理數相除。 2. 能運用分數有意義地運用於生活中的表徵。 3. 能將數線上的分數標示擴展至小數的表示。 4. 能欣賞並認識分數的複雜性。	
n-III-5 n-III-6	分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。
數-J-B1	運用代數描述理解情境中的現象。

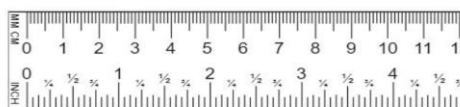
在「分數的意義」單元中，研究者認為文本的學習設計基於數學不應是獨立於生活中的，尤其應是在生活中實踐。所以在學習過程中，教師應有意識地安排或設計可以與學習內容相扣合的生活經驗，故識讀評量設計如圖 55 與圖 56。研究者認為圖 57 刻度尺是大部分學生必備的文具用品，但如何設計、辨識或讀出一個有效的刻度尺，卻是學習者常常習焉未察的數學知識。圖 57 則是利用生活中隨處可見的燈泡、鉛筆提供培養精準的測量能力的機會。

圖 55

「分數的意義」識讀評量—與生活經驗的連結 I

根據下圖回答下列問題。

- (1) 利用此直尺，在尺的上方，畫出長度為 5.3 公分的直線；在尺的下方，畫出長度為 $1\frac{1}{4}$ 英吋以及 $2\frac{3}{8}$ 英吋的直線。



- (2) 利用上圖直尺所標示的刻度，圈出你認為可以精準測量的長度。

3.2 公分 $2\frac{3}{4}$ 英吋 5.52 公分 $3\frac{7}{16}$ 英吋 8.35 公分

表 31

分數識讀文本設計—分數的意義 流程摘要表

活動一：分數的意義

書寫策略 生活經驗連結與具體視覺操作

文本摘要 **6 分數**

♠ 兩種除法

在小學，我們其實學了兩種不同的除法，並列舉例如下：

正整數除法

$$7 \div 2 = 3 \dots 1$$

餘數

有理數除法

$$7 \div 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} = 3.5$$

分數 或 小數

其中「正整數除法」得到正整數的商和餘數，而「有理數除法」不寫餘數，如果有餘的話，就寫成分數或小數。

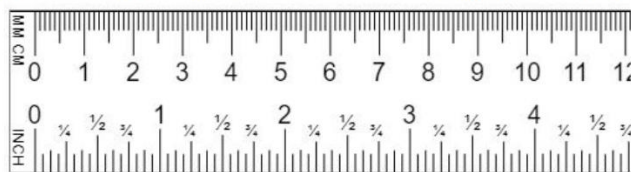
讓我先解釋什麼叫做「有理數」。我們把 0、正、負整數，正、負分數，正、負（有限）小數，統稱為有理數。（請同學先不要理會「有限」這兩個字；我必須把它們寫在這裡，否則有人會罵我。同學們應該不想害我挨罵吧？）

素養評量 學習分數連續量的表示，並嘗試以精確的數學語言「有理數」除法做溝通

反思連結 分數與小數在生活中的連結這是在一般教科書中從未以帶分數讓學生觀察的生活現象以及在生活中的應用，也更能感受分數的必要性，也是培養「識」向度的機會之一。如下列的文本補充：

「分數」與「小數」

分數和小數都是測量所需的數。以測量長度為例，下圖是一把常用的尺，它同時顯示公分刻度

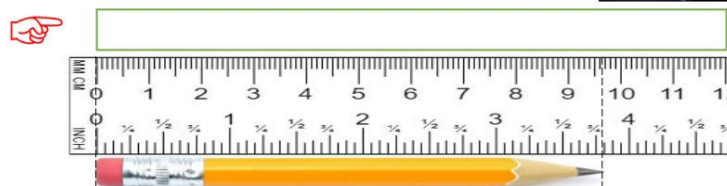


和英吋刻度（cm 和 inch）。世人的習慣是：當我們使用公分來測量長度，就習慣用小數，例如 3 公分和 3.2 公分是可以利用尺精確測量出來的，但是 3.25 公分就得目測估計了。此外，生活中充斥著習慣用英吋來測量的東西，例如蛋糕和披薩的直徑、手機和電視螢幕的對角線長、水管的口徑、襯衫的領圍等。¹ 當我們使用英吋來測量的時候，就習慣用分數了。例如大樓的主水管口徑可能是 $1\frac{1}{4}$ 吋，淋浴蓮蓬頭的水管口徑通常是 $\frac{1}{2}$ 吋，飲水機的出水口通常是 $\frac{3}{8}$ 吋。上圖的尺標示了 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 吋的間隔刻度，但是它其實精確標示了 $\frac{1}{16}$ 吋的間隔。

圖 56

「分數的意義」識讀評量—與生活經驗的連結 II

家庭最常使用的 LED 燈泡是編號 E27 的螺口燈頭；雖然造型不一樣，但它們的燈頭直徑都是 27mm，如右圖。請根據下面直尺的刻度，在手指的方框中畫出 27mm 長的直線。（1 mm = 0.1 cm）



(2)「單位分數的意義」教案摘要

表 32

分數識讀文本學習目標－單位分數

學習單元：單位分數	
概念說明：	
小學階段：單位分數在小學二年級階段是從等分配的活動 (如摺紙) 認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。	
本研究：藉由單位分數的「幾分之一」概念，延伸至使用單位分數進行分數的四則運算，再結合分數在幾何中的意義，更加認識單位分數的意義。	
學習目標：	
1. 理解一般分數可以由單位分數來表示。	
2. 可以運用擴分、約分、等值等概念進行一般分數以單位分數表徵。	
3. 能透過面積概念將分數與幾何概念連結。	
4. 能運用對稱概念創作並欣賞數學之美。	
數-A1	具備數學思考能力以及精確與理性溝通時所必需的數學語言。
數-A3	具備轉化現實問題為數學問題的能力，並從多元、彈性與創新的角度解決數學問題，並能將問題解答轉化運用於現實生活。
數-J-B3	具備辨認藝術作品中的幾何形體 或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。
數-C2	具備和他人合作解決問題的素養，並能尊重多元的問題解法，建立良好的互動關係。
n-III-4	理解約分、擴分、通分的意義，並應用於異分母分數的加減。
n-IV-1	理解因數、倍數、質數、最大公因數、最小公倍數的意義及熟練其計算，並能運用到日常生活的情境解決問題。
n-II-1	理解乘除互逆，並能應用與解題。

此活動設計強調程序性文本的操作，以分數學習為例，首先即如表 32 的陳述，在理解單位分數意義之後，則進入一般分數以單位分數表示，即分子是 1 的分數稱為單位分數，例如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 都是單位分數。它們的性質是：把 m 個分母是 m 的單位分數相加起來，結果是 1 (前述 m 代表某正整數)。例如： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ 、 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 。也可以說單位分數是一般分數的基本組成元素，就像 1 做為自然數的基本元素概念。表 33 即為單位分數流程摘要，利用視覺操作單位分數相乘與幾何中的面積關係，自然引進一般分數可以如何延續單位分數概念進行分數乘法的運算，完成分數乘法操作。

表 33

分數識讀文本設計—單位分數 流程摘要表

活動二：單位分數	
書寫策略	<ol style="list-style-type: none"> 1. 設計引起學生對分數學習障礙的同理心，在學習單位分數之初，即以短文敘述引起學生共鳴，如文本內容 1。 2. 透過自然情境的實踐引導，由均分概念進入對單位分數的理解，文本內容則為二條吐司要均分給三人的可操作方式，以及課堂中操作二根餅乾均分給三人的活動，如文本內容 2。 3. 單位分數的定義

文本內容

7 單位分數

在巴黎羅浮宮博物館裡，有一件十五世紀的文件相當有趣，那是一位操心的父親與數學家朋友的通信。信中內容是這樣：做父親的詢問，應該把兒子送去哪所大學就讀，數學家回答說：A 大學還可以，但是如果真心希望兒子瞭解分數，應該把兒子送去 B 大學。

沒錯，在 500 年前，分數真的是在大學階段才會學的課程，這足以表示分數確實有它的困難存在。但如今分數已經可以使用更簡單的觀念來闡述，才得以讓我們在小學階段就可以學習分數。但是到了國中還要繼續學習。分數之中，有一個非常特別的觀念叫做「單位分數」，我們要先來為它介紹一下。

1.



2.

透過文章閱讀與課堂餅乾操作，探索 $\frac{2}{3}$ 以單位分數表示時的可能情形。如： $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，或 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，在探索過程亦在培養擴分、約分以及判斷等值分數的能力。

3.

單位分數的定義

♣ 單位分數

分子是 1 的分數稱為單位分數，例如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 都是單位分數。它們的性質是：把 m 個分母是 m 的單位分數相加起來，結果是 1（這篇文章的 m 代表某正整數）。例如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{即 2 個分母是 2 的單位分數相加等於 1,}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad \text{即 3 個分母是 3 的單位分數相加等於 1,}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{即 4 個分母是 4 的單位分數相加等於 1}$$

因為同一個數的連加就是乘法，所以前面的連加就相當於以下乘法：

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1, \quad \frac{1}{3} \times 3 = 1, \quad \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

用符號寫成通例，就是 $\frac{1}{m} \times m = 1$ 。現在我們就用這個性質來「規定」什麼數是單位分數。

[定義] 單位分數

如果有某數 \square ，自己連加 m 次等於 1，或者說 $\square \times m = 1$ ，則 \square 就是單位分數 $\frac{1}{m}$ 。我們另外規定 1 的單位分數就是 1，也就是說 $\frac{1}{1} = 1$ 。

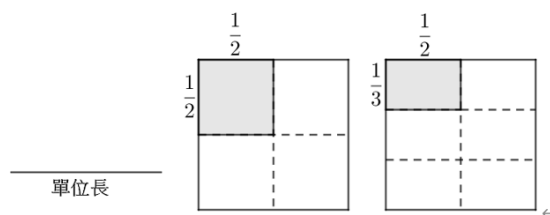
續表 33

素養評 量	1. 學習以單位分數做為分數四則運算的基礎 2. 學習將一般分數以單位分數來表示並結合幾何面積概念 3. 藉由從單位分數的意義中，培養欣賞數學的價值以及相關領域的連結，亦是識讀文本所強調素養能力。
反思連 結	讓學習者發現可以使用單位分數將一般分數進行多元且不唯一的多元表徵，並思考在幾何上的意義。進入單位分數與幾何領域連結。

圖 57 呈現 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的概念心像。一般分數的相乘就可延伸操作。如： $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{5} \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 2 \times 4 = \frac{1}{15} \times 8 = \frac{8}{15}$ ，不再以口訣 $(\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}})$ 處理。這使得分數的運算可在操作的一致性下完成

圖 57
單位分數相乘與面積關係的視覺操作

單位分數相乘的意義，可以用面積來看。如下圖，兩個大正方形的面積都是 1 平方單位。而 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 的意思是邊長為 $\frac{1}{2}$ 的正方形面積，同理 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的意思是長 $\frac{1}{2}$ 、寬 $\frac{1}{3}$ 的長方形面積。觀察附圖，很明顯地，這兩種面積分別是 $\frac{1}{4}$ 平方單位、 $\frac{1}{6}$ 平方單位。↵

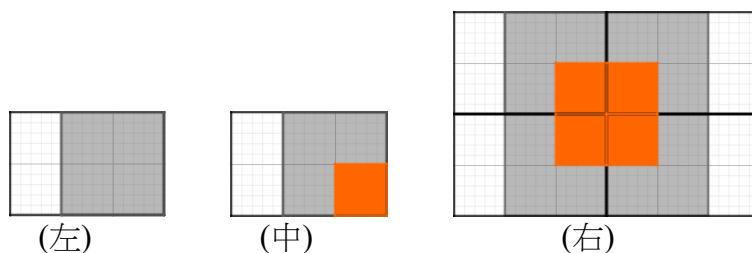


所以 $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) \times 12 = \frac{1}{6} \times 12 = \frac{12}{6} = 2$ ↵

接著，以下說明本研究如何從單位分數的分數與面積關係，進入代數與幾何連結的文本設計思維。首先， $\frac{2}{3}$ 即表示在面積為 1 的圖形中占去 $\frac{2}{3}$ ，如圖 58 (左)，即塗色部分。若 $\frac{2}{3}$ 再以 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ 表示之，圖形又將變化成圖 58 (中)，且 $\frac{1}{6}$ 可以是其中的任何一小塊正方形，這表示每人所繪製的圖形將不一樣， $\frac{1}{2}$ 亦同，最後利用與 x 軸與 y 軸作對稱圖形，即得如圖 58 (右) 之鑲嵌圖形創作。

圖 58

單位分數與幾何圖形概念的連結



本分數識讀文本的設計即聚焦於由單位分數出發，單位分數也稱為「埃及分數」，一般分數則透過單位分數做結合與表徵 (洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊，2008)。例如， $\frac{2}{3}$ 就會使用 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ 來表示。這樣的使用方式使得在古代埃及人面對生活中的分數應用，皆變得容易解決，因為分子總保持是 1。再以 $\frac{4}{5}$ 為例說明：

可以表示成 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \dots \dots \dots (a)$ 式

也可以表示成 $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \dots \dots \dots (b)$ 式

其中(b)式似乎無法再做更多元的表示法。但透過(a)式中針對某個分數的迭代轉換，其表達方式就產生了多元的變化，如(c)式，其中

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \text{ 而 } \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}。$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \dots \dots (c)$$

這是一個對有理數可以深層理解的思維方式，其概念來自於理解每一步都來自於最大單位分數的分解，因此透過不斷迭代，代表著可以多種的表達方式，也牽涉到比例性對於等價概念的理解，此種比例推理 (proportional reason) 的訓練是可以提升學習分數概念的認知洞察。在比例推理的脈絡下，單位分數扮演著非常重要的關係(Cortina et al., 2014)。若再拓展等價比例推理的思維，結合部分與整體的面積概念時，數學中所蘊涵的藝術之美也將浮現。以上述 (c)式為例，分數 $\frac{4}{5}$ 的三種表達方式分述為三個等式，並將此三個等式各自以適當的公倍數予以擴分後重新表述，如(d)、(e)、(f)三式。

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} \dots \dots \dots (d)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{20}{60} + \frac{10}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} \dots \dots \dots (e) \text{式}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{15}{60} + \frac{5}{12} + \frac{10}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} \dots \dots (f) \text{式}$$

圖 59 (左) 說明(d)式在結合面積概念下，分數代表了部分與整體的比例意義。白色 (未圖色) 面積的編號④是整體面積的 $\frac{1}{5}$ (即 $1 - \frac{4}{5} = \frac{12}{60}$)，塗色部分面積總和是 $\frac{4}{5}$ ，不同顏色代表不同的部分 (即不同的分數)，如編號①面積為 $\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$ 、編號②面積總和 (左下方+右上方) 為 $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ ，編號③面積為 $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ ，且每個相同色塊個數可以任意放置，只要總數不變即可，如圖 59 (右) 則又形成另一種圖案，而 $\frac{4}{5}$ 也就可改變如(e)式的表示法，圖形結果將隨著圖色位置及顏色的不同而產生多樣化的結果，但仍可說明整體面積為 1 的表徵。

圖 59

「一般分數」以「單位分數」表示面積的幾何概念



最後可將原圖對稱於 x 軸與 y 軸，結合數與形的藝術創作，如圖 60 (左)、圖 60 (右)。能讓學習者具體感受自己創造出來的美感，也理解數學本身所引發的價值，依此變化，將 (f) 式再予以不同的位置分配、顏色變化，也就能創造更多元的藝術創作。

圖 60

「單位分數」結合面積概念的藝術創作



藉由單位分數學習分數的四則運算，再透過一般分數利用單位分數的多元表徵，欣賞分數(代數)與幾何的概念連結，也讓學習者具體感受自己創造出來的美感，理解數學本身所引發的價值。並在學習完成時應檢核之識能評量學習成效，同時亦有單位分數與面積關係的創作活動成果檢核。

(3) 「分數的除法」教案摘要

表 34

分數識讀文本學習目標—分數的乘除

學習單元：分數的乘除	
概念說明：	
小學階段：分數的四則運算在小學階段是以螺旋式漸近學習，數字不會太大與繁雜，以能流暢進行分數計算為目標。包含帶分數、真分數、假分數、擴分、約分、等值分數、最簡分數等。	
本研究：主要在於利用單位分數進行分數的乘除運算，再由單位分數探索數與形結合的鑲嵌藝術。	
學習目標：	
能運用一般分數以單位分數表示的概念，流暢地進行分數的四則運算	
n-IV-2	負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數。
n-II-8	能在數線標示整數、分數、小數並做比較與加減，理解整數、分數、小數都是數。
n-II-1	理解乘除互逆，並能應用與解題。
n-III-6	理解分數乘法和除法的意義、計算與應用。
r-III-2	熟練數(含分數、小數)的四則混合計算。
數-C2	具備和他人合作解決問題的素養，並能尊重多元的問題解法，建立良好的互動關係。

表 35

分數識讀文本設計—分數的乘除 流程摘要表

活動三：分數的乘除 (加減法不在此贅述)	
書寫策略	分數的加減乘除皆採取利用單位分數的一致性概念操作，以達到的技能熟練目的
文本摘要	<p>1. 分數的乘法</p> <p>進入國中以後，大家要學會從兩個方向使用「=」符號：</p> $\text{例如 } \frac{n}{m} = \frac{1}{m} \times n \text{ 不但可以說}$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2, \text{ 也可以說 } \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$ <p>這個技術使得我們能做所有正分數乘以正整數的計算。例如：</p> $\frac{2}{5} \times 3 \text{ 可以先用定義把 } \frac{2}{5} \text{ 拆開成 } \frac{1}{5} \times 2, \text{ 那麼原式就變成 } \frac{1}{5} \times 2 \times 3 = \frac{1}{5} \times 6 = \frac{6}{5}$ <p>2. 分數的除法，透過文本中的文字對話 (僅摘錄部分內容，詳見附件) 探討分數除法的意義。</p>

♥一對父女的對話—【 待填 】

閱讀完下面的一段父女對話，你能從對話中找到哪些結論？

父：妳知道 $1 \div \frac{2}{3}$ 是多少嗎？

女：你應該要問我更簡單的題目，比方說 $1 \div \frac{1}{3}$ 是多少？

父：那妳會計算 $1 \div \frac{1}{3}$ 是多少嗎？

女：會，答案是 3。因為我把它想成是 1 呎長的緞帶，如果每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，那麼可以剪成 3 段，所以答案是 3。

父：那麼 $4 \div \frac{1}{3}$ 是多少呢？

女：答案是 12。因為 1 呎長的緞帶，可以剪出 3 段 $\frac{1}{3}$ 呎；4 是 1 的 4 倍，所以 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$ 。也就是 4 呎長的緞帶，每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，可剪成 12 段。

父： $5 \div \frac{1}{3}$ 呢？

女：15。

父：能告訴我妳計算的規則嗎？

3. 倒數定義

很多同學看到這個標題，都會覺得很簡單：「分數除以分數，就是乘以倒數呀！」答案雖然沒錯，但是如果學到數學素養，就必須要明白**為什麼**「除以一個分數就是乘以它的倒數」？比起答案本身，學數學更重要的是理解的過程；而且它的理解還是可以回到單位分數。首先，讓我們針對倒數做個明確定義。

[定義] 倒數

兩數相乘等於 1 時，它倆互為倒數。

以下補充說明倒數的性質：

- (1) 零沒有倒數。（因為零跟誰都乘不出 1 來。）
- (2) -1 的倒數還是 -1，因為它倆相乘為 1，即 $(-1) \times (-1) = 1$ 。同理，1 的倒數也還是 1。
- (3) 正整數 m 的倒數是單位分數 $\frac{1}{m}$ ；同理，單位分數 $\frac{1}{m}$ 的倒數是 m 。

素養評量 分數相乘的部分，只要能了解單位分數的乘法，就能了解一般分數的乘法了。如： $\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} \times 3\right) \times \left(\frac{1}{3} \times 4\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times (3 \times 4) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times 12$ ，

本研究始終著眼於如何透過一致性的操作讓學習更容易，因此在處理分數運算部分，本文本則是利用單位分數的概念重覆操作於分數的乘、除等運算。

反思連結 處理計算過程的一致性是可以提升數學計算能力的熟練性，不論是負數學習或分數演練，且在文本中亦提醒學習者，對於本文中**父女對話**的反思，提供學生思考除法概念的意義與分享。

「分數的乘除」涵蓋有分數的四則運算，但在本文本設計著重於分數的乘除，並利用單位分數概念進行一致性的程序操作，如一般分數 $\frac{2}{3}$ 即為單位分數 $\frac{1}{3}$ 的 2 倍。讓分數表徵有更多元的學習表現，這也是在分數教材分析中從未運用過的教學活動設計，避免了如口訣般的速算法（分母乘分母，分子乘分子），彷彿給了口訣就代表分數概念的學習完成或就理解了分數的意義，如圖 61。

圖 61

「分數的乘除」識讀評量- 分數乘除意義的理解與計算

[隨堂練習 1]

讀完以上「父女對話」後，請回答下面的問題。

- (1) 請為那段對話設計一個標題，寫在對話開始前的【 】內。
- (2) 請寫出分數除法的算法是什麼？在對話中的哪幾行都有出現？
- (3) 數學老師說：「分數的除法其實還是用乘法來做的」，這句話可以在「父女對話」的哪幾行看到？

[隨堂練習 2]

(1) $6 \div \frac{2}{3} =$ (2) $\frac{3}{4} \div 2 =$ (3) $\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} =$

本識讀文本亦於單元內容結束時提供線上科技工具實際演練，除了提供計算答案的核證之外，更重要的是預期學生能熟悉現代的科技工具，並明瞭何時何處可以運用科技，如圖 62。

圖 62

科技工具的應用

科技工具

大多數的計算機只做有理數除法，不做正整數除法；而且，它們做有理數除法的時候，不會算出分數，只會算出小數。但是有少數專門為學生的需求而設計的計算機，可以做分數計算。作者平常用來舉例的那一款計算機，就可以做分數計算。讓我們先學習怎樣用它來輸入分數、轉換帶分數和假分數吧。



(二) 「知行識」向度設計

本小節中針對分數文本之「知行識」向度研究結果說明如下：**知能設計**部分，(1). 視覺操作檢核分數知能、(2). 以單位分數啟發分數知能；**技能設計**部分，(1). 一致性的程序技能、(2). 聚焦分數連續量概念操作；**識能設計**部分：(1). 增加應用解題的表徵能力、(2). 培養人文素養閱讀、(3). 連結分數與幾何的創作、(4) 提供多元的檢核模式。

(1) 知能向度設計歷程

- 預期目標： 可辨識分數在數線上的位置、可描述正分數是單位分數組成的樣式、能描述單位分數在面積上的意義、單位分數的定義、單位分數在生活中的應用，以及辨識單位分數在面積上的表示。
- 執行過程： 分數的認識分為三個部分操作：數線上的表示、由整數標示連結至分數與小數之標示位置、連結到日常的直尺使用中，但發現部分學生仍無法讀懂刻度尺的意義，以及仍有分子、分母為各自獨立整數的迷思。單位分數的認識亦分三部分：了解古人學習分數的困難、生活中均分概念、在面積上的意義。

(a) 視覺操作檢核分數知能

尋找落差原因： 意圖修正學生對於分數視為一個數的迷思概念在數線上對於分數或小數的具體辨識就是要能「看得見」，而生活中的直尺與數線表示即為適合的策略。

解決落差原因： 文本修正後的版本，分成二個層次，讓學生標示出有標示數字的位置以及沒有標示數字的位置圖。然後再於檢核卷上描述類似概念，如圖 63。圖 64 設計目的在於檢核學生對全數的迷思，而此檢驗成效在訪晤答錯學生的原因(認為 6 比 9 小，或是依分母大小來寫)中，得到印證。

圖 63

分數的認識—知能文本設計

(1) 利用此直尺，在尺的上方，畫出長度為 5.3 公分的直線；在尺的下方，畫出長度為 $1\frac{1}{4}$ 英寸以及 $2\frac{3}{8}$ 英寸的直線。

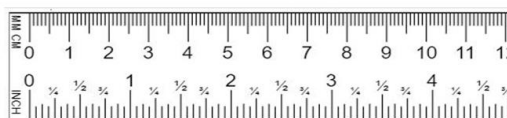


圖 64

分數在數線上表示之評量

四、請將下列的五個分數填入數線上你認為最適當的位置(方框)中(20%)

$\frac{1}{10}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{1}{14}$



四、請將下列的五個分數填入數線上你認為最適當的位置(方框)中(20%)

$\frac{1}{10}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{14}$



(b) 以單位分數啟發分數知能

尋找落差原因： 分數的學生，學生應從小學階段的算術學習進入到國中階段的基本代數思維學習，但在國中階段仍為口訣式的公式背誦取代代數思維的訓練。

解決落差原因： 本文本設計即從單位分數與一般分數連結開始，如圖 65，並於檢核卷中檢核其成效，如圖 66。而此目的亦為分數的技能、識能學習埋下伏筆，讓學生可以一致性地以單位分數操作分數的四則運算以及對分數與面積概念間的幾何連結。

圖 65

「認識單位分數」之知能文本設計

[定義] 單位分數

如果有某數 \square ，自己連加 m 次等於 1，或者說 $\square \times m = 1$ ，則 \square 就是單位分數 $\frac{1}{m}$ 。我們另外規

定 1 的單位分數就是 1，也就是說 $\frac{1}{1} = 1$ 。

前面寫的 \square 代表一個「還不知道，有待查明的數」，稱為未知數。

[隨堂練習 1]

(1) 假如 $\square \times 5 = 1$ ，則 $\square =$

(2) 假如 $\square \times 7 = 1$ ，則 $\square =$

那麼單位分數與一般分數有何關係呢？簡單說，一般分數就是單位分數的自己連加。例如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

圖 66

單位分數之知能評量

一、判斷下列式子是否正確？正確者在方框中打☑，不正確者在方框中打☒ (12%)

$\frac{4}{7}$ 就是 4 個 $\frac{1}{7}$ 相乘

$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{1}{7} \times 3 \times \frac{1}{5}$

$\frac{4}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{7} \times 5 \div 3$

... "這 1 句" 是 "錯誤"

(2) 技能向度設計歷程

預期目標：能進行單位分數與一般分數的乘法運算，以及解基本的應用問題強調有理數(連續量)的除法

執行過程：在執行分數的乘法時，發現在理解一般分數可以單位分數表示後，學生進行分數的相乘是極其自然的一種接受方式，亦不需「分母乘分母，分子乘分子」口訣過渡。文本也避免「乘除互逆」的專有名詞描述，改以藉由單位分數過渡到倒數概念的分數除法，如圖 67。

(a) 一致性的程序技能

尋找落差原因：避免學生習慣性使用口訣背誦解決分數的四則運算。

解決落差原因：將倒數與單位分數概念連結，再引入分數四則運算，如圖 68

圖 67

「分數的乘除」之技能文本修正—倒數設計

♠ 分數除分數

很多同學看到這個標題，都會覺得很簡單：「分數除以分數，就是乘以倒數呀！」答案雖然沒錯，但是如果學到數學素養，就必須要明白**為什麼**「除以一個分數就是乘以它的倒數」？比起答案本身，學數學更重要的是理解的過程；而且它的理解還是可以回到單位分數。首先，讓我們針對倒數做個明確定義。

[定義] 倒數

兩數相乘等於 1 時，它倆互為倒數。

以下補充說明倒數的性質：

- (1) 零沒有倒數。(因為零跟誰都乘不出 1 來。)
- (2) -1 的倒數還是 -1 ，因為它倆相乘為 1，即 $(-1) \times (-1) = 1$ 。同理，1 的倒數也還是 1。
- (3) 正整數 m 的倒數是單位分數 $\frac{1}{m}$ ；同理，單位分數 $\frac{1}{m}$ 的倒數是 m 。
- (4) 習慣上，我們不把負數寫在分母。當分母是負數時，一律把負號寫在分數的前面。例如 -3 的倒數本來是 $\frac{1}{-3}$ ，但是因為 $\frac{1}{-3} = \frac{1}{-1} \times \frac{1}{3} = (-1) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ ，所以 -3 的倒數寫成 $-\frac{1}{3}$ 。前面寫的 $\frac{1}{-1}$ 意思是 -1 的倒數，而它就是 -1 。

(b) 聚焦分數連續量概念操作

尋找落差原因：學生會習慣性在小學階段以生活中 pizza 分割（離散概念），做為分數的表徵，在國中階段則避免類似的譬喻。

解決落差原因：從單位分數的概念自然引入分數的四則運算，並聚焦於連續量除法概念的代數思維，所以改之以緞帶的切割如圖 68。

圖 68

「分數的乘除」之技能文本修正—連續量設計

父：現在有一條 6 呎長的緞帶，每 $\frac{1}{4}$ 呎剪成一小段，已知完成一個花式蝴蝶結需要 3 小段來組成，那麼 6 呎長的緞帶可以做出幾個花式蝴蝶結所需要的緞帶呢？妳該如何設立數學算式？

女：應該是 $6 \div \frac{3}{4}$ ，因為一個花式蝴蝶結需要 3 小段，那麼完成一個蝴蝶結就需要 $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ 呎的緞帶。



(3) 識能向度設計歷程

預期目標：可以依據應用問題列式或轉換成數學模式思考、能陳述或欣賞單位分數做為發展分數四則運算概念所提供的幫助或應用，以及單位分數與幾何面積之間的創作連結。

執行過程：以分數的認識與單位分數學習為本，皆為教學完成之後才發現第一版內容的缺乏，進而增補例題，以及針對文本中直尺刻度的分數、小數與生活連結。

(a) 增加應用解題的表徵能力

尋找落差原因：應用問題的理解並能用數學式子表徵。

解決落差原因：引入生活中關心的問題做為應用問題表徵的練習，做為抽象思維訓練的過渡策略，如圖 69 聚焦於分數、小數、百分比在生活中的連結。

圖 69

分數、小數、百分比的連結

1. 衛福部疾病管制署公告：截至 12/20 日止，台灣目前已接種二劑 COVID-19 相關疫苗人數對應各接種疫苗之統計結果如下表。觀察相關數據後回答題號 (1)至(3) 的問題。

- (1) 參考下表中第二欄 AstraZeneca(陰影部份)之相關表示法，然後在下表空格處填入適當的百分比表示(取至小數後 1 位)(每格 5 分)

疫苗名稱	AstraZeneca	Moderna	高端	BioNTech	總計
已接種二劑人數	15,005,154	7,577,008	1,469,959	10,045,558	34,097,679
$\frac{\text{已接種二劑人數}}{\text{已接種二劑總人數}}$	440063794	.222214774	.043110236	.294611196	1
疫苗接種率(百分比表示)	44.0%				100%

- (2) 上表中，陰影部份的 AstraZeneca 疫苗接種率數值為 44.0%，請說明它代表的意義。(5%)

- (3) 請依題意列式。(5%)截至 12/20 日止，台灣總人口數約 2350,0000 人，已知滿 12 歲以上可接種疫苗者約占台灣總人口數的 87.5%。根據上表資料，請問：全台在應接種疫苗的人口數中，屬於接種 Moderna 者大約是多少？【此題僅需列式即可，無需計算】

(b) 培養刻意的學習活動與人文素養閱讀

尋找落差原因：基於過去研究者教學經驗，分數的計算對於初入中學的學生而言實為一大挑戰，故文本設計增加單位分數在歐洲時期的困境描述，引起學生學習的興趣與信心，並在上課過程中提供教學學習活動，由活動中學習單位分數的意義，也做為代數與幾何創作連結的開場。

解決落差原因：首先引入生活關心的問題，如生活中常遇到的分食問題，讓學生在活動中自然體驗單位分數的自然思維，如圖 70、圖 71、而圖 72 則是學生利用學習日誌完整呈現餅乾切割的多種可能性。同時文本設計增加單位分數在歐洲時期的困境描述，引起學生學習的興趣與信心，如圖 73。

圖 70
分數的多元表徵 1



圖 71
分數的多元表徵 2



圖 72
分數的多元表徵 3



圖 73
學習欣賞「單位分數」之識能設計

7 單位分數

在巴黎羅浮宮博物館裡，有一件十五世紀的文件相當有趣，那是一位操心的父親與數學家朋友的通信。信中內容是這樣：做父親的詢問，應該把兒子送去哪所大學就讀，數學家回答說：A 大學還可以，但是如果真心希望兒子瞭解分數，應該把兒子送去 B 大學。

沒錯，在 500 年前，分數真的是在大學階段才會學的課程，這足以表示分數確實有它的困難存在。但如今分數已經可以使用更簡單的觀念來闡述，才得以讓我們在小學階段就可以學習分數。但是到了國中還要繼續學習。分數之中，有一個非常特別的觀念叫做「單位分數」，我們要先來為它介紹一下。

(c) 連結分數與幾何的創作

尋找落差原因： 不論是教科書或小學的分數學習經驗，從未將一般分數(或單位分數)幾何面積作連結。

解決落差原因： 對於單位分數與面積關係的創作，學生乃第一次接解，所以耗費相當多時間，但研究者認為此活動可以結何代數與幾何的關係，因此再與專家溝通，同時在上課中僅帶領單位分割的教學活動，以及單位分數創作學習單的引導，增加課前活動、簡化文本內容與分解步驟的引導，並改變評核方式（以分組或個人之成果展方式完成），如圖 74。

圖 74

單位分數與面積之間連結創作示範

程序性操作

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12}$$

視覺性操作

觀察左邊三個圖形的空白格子數有無不同？
位置擺放不同是否影響面積？
何種圖形看起來較有變化。

預期到達的幾何、
代數與藝術跨域連結

(d) 提供多元的檢核模式

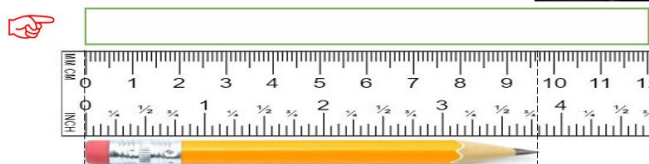
尋找落差原因： 不同的學生對於各種數學知識理解的程度與表達都不同，若僅單一之測驗題檢核，將無法獲得更多學生理解分數的方式。

解決落差原因： 本文本即設計有：學前活動、隨堂練習、隨喜練習、檢核卷、閱讀整理區、學習單、學習日誌等，讓不同學習方式的學生都可以有表達對分數理解的方式，而這些檢核工具亦是素養培養的良好檢核工具，如圖 75、76.....、83。

圖 75

「分數的認識」之生活應用素養

- 家庭最常使用的 LED 燈泡是編號 E27 的螺口燈頭；雖然造型不一樣，但它們的燈頭直徑都是 27mm，如右圖。請根據下面直尺的刻度，在手指的方框中畫出 27mm 長的直線。（1 mm = 0.1 cm）



- 請仔細觀察上圖中的鉛筆長度，你覺得最適當的鉛筆長度應該是多少公分？多少英寸？

圖 76 認識「單位分數」之學習日誌

Notes 認識「單位分數」
 單位分數就是分子為1的分數
 Q: 會不會對分數感到困惑?
 A: 會, 因為考試的時候, 只要有考分數, 我一定會錯, 不是粗心, 就是整會算錯, 所以我不喜歡算分數
 分數在早期只有在大學時, 才會交到, 因為分數有一定的困難, 所以, 才會那麼晚學。
 所以我們感到困惑也是正常的

圖 77 認識「單位分數」之學習單

單位分數 學習單

- 何謂「單位分數」?
 分子為1的分數 $\frac{1}{?}$
- 你如何用「單位分數」來說明 $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$?
 $4 \times \frac{2}{3}$
- 以分數 $\frac{3}{4}$ 而言, 除了上述的 $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ 表示法之外, 你還可以找到其他單位分數表示法嗎? (要注意每一個分數都要是單位分數, 而且每個單位分數都是不相同的)
 $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
 $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
- 說說你在學習分數的過程中, 有像古埃及人或歐洲人這樣的痛苦、焦慮或疑惑嗎?
 有: 通分要很久, 算到頭疼呀~

圖 78 「分數的認識」之學生閱讀整理 1

閱讀整理 (不論是知識或技巧或為什麼都要寫出完整的意思哦)

<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷知識 我學會了要去用帶分數才是有表意。 例: $\frac{17}{5} \Rightarrow 3\frac{2}{5}$ 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷技巧 我學會了如何簡化, 還有看帶分。 例: $2\frac{3}{8}$ 帶分 $\Rightarrow 2\frac{6}{16}$ 帶分 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你為什麼 我知道為什麼要用真分數和假分數。 在計算時, 我們會使用假分數, 因為比較好算。 計算後我們會使用帶分數, 因為能一目了然。
---	---	---

圖 79 「分數的認識」之學生閱讀整理 2

閱讀整理 (不論是知識或技巧或為什麼都要寫出完整的意思哦)

<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷知識 我學會了要去用帶分數才是有表意。 例: $\frac{17}{5} \Rightarrow 3\frac{2}{5}$ 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷技巧 我學會了如何簡化, 還有看帶分。 例: $2\frac{3}{8}$ 帶分 $\Rightarrow 2\frac{6}{16}$ 帶分 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你為什麼 我知道為什麼要用真分數和假分數。 在計算時, 我們會使用假分數, 因為比較好算。 計算後我們會使用帶分數, 因為能一目了然。
---	---	---

圖 80 真分數的意義描述 1

閱讀整理 (不論是知識或技巧或為什麼都要寫出完整的意思哦)

<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷知識 通常時要用帶分數並要化成長帶分數才是有表意的分數 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你冷技巧 若刻度不能清楚表示時可用「四捨五入」去判斷 	<ul style="list-style-type: none"> 告訴你為什麼 $\frac{17}{5}$ 這個分數會把它簡化 1) 不僅容易理解, 也容易計算 2) 所以最簡分數的真分數或帶分數來呈現的數才稱作有表意的分數。
---	--	--

圖 81

真分數意義的描述 2

三、兩個分數相乘，如： $\frac{2}{3} \times \frac{7}{39}$ ，現在回答下列二個問題。(8%)

(1) $\frac{2}{3} \times \frac{7}{39}$ $\frac{7}{39}$ (在 內填 > 或 < 或 =)

(2) 說明你選此答案的理由：因為 $\frac{2}{3} = \frac{14}{39}$ 但是 $1 > \frac{2}{3}$ 所以 $\frac{7}{39}$ 大

圖 82

「分數的認識」之學習單

4. 說說你在學習分數的過程中，有像古埃及人或歐洲人這樣的痛苦、焦慮或困惑嗎？

有，因為分數的加減法要通分很麻煩。

圖 83

「單位分數」與幾何圖形的創作發表



小結

研究二的結果，分成二個部分說明。其一是文本的設計歷程可依據 ADDIE 課程設計模式，建立「分數識讀文本教案摘要表」，再由「執行評量摘要表」實踐預期目標、執行過程、尋找落差原因、以及解決落差原因策略的四個步驟。此部分的研究得到三個設計要點：文本格式規格化、避免冗長程序性操作、以及避免簡答或模糊抽象的提問。此種設計結果讓學生易於閱讀，也有助於教師引導閱讀，像版面部分以撲克版的 ♠、♥、♦、♣ 做為每段的開端、每篇文章內容重點避免過多而增加學習負荷、每篇最多以 4 頁為原則，其中 1-2 頁為文本學習區，第 3-4 頁則為反思與練習區...等；將格式規格化，學生也就熟悉文本模式易於閱讀。文字描述也力求直白且精簡、對於想要強化的識能部分，若是教科書中尚未接觸到的，則會增加些文字或圖形的篇幅與

活動。最後則是在反思回饋部分盡量修正，讓學生能聚焦回應或便於學習者自行反思。同時本識讀文本設計亦改變學生對固有的數學文本形式觀感，以及對分數學習僅止於計算概念的固有想法。

其二是「知行識」向度的設計，具體研究結果如下：以視覺操作以及單位分數引入，可檢核與啟發分數知能的學習；技能的學習部分，如分數的四則運算可使用單位分數的概念進行一致性的操作，同時在國中階段應多提供代數思維的學習機會，因此在文本設計中應避免繼續使用離散量 (如 pizza 的切割) 的表示，可改以連續量如緞帶的剪法等操作模式；識能部分，則以生活應用問題提供解題的表徵能力，文本設計可連結分數與幾何創作概念的教學活動，讓學生在活動中自然意識到單位分數的意義，並提供閱讀素養欣賞，建立對分數學習的自信。此外，研究二的文本設計亦採用多元的評量模式，如文本閱讀整理、隨堂練習、具體操作活動、學習單、學習日誌、作品發表、總結性評量等，可具體觀察學習的障礙與改變。

研究三 識讀文本實徵研究一以負數為例

一、「負數識讀文本」對學生負數素養表現之影響

研究者將學習者在前後測對「負數的認識」的文字描述回饋，依表 23 分類 (即五種等級)，由高至低依序是：「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」，利用其結果進行前後測數據差異分析，檢核學習前後對於「負數的認識」之理解變化，並以 McNemar-Bowkert 法檢驗兩組各自在前後測之學習表現差異，如表 36。可以看出實驗組學生在前後測上分類百分比達顯著差異 ($\chi^2 = 37.133, df = 10, p < .05$)；對照組學生前後測之分類百分比則無顯著差異。又表 37 說明兩組在前後測的分類百分比，實驗組學生在學習介入前後，「識能理解」從 2.4% 提升 25.9%，「錯誤理解」及「字詞誤解」，分別從 11.8% 降至 2.4%，以及從 23.5% 降至 10.6% (引自陳玉芬等，2023)。

表 36

以 McNemar-Bowker 檢定「負數的認識」學習前後的差異表現

組別／有效觀察值個數 N	數值(χ^2)	自由度(df)	漸近顯著性(p)
實驗組／N=85	37.133	10	< .001
對照組／N=41	7.533	9	.582

表 37

前後測問卷對「負數的認識」理解分類百分比

組別	識能理解	一般理解	錯誤理解	字詞誤解	無法表達
實驗組(前測)	3.5%	36.5%	11.8%	23.5%	24.7%
實驗組(後測)	25.9%	40.0%	2.4%	10.6%	21.2%
對照組(前測)	9.8%	58.5%	4.9%	17.1%	9.8%
對照組(後測)	17.1%	56.1%	4.9%	17.1%	4.9%

二、「負數識讀文本」對提升負數素養的表現

首先檢視兩組前測間是否有差異。由表 38 看出進行識讀文本教學前，實驗組前測平均分數顯著低於對照組平均分數，說明兩組在初始能力上即有差別，因此對於兩組在後測分數方面，我們將以 McNemar Bowkert 法檢驗兩組各自在前後測上，學習表現之差異分析。同時，我們也發現數學成就的段考成績，在兩組間的分數未達顯著差異，說明實驗組在每週少了一節正課的情況下，其數學能力(段考成績)未顯著低於對照組(陳玉芬等，2023)。

表 38

實驗組與對照組相關數學表現

數學表現	組別(N)	總分	平均數(標準差)	平均數差(I - J)	顯著性
前測	實驗組 I (91)	19	7.11(4.463)	-2.33	.004
	對照組 J (45)	19	9.44(4.203)		
段考成績	實驗組 I (88)	100	60.68(26.714)	-2.52	.595
	對照組 J (45)	100	63.20(23.766)		

表 39 則關注於實驗組在識讀文本介入後，「知行識」三個向度表現是否與對照組的表現有顯著差異。

表 39

實驗組與對照組在後測的「知行識」向度共變異數分析摘要表

變異來源	依變量	SS	df	MS	F	顯著性
截距	知	289.878	1	289.878	144.892	<.001
	行	99.956	1	99.956	56.432	<.001
	識	53.768	1	53.768	18.431	<.001
組別*	知	4.218	1	4.218	2.108	.149
	行	.007	1	.007	.004	.950
	識	5.097	1	5.097	1.747	.189
前測	知	62.892	1	62.892	31.436	<.001
	行	68.717	1	68.717	38.796	<.001
	識	139.990	1	139.990	47.986	<.001
組別	知	5.770	1	5.770	2.884	.092
	行	.123	1	.123	.070	.792
	識	18.986	1	18.986	6.508	.012
誤差	知	234.076	117	2.001		
	行	207.238	117	1.771		
	識	341.322	117	2.917		
總誤差	知	4282.000	121			
	行	2243.000	121			
	識	2741.000	121			

我們以組別為獨變項、前測為共變項，進行 MANCOVA 分析。在變異同質性檢定方面，「知行識」的 Levene 檢定分別為 $F(1, 119) = 1.189$ 、 $p = .278$ ； $F(1, 119) = 1.159$ 、 $p = .284$ ； $F(1, 119) = .693$ 、 $p = .407$ ，即未違反變異數同質性假定。由 MANCOVA 的結果，得到 Wilks' $\lambda = .921$ 、 $F(3, 115) = 3.280$ 、 $p < .05$ 、 $\eta^2 = .079$ ，代表整體而言，兩組之間有所差異。接著再檢視個別依變項，結果指出，「知」與「行」兩向度在組別上無顯著差異，而「識」向度在組別效果則具顯著差異， $F(1, 117) = 6.508$ 、 $p < .05$ 、 $\eta^2 = .053$ 。「識」的組別效果方面，是在控制前測之情況下，模式估計之平均數在實驗組 ($M = 4.622$) 顯著高於對照組 ($M = 3.369$)，見表 40 及圖 84。

表 40

模式估計兩組在後測「知行識」各向度之平均數與標準差

測量變項	組別 (N)	各向度總分	平均數	標準差	95%信賴區間	
					下界	上界
知	實驗組 (85)	10	5.793	.157	5.481	6.104
	對照組 (37)		5.407	.261	4.891	5.923
行	實驗組 (85)	7	4.072	.148	3.779	4.366
	對照組 (37)		3.871	.265	3.386	4.357
識	實驗組 (85)	7	4.622	.190	4.245	4.998
	對照組 (37)		3.369	.315	2.746	3.992

(資料引自陳玉芬等，2023，頁 48)

圖 84

實驗組與對照組之後測「知行識」各向度平均成績比較長條圖



(資料引自陳玉芬等，2023，頁 49)

除此之外，表 41、42、43 分別是後測中的知能、技能、識能具體表現之佐證 (資料引自陳玉芬等，2023，頁 50)。表 41 知能檢測以聽寫為例，其中第一題表達正確率 88.8%，如表 41-(a)、第二題正確率 77.7%，如表 41-(b)，亦即此二題答對率皆超過 75%，而表 41-(c)則是二題皆錯之錯誤型式。

表 41

知能測驗示例回饋

聽力測驗 班級:107 座號:02 第一題: -2^{+3} 第二題: $2^{-(-3)}$	聽力測驗 班級:107 座號:22 第一題: -2^{+3} 第二題: 2^{-3} +4	聽力測驗 班級:105 座號:14 第一題: $- $ 第二題: 5 ✓
(a) 第一、二題皆正確的表示法	(b) 第二題未能明確以括號分辨減與負的差異	(c) 答案皆錯類型

技能測驗示例以 $-3 - 5 - 7$ 與 $2 - 8 + 2$ 計算為例，第(2)題答對率 62.2%、第(3)題答對率 81.1%，如表 42-(a)；表 42-(b)則分別表示第 (2)題及第(3) 題答錯且為 DFMS 錯誤型示例說明，這些結果說明文本設計可以修正學生常犯的計算錯誤，以及偵測學生是否有 DFMS 的學習障礙。

表 42

技能測驗示例回饋

(2) $-3 - 5 - 7$ $= -8 - 7$ $= -15$	(3) $-8 + 2$ $= -6$ 1,	(2) $-3 - 5 - 7$ $= 7 + 3 + 5$ $= 10 + 5$ $= 15$	(3) $-8 + 2$ $= -10$
(a) 答對完全正確		(b) DFMS 的錯誤型作答示例	

識能檢測示例則以描述「減」與「負」的差異，主要目的在於培養學習者能在學習之後，檢測自己的觀點或獲得的知識是否有所改變或修正，回答情形如表 43。

表 43

識能測驗示例回饋

(2) 承(1)，請寫出你覺得式子中，讀「減」或讀「負」的意義 負是向後退，減是向左轉。 ✓	(2) 承(1)，請寫出你覺得式子中，讀「減」或讀「負」的意義。 讀減是兩數相減。讀負是負小於 0 的數。 ✓
反映說明學生對於文本內容的理解	透過文字說明，已成功傳達「減」與「負」在二元或單元運算間的差異。

小結

研究三仍使用「概念譬喻」與「視覺操作」設計策略進行負數的多元概念學習。研究指出，實驗組在使用負數識讀文本學習後，對於負數的具體認識與描述相較於對照組的學生，具有正向的進步，在「負數的認識」之教學目標上亦說明實驗組有釐清負數的抽象概念表現。另外，研究者使用段考成績，比較兩組間的分數未達顯著差異，說明實驗組在每週減少一節正課的情況下，其數學成就(段考成績)未顯著低於對照組。根據研究三的實徵結果，說明在對照組前測表現下透過共變數分析，實驗組的識能表現達顯著差異。除此之外，對於負數學習過程中的「負號分離」(DFMS)學習障礙，

負數識讀文本中提供具體得到改善的佐證。這些都說明負數識讀文本可以達到「識」向度以及負數素養提升的目的。

第五章 結論與建議

本研究共有三個研究面向：研究一，分析七年級數學教科書中負數與分數的學習內容中「知行識」內涵；研究二，分數識讀文本開發歷程設計；研究三，針對完成的負數數學識讀文本進行實徵研究。基於此，在結論部分針對此三個研究問題回應其研究結果。在建議部分則針對上述研究結果亦分為兩小節說明。第一小節，教科書教材內容的設計；第二小節，識讀文本教材設計原則，據此做為本研究所提出的具體建議。

第一節 結論

研究一：三家版本負數與分數教材內容之「知行識」內涵

一、國中教科書內容「識」向度教材偏少且獨立呈現

甲、乙、丙三個現行版本為現今中學數學學習的主要參考版本，在前表 27 (頁 81) 可知「識」向度的布題比例，乙版在三家版本中「識」向度的內容占比最高，若扣除獨立區塊，「識」向度占比仍為最高但僅占 16.7%，丙版在扣除獨立區塊後，甚至只到 3.6%，且「識」向度設計偏低。再依據「各版小概念之知行識鋪陳樣式」折線圖分析，較寬的平緩區段代表較有兼顧知行識概念的面向，但就各家版本之折線圖觀之 (圖 34、35、36，頁 83)，顯示在設計每個小概念時，「知、行」向度皆遠多於「識」向度，圖中也可看出在各版小概念中知能與技能鋪陳都很豐富，至於識能的鋪陳，只有兩個版本在 2 個小概念上有安排，另一版本則完全沒有識能鋪陳，說明各版本在知能、技能的鋪陳上仍著墨較多，相對缺乏識能理解的學習機會。此外，「識」向度的問題在例題說明與隨堂練習中極少出現，隱涵著「識」向度與應用的連結性似乎是獨立的，顯得數學與生活的應用缺乏橫向連結的題型。

同時，在各版設計架構上最大的不同處當屬每個節末、章末與冊末，會有較多獨立區塊內容。至於各版本共同的特色，也是對於所要培養的數學能力完全一致的設計方式，即「重點回顧」與「自我評量」，前者強調對知識概念的理解，後者著重於技能的培養。

二、各版本之教材設計內容有趨同性亦強調設計者觀點

在研究一中，三個版本各小概念的「知行識」三個向度設計取向比例，依據卡方檢定結果，可知「知行識」三個向度的布題比例並未因版本的不同而有所差異，也就是說三個版本皆為知能與技能的布題較多，識能布題較少。其次，各版小概念為「識」向度設計者，皆不約而同以獨立區塊方式處理，其設計初衷為識能向度(即概念連結或探索)，但分析結果呈現仍為知向度或行向度的表徵方式。各版的章末或冊末也都會安排 3 至 5 頁的多元性探索主題，內容豐富且有趣，但因為安排於章末或冊末，相對讓教師或學習者認為這些主題的安排是補充教材，而非核心教授之概念，無法呈現出版社用心設計的效益；且在國中階段，分數學習皆為四則運算的精熟，未有更深度的知識連結與提供充份代數思維訓練的機會。

至於 108 課綱強調核心素養之一的計算機應用，在負數單元，甲版設計面向為 (0, 0, 0) (未出現此布題)、乙版設計面向為 (1, 1, 0) (有知能與技能)、丙版設計面向為 (1, 0, 0) (僅有知能)；在分數單元，甲版設計面向為 (0, 1, 1) (具有技能與識能)、乙版設計面向為 (0, 0, 0) (未出現此布題)、丙版設計面向為 (0, 1, 0) (僅有技能)，這說明對於計算機應用此一概念的設計與重要性，各家看法是多元的，也說明一個概念的呈現方式，亦取決於教材設計者的思維。若換一角度審視，亦隱涵了教材設計者若具有高觀點的多元性策略設計，自然也提供更多學習觸角。

研究二：「分數數識讀文本」開發歷程設計

一、建立有「監督—循環」式的文本設計

本文本設計依循 ADDIE 模式進行，強調必須先有學習的關鍵點(即學習目標)，以及預期達成之目標，在反思執行過程中尋找與預測目標之間的差距，並訂定改進之決策，所以在課程設計初即應建立「識讀文本教案摘要表」，然後透過學習回饋進行修正。並依照著「執行評量摘要表」實踐歷程方式，針對相關的知能、技能、識能內容進行具體評估與檢核。諸多文本內容的專有名詞亦有所修正與刪減、並請教育專家修正文句不宜學術性太強，以免認知負荷太高可能會失去閱讀的耐性，且對於版面的設計宜段落標示清楚具可讀性，文本設計務必力求言簡意賅，不需太多

文字描述，但亦應有明確指引的敘述，避免學生浪費太多時間在文本閱讀上，頁數的設計仍訂為 4 頁內容的原則。

二、 視覺操作可檢核分數知能

分數識讀文本之設計在內容方面，不僅讓數學與生活貼近，同時會有意識地安排學生感受分數、小數、帶分數等的相關性連結，提供想像這些數所帶來的意義與數學表徵的理解，尤其是透過面積概念的視覺操作，理解一般分數與單位分數的倍數關係，不僅提供技能熟練，更對單位分數的意義更加理解。在單位分數的活動設計中，亦由教學活動進行麵包切割，使學生自然產生單位分數在生活中的意義。

三、 提供學習代數思維的機會

在數學學習領域中，如何讓學習者對某個概念缺乏背景知識時，提供適時協助是很重要的。此文本以單位分數概念連貫分數的意義與分數四則運算，也替換口訣式的背誦，因為當學生無法想像時，就容易變成有「看」卻沒有「到」(楊德清、洪素敏，2008)。其次，在文本中以緞帶裁剪(連續量設計)取代 pizza 的整數分割(離散量設計)，都是無形中在進行合理情境的代數思維練習。

四、 識能設計聚焦於生活解題與數學欣賞

本識讀文本的設計目的之一，即在於將數學知識與生活應用做連結，因為透過連結發現意義，不僅讓知識更加擴增，更能深化學習的洞察 (Johnson, 2002)。藉此培養學生習以為常但又習焉不察的數學素養，如：直尺在生活中是常見的，甚至是數學課必備之工具，但學生卻很少理解上面刻度的精確單位是如何表示，而這樣的學習亦可支援理化課的單位測量；應用問題一直是大部分學生所畏懼的問題，在文本中則設計與自身有關之疫苗問題，學生因為關心或好奇而產生解題的興趣；針對學生對於分數的恐懼，於文章開始即有一段古歐洲人對於分數的學習亦深感苦惱，讓學生對於分數學習(或數學學習)感到不孤獨，可能也因而拾起對數學學習的信心與價值的欣賞，而最後對於單位分數與幾何的連結創作，更是深刻地將分數與面積做了完整的連結。

五、 文本設計提供多元檢核模式

每一篇文本設計，皆有「閱讀整理」部分，其目的就在協助學生聚焦於該單元的學習重點，或是提供讓學生有「換句話說」的反思空間以進行更具體有意義的回饋。此「閱讀整理」有概念澄清的目的，亦做為觀察學生對於文本理解的程度，讓教師更加瞭解學生困惑之處，讓學生有時間學習，也增加學生思考的機會，也可視為提供學生緩衝時間認真思考，就像教師在教學過程中的「刻意暫停」，對學習會有正遷移。

文本文末還有「隨喜練習」，讓不破壞學生對數學興趣的情境下自由學習，而對於技能演練部分，更於單元內容結束時提供線上科技工具實際演練，除了提供計算答案的核證之外，更重要的是帶領學生能熟悉現代的科技工具，並明瞭何時何處可以運用科技。此外，文本依據學習需求，必要時會在該單元增加學習單的設計以及學習日誌的自我考核，也可做為師生溝通的橋樑。最後在學習單元結束時的學習檢核卷，其功能即提供教師應有的訊息，確定是否已達到教師的預期學習目標，亦做為學習成效的量化表現。

六、 聚焦產生好提問

本識讀文本在用字遣詞上亦避免模糊、過於廣泛的語句。在提問或設計之初必須先思考如何有效提問(視野、視角、視點)(洪震宇, 2022)。避免模糊、範圍過廣、或是無法聚焦之用語，而無法明確檢測學習者的學習程度。換句話說，在何種「視野(觀點)」脈絡下提問，如預期學習目標(識能培養、概念澄清、數學欣賞、生活應用…)為何？預期目標即為提問者(設計者)的「視野」脈絡，接著進入「視角」脈絡，透過內文鋪陳，讓學習者反思學習的目的，最終則是「視點」脈絡，聚焦於學習者可具體回應我們的預期目標，如：文本末的閱讀整理提問，即分為知能、技能、識能之具體提問，讓學習者的回應或陳述亦能成為有效回饋。

研究三：「負數識讀文本」實徵研究

一、 負數之「識讀文本」可提升識能表現

研究三之「概念譬喻」與「視覺操作」，如：「負非減」、「負是倒退」、「負即相反」等多元譬喻，從學生回饋分析是相當具體的。比方說：「原來負與減是不同的，

也更容易計算了」、「原來 -1 比 -5 大」、「負數不代表一定是不好」、「不用像以前要倒過來寫可直接計算」、「更加知道如何表現在數線上」、「現在能算更小的數了」。另外「負數的認識」之教學目標，在表 37 (頁 115) 中也說明，同樣是面對一個全新的負數概念或符號，但實驗組表現在普通以下 (含) 者「錯誤理解」、「字詞誤解」、「無法理解」的修正率分別從 11.8% 下降至 2.4%、23.5% 下降至 10.6%、24.7% 下降至 21.2%，另一方面在「負數的認識」的識能表達，比例卻由 3.5% 提升至 25.9%，說明識讀文本可以協助學生釐清抽象概念，以及負數素養的提升。

二、「負數識讀文本」學習可提供負數的素養學習

研究三實驗結果，在教學前的前測分析、以及數學段考成績分析，實驗組表現皆低於對照組，然在施行負數識讀文本教學後的後測分析，透過共變異數分析後可看出實驗組在識能表現達顯著差異，且數學段考成績並無顯著差異。據上述這些說明可推論透過本研究發展之識讀文本教學，可以有效改變負數的素養學習，並且不會以降低筆試成績為代價。

第二節 建議

在本節中，基於研究者對教科書分析、文本設計與實徵的結果，分別給予以下二個面向建議以供參考。

一、教科書教材內容的設計

從結論一可以知道，各版本對於課程架構的識向度如何在教材中實踐，仍有很大的改善空間。在此提供以下 2 個建議：

(一) 教材概念題型宜兼顧知能、技能、識能

NCTM (2000) 在概念理解對於學習數學的重要性中指出：概念性理解是程序流暢性的重要元素之一，明確揭示了概念性理解與程序性計算間的緊密緊關聯，兩者缺一不可。又一些研究亦指出，教科書應提供孩子更多不同的學習機會，因為這些學習機會影響孩子的學習 (楊德清、洪素敏，2008；Hiebert & Grouws, 2007; NCTM, 2004; National Research Council, 2001)。研究一的教材分析中，發現布題策略大致都分為二大區塊，知能與技能的培養以概念陳述、接著例題、接著隨堂練習之程序發展；識能

部分則大都安排於獨立區塊或節末、章末、冊末，這樣的安排易於被忽略。若能將這些豐富的識能教材融入於日常學習中，更能啟發多元概念連結、反思，或知識的縱向連結與生活的橫向關連探索，不僅能提供數學演算能力的流暢性，亦能提供學習者對於數學在生活中的實用性，以及欣賞數學多元性的價值。

(二) 落實探索問題的學習目的

「數學素養」的定義其中之一即是：學習用數學溝通 (they learn to communicate mathematically)。以圖 85 為例，此隨堂練習顯得有些制約，即在例題說明「三一律」之關係後，隨後即附上「隨堂練習」，使得它屬於「知」(記憶)的範疇。

圖 85

識能的探索活動

隨堂練習

重新布題

老師心中想了一個數 a ，
小翊猜說：「這個數比 $-\frac{3}{4}$ 大。」
小妍猜說：「這個數比 $-\frac{3}{4}$ 小。」
結果老師說兩個人都猜錯了，那麼 a 應該是多少呢？

對學生而言，「三一律」這概念是可以在未學習之前可先進行的邏輯訓練，待學生思考後再統整此規律將更使學習更有感。就像教科書中對於負號的學習，始終未能為學生釐清「減與負」的意義，各版都是在操作「負負得正」的技能操作口訣，然本識讀文本中即會設計有別於一般教科書內容，在負數單元增加了聽寫(說)的知能探索活動，這讓學生能具體感受「減與負」的差異。因此學習正確表達與溝通亦是本實驗教學目的之一。建議教科書內之活動應善用多種不同形式(連續量和離散量)的具體物以幫助學生學習。讓教科書真正能提供孩子更多不同的學習機會。

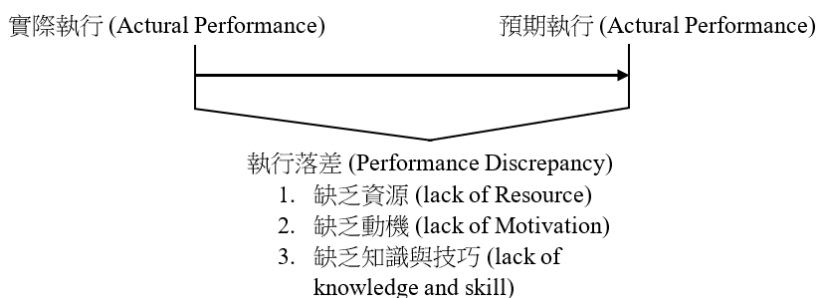
此外，教科書應該要能提供文化面向的學科知識相關概念，讓學生有上下脈絡的認識與洞察的機會，學生可以在發現上下文的脈絡中尋找相關的關係，對他們來說是很具有價值與意義的 (Johnson, 2002)。

二、識讀文本教材設計原則

綜合結論二與結論三，提供 3 點建議給予有志於參與文本設計者的參考。

(一) 建立「監督—循環」的文本設計模式

文本設計應具有一個可隨時監督進度或反覆修正的機制，直到文本與預期目標的落差達到可接受範圍，如下圖 (即前圖 7) 所示。



亦即在文本設計過程中，建立一個可監督與修正的進度表，觀察其落差原因是基於學習動機的低落？或是教學媒體資源等的準備不夠恰當？亦或是學習者或設計者對該文本之知識概念或技巧不夠精練？例如，在研究二中，研究者於教學現場施行「分數的除法」過程中，文本設計原意是由「乘除互逆」的原始概念引入，但在教學過程中，學生對「乘除互逆」此專有名詞似乎充耳不聞，再加上已學會分數乘法口訣，故對此內容描述則顯缺乏耐心，直接從隨堂練習開始計算，經過訂正答案，發現完全正確即表示文本內容可忽略。這樣的發現即在下一次的文本中予以修正，以及增加具體描述，如：文本設計提供：我讀到，我覺得，我發現，我未來……等的學習機會，讓文本的內容更聚焦 (葉惠貞，2021)，做為找出落差原因與解決落差的策略。

(二) 文本設計應提供多元的學習表徵

綜觀識讀文本設計，其學習表現的表徵方式除了一般的例題演練，還有概念統整的反思回饋區，以及質性作品發表與心得回饋。這些都會增加學生自我反思與聚焦學習的概念，也清楚引導學生與內在的自己對話，亦因題目的多元設計，可以看見學生的多元學習表現，諸如：學習日誌、幾何創作或學習心得，都使得更能看得見學生學習的軌跡。又如負數抽象的感受，文本透過四格漫畫的教學活動，觀察學生對於負數的想法，如圖 86。不論是教材內容、例題說明，還是隨堂練習，只要有更多縱向深度

或橫向廣度的知識連結，不僅能看到更多學習面向或質性觀察的內容，亦可看見其思維的發展。但必須提醒教學者：操作活動的目的，僅是做為符號運思的過渡工具，習得負數運算才是最終的學習目標。

圖 86
負數檢核的多元表徵



(三) 避免課程設計的學生之惡

課程設計應依據問題（與數學現象有關的）內容、（與學生生活經驗有關的）情境、（與課綱有關的知識和能力）課程，和（不同需求層級的）認知四個面向設計問題，而這些面向的培養正是數學素養的重點之一 (Lustick, 2010)。本研究所倡導之文本設計，從學習的目標知識設定開始，然後思考如何聚焦發展和深化重要概念之理解，嘗試聚焦提問 (focus question)，再轉化到學習表現。但有時會流於因為活動設計而忽略教學目標，或因為教學目標內容豐富而忽略學生接受程度 (Wiggins & McTighe, 2014)，例如在實行單位分數與面積概念連結時的創作設計，即造成知識與技能的機械式反覆練習而減少核心概念的觀注。

總結

本研究主要在發展一個國中數學識讀文本的開發，然後進入實徵研究探究其實施成效。然對於一個針對數學發展的識能文本，確實是一個初嘗試。特別一提的是在本研究中，亦發展一份「知行識評量規準」，做為在學習識向度時可參考的一個評鑑準則，但對於「知行識」向度的界線定義，研究者著實認為其間之細膩程度，猶如個人每天的呼與吸之間的變換，那瞬間的變化是很難分得清，所以研究者深覺「知行識評量規準」仍可以有更細緻的實驗與成熟的規範，亦可做為下次研究改進的方向。

至於更深層之識能培養，如：根據論述支持自己的論述或對數學價值的欣賞，雖然文本中以及課堂上皆有討論，但受限於上課時間有限，以及難以在測驗評量上做更為客觀之量化評論，此為研究有所限制之一。限制之二則是對於文本閱讀的理解「導引性」，學生閱讀時是否會卡住某些重要關鍵，或是文本設計的教學活動，是否足以彰顯其核心概念，以及文本對於異質學生的影響等問題。限制之三則是本研究基於方便性抽樣實驗，故僅止於該校一年級學生之實驗結果，無法做全面性推論。基於本研究聚焦於識讀文本的知識材料設計，對於上述發現之問題尚覺力有未逮，這些亦都可做為下次的研究目標。

當然，除了上述對文本建議之外，教師風格與教師對教學事件的優先順位，對小學和初上國中的學生而言，其影響亦甚鉅大 (Höfer & Beckmann, 2009)，老師如何加強對課堂數學素養的重視、強調有效、實用和與現實生活相關的數學問題的優先順序，也間接影響學生的學習與態度 (Harlaar, et al., 2007)，這些影響教學成效的因素亦可做為往後文本施行之實徵研究。

參考文獻

- 水心 (1979)。國民教育論叢。臺北市：臺灣商務印書館。
- 左台益、李健恆 (2017)。從教學事件分析國中數學教科書與備課用書之設計脈絡——以三角形性質單元為例。教科書研究，10 (2)，67-97。
- 左台益、李健恆、潘亞衛、呂鳳琳 (2018)。臺灣、新加坡及巴西數學教科書中數學素養內涵之比較—以畢氏定理為例。教科書研究，11 (3)，33-62。
- 呂秀蓮 (2019)。課綱為本課程設計經驗之研究：以國中教師為對象。教育實踐與研究，32(1)，1-32。
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告。取自 <http://literacytw.naer.edu.tw/data/cht/20140801/20140801lu4v194.pdf>
- 林芳玫、洪萬生 (2009)。數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說。科學教育學刊，17 (6)，531-549。
- 林保平 (2005)。正負數的概念及其加減運算。科學教育月刊，277，10-22。
- 林福來 (2021)。二十一世紀技能數學素養教學與評量的指標。載於教育部國教署 (編)，央團數學月刊。取自 <https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/42440/119817.pdf>
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華 (2013)。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究「整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告」。新北市：國家教育研究院。
- 柯華蕙著、陳明蕾編 (2022)。語言、語文與閱讀。新竹市：國立清華大學出版社。
- 洪有情編 (2023)。國中數學 1 上、1 下 (教科書、習作、教師手冊)。臺北市：康軒。
- 洪裕宏 (2011)。定義與選擇國民核心素養的理論架構。研習資訊，28(4)，15-24。
- 洪震宇 (2022)。精準提問。臺北市：漫遊者文化。
- 徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊，21(1)，25-48。
- 徐偉民、柯富淪 (2014)。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之比較。教科書研究，7(3)，101-141。
- 徐偉民、黃皇元 (2012)。臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析。課程與教學季刊，15 (3)，75-108。
- 秦麗花 (2016)。數學閱讀指導的理論與實務。臺北市：洪葉文化。

- 秦麗花、邱上真 (2004)。數學文本閱讀理解相關因素探討及其模式建立之研究~以角度單元為例。《**特殊教育與復健學報**》，**12**，99-121。
- 國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心 [心測中心] (2021)。十二年國教課綱國民中學標準本位評量示例彙編：數學領域。臺北市：作者。取自 <https://sbasa.rcpet.edu.tw/SBASA/documents/Math.pdf?20200805>
- 國家教育研究院 (2021)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。新北市：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>
- 張幼賢編 (2023)。國中數學 1 上、1 下 (教科書、習作、教師手冊)。臺北市：翰林。
- 張芬芬 (2012)。文本分析方法論及其對教科書分析研究的啟示。載於國家教育研究院 (主編)，**開卷有益：教科書的回顧與前瞻** (頁 161-197)。臺北市：高等教育出版社。
- 張芬芬、陳麗華、楊國揚 (2010)。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應。《**教科書研究**》，**3**(1)，1-40。
- 張春興 (2012)。教育心理學—三化取向的理論與實踐。臺北市：東華書局。
- 張祖忻、朱純 (1995)。教學設計—基本原理與方法。臺北市：五南書局。
- 教育部 (1973)。高級中學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部 (2005)。普通高級中學課程暫行綱要。臺北市：作者。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北市：作者。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。取自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>
- 郭明田 (2021)。國中數學素養導向教學設計與學習成效之行動研究。《**臺灣教育評論月刊**》，**10** (10)，196-228。
- 陳玉芬、單維彰 (2021)。符號語言學做為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例。《**臺灣數學教師**》，**42** (1)，1-16
- 陳玉芬、單維彰 (2022)。數學識能評量初探—以 7 年級分數主題為例。《**臺灣教育評論月刊**》，**11** (9)，118-123。
- 陳玉芬、趙子揚、單維彰 (2023)。數學識讀文本教學對數學素養之影響—以負數單元為例。《**臺灣數學教育期刊**》，**10** (2)，27-54。 [http://doi.org/10.6278/tjme.202310_10\(2\).002](http://doi.org/10.6278/tjme.202310_10(2).002)
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。臺北市：教育部

- 陳金尚 (2016)。國中數學素養之數位評量設計與探討 (未出版論文)。國立臺灣師範大學數學系研究所碩士論文。
- 陳冒海 (1989)。我國國民中學數學課程之發展。教育資料集刊，14，157-194。
- 陳冒海編 (2023)。國中數學 1 上、1 下 (教科書、習作、教師手冊)。臺北市：南一。
- 陳盈如、左太政、劉嘉茹 (2022)。PISA 視角下：數學素養概念架構與量表工具之發展與驗證。科學教育學刊，30 (2)，121-147。
- 陳珮珊、秦爾聰 (2013)。數學探究教學對國中七年級學生數學素養影響之研究。科學教育月刊，361，37-49。
- 陳麗華 (2008)。評介「為學習而設計的教科書」及其對我國中小學教科書設計與研究的啟示。教科書研究，1 (2)，137-159
- 陳嘉皇 (2007)。國小三年級學童代數推理教學與解題表現研究。高雄師大學報：自然科學與科技類，23，125-150。https://doi.org/10.7060/KNUJST.200712.0125
- 單維彰 (2016)。素養、課程與教材—以數學為例。國家教育研究院《教育脈動》電子期刊 5。https://bit.ly/3bcSYBj
- 單維彰 (2017)。以知行識做為數學素養培育架構的課程綱要內涵。第 19 屆「兩岸三地課程理論」研討會，台北市：國立臺北教育大學。
- 單維彰 (2018a)。論知行識做為素養培育的課程架構—以數學為例。臺灣教育評論月刊，7 (2)，101-106。
- 單維彰 (2018b)。108 數學課程的展望。國家教育研究院「21 世紀人才培育：教育系統之自主·跨域·創新」國際學術研討會，新北市。
- 單維彰 (2018c)。中學數學教育的半世紀回顧及其啟示，教育研究月刊，294，4-18。
- 單維彰 (2021)。數學素養課程的轉銜。課程研究期刊，16 (1)，1-16。
- 單維彰 (主編) (2020)。分科教材教法：中學數學教材教法。臺北市：五南。
- 曾志朗、柯華葳、李俊仁、陳明蕾 (2017)。105 年度「十二年國民基本教育實施計畫提升國民素養實施方案」。國家教育研究院研究報告 (NAER-105-12 -B-2-05-00-1-05)。新北市：國家研究院。
- 游自達 (2016)。數學素養之意涵與其變遷。國家教育研究院《教育脈動》電子期刊 5。https://bit.ly/3bcSYBj
- 黃嘉雄 (2017)。十二年國教素養 導向教學的觀念迷思。論文發表於國立臺北教育大學舉辦之「第十九屆兩岸三地課程理論研討會」，臺北市。

- 楊德清 (2018)。未來中小學數學教科書發展新方向之我見我思。臺灣教育評論月刊，7 (10)，151-155。
- 楊德清、洪素敏 (2008) 分數補救教學之歷程的研究。教育研究與發展期刊，4 (2)，85-118。
- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。教育科學研究期刊，60 (1)，33-72。
- 葉惠貞 (2021)。讀繪本，學素養。天下文化。
- 葉興華 (2011)。我國國中小教科書使用問題及促進未來教科書使用之道。教師天地，174，62-68。
- 圖地 [@todemap] (2022，7 月 30 日)。誰是國中課本的霸主[臉書貼文]。臉書。
https://www.facebook.com/110705290699375/posts/566913121745254/?locale=ms_MY
- 歐用生 (2000)。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發(主編)，教育研究法(頁 229-254)。臺北市：師大書苑。
- 蔡清田 (2020)。十二年國民基本教育課程綱要研修的核心素養。臺灣教育評論月刊，9 (1)，頁 8-12。
- 鄭章華、單維彰 (2015)。素養導向之數學教材初探。邁向十二年國教新課綱的第一哩路：從課綱轉化到學校教育的系統性變革學術研討會。新北市：國家教育研究院。
- 鍾靜、林鳴芳、白玉如 (2014)。以不同觀點分析問題探討 芬蘭國小數學教科書。教科書研究，7 (1)，31-79。
- 蘇意雯 (2023)。國中數學史數位閱讀文本之開發初探。臺灣數學教育期刊，10 (1)，1-28。 [http://doi.org/10.6278/tjme.202304_10\(1\).001](http://doi.org/10.6278/tjme.202304_10(1).001)
- Wiggins, G., & McTighe, J. (2014). 重理解的課程設計 (賴麗珍譯)。臺北市：心理出版社 (原著出版於 2005)。
- Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, 56(8), 786-795.
- Albert, L. R., Corea, D., & Macadino, V. (2012). *Rhetorical ways of thinking: Vygotskian theory and mathematical learning*. Dordrecht: Springer.
- Alibert, D., & Thomas, M. (2002). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed). *Advanced Mathematical thinking* (pp. 215-230). Netherlands: Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_13

- Altıparmak, K., & Özdoan, E. (2010). A Study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 31- 47. <http://doi.org/10.1080/00207390903189179>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representation in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.
- Areepattamannil, S. (2014). International note: What factors are associated with reading, mathematics, and science literacy of Indian adolescents? A multilevel examination. *Journal of Adolescence*, 37(4), 367–372. <http://doi.org/10.1016/j.adolescence.2014.02.007>
- Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1986). The relationship Between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Berns, R., & Erickson, P. (2001). *Contextual teaching and learning: Preparing students for the new economy*. Retrieved on 12-12-2011 from http://www.cord.org/uploadedfiles/NCCTE_Highlight05ContextualTeachingLearning.pdf.
- Blair, K. P., Rosenberg-Lee, M., Tsang, J. M., Schwartz, D. L., & Menon, V. (2012). Beyond natural numbers: negative number representation in parietal cortex. *Frontiers in Human Neuroscience*, 6(7), 1-17. <http://doi.org/10.3389/fnhum.2012.00007>
- Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194–245. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.2.0194>
- Branch, R. M. (2009). *Instructional Design: The ADDIE Approach*. New York: Springer.
- Branson, R. K., Rayner, G. T., Cox, J. L., Furman, J. P., & King, F. J. (1975). *Interservice procedures for instructional systems development. Executive summary and model*. Center for Educational, The Florida State University.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: rationals as measurements. *J. Math. Behav.* 23, 1–20. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.12.001>
- Brozo, W., Shiel, G., & Topping, K. (2007). Engagement in reading: Lessons learned from three PISA countries, *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, 51(4), 304-315.
- Carpenter, T., Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M., Reys, R. (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 73, 329-338.
- Cervetti, G., & Pearson, P. D. (2012) . Reading, writing, and thinking like a scientist. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, 55(7). 580-586. <https://doi.org/10.1002/JAAL.00069>
- Chen, C. H., & Chiu, C. H. (2016). Collaboration scripts for enhancing metacognitive self-regulation and mathematics literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 263–280. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9681-y>

- Coiro, J., & Dobler, E. (2007). Exploring the online comprehension strategies used by sixth-grade skilled readers to search for and locate information on the Internet. *Reading Research Quarterly*, 42(2), 214-257. <https://doi.org/10.1598/RRQ.42.2.2>
- Cortina, J. L., Visnovska, J. & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 79-99. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0112-5>
- Damerow, P. (2007). The Material Culture of Calculation. In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, political and philosophical ramifications* (pp. 19-56). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789460911439_003
- Davis, O. L., & Hunkins, F. P. (1986). Textbook questions: What thinking processes do they foster? *Peabody Journal of Education*, 43(5), 285-292.
- de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*. Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.
- Department for Education (2013). The National Curriculum in England: Framework Document. Retrieved 2013.11.18, Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254336/MASTER_final_national_curriculum_11_9_13_2.pdf.
- Department of Basic Education (DBE). (2011). *Curriculum and Assessment Policy Statement (CAPS): Mathematical Literacy*. Pretoria, South Africa: Government Printers.
- Dick, W., Carey, L., & Carey, J. O. (2009). *The Systematic Design of Instruction* (7th ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Pearson.
- Dostal, H. M., & Robinson, R. (2018). Doing mathematics with purpose: mathematical text types. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies*, 91(1), 21-28, <http://doi.org/10.1080/00098655.2017.1357409>
- Draper, R. J. (2002). School mathematics reform, constructivism, and literacy: A case for literacy instruction in the reform-oriented math classroom. *Journal of Adolescent and Adult Literacy* 45(6), 520-529.
- Dym, C. L. (2004). *Principles of Mathematical Modeling* (2nd ed.). San Diego, CA: Elsevier Academic Press.
- Ekowati, K. C., Darwis, M., Pua Upa, H. M. D., & Tahmir, S. (2015). The application of contextual approach in learning mathematics to improve students motivation at SMPN. *International Education Studies*, 8(8), 81-86. <http://doi.org/10.5539/ies.v8n8p81>
- Fang, Z., & Coatoam, S. (2013). Disciplinary literacy: What you want to know about it. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, 56(8), 627-632.

- Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies*, 10(1), 24-38. <http://doi.org/10.5539/ies.v10n1p24>
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*. 4, 1-12. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>
- Gagatsis, A., & Maria, A. (2022). A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an “action research” concerning the application of the geometrical model of the number line. *Didattica della Matematica [DdM]*. 11, 9-32. <https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.1>
- Gagné, R., Wager, W., Golas, K., & Keller, J. (2005). *Principles of Instructional Design* (5th ed.). Belmont, CA : Thomson/Wadsworth.
- Gatabi, A. R., Stacey, K., & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, 24(4), 403–421.
- Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003–1024.
- Graven, M., & Venkat, H. (2007). Emerging pedagogic agendas in the teaching of Mathematical Literacy. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 11(2), 67-84. <https://doi.org/10.1080/10288457.2007.10740622>
- Haara, F. O., Bolstad, O. H., & Jenssen, E. S. (2017). Research on mathematical literacy in schools - Aim, approach and attention. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 285-284. <https://doi.org/10.30935/scimath/9512>
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. In D. Tall (Ed) *Advanced mathematical thinking*, (pp.54–61). Netherlands: Springer.
- Harlaar, N., Dale, P. S., & Plomin R. (2007). From learning to read to reading to learn: Substantial and stable genetic influence. *Child Development*, 78, 116-131.
- Heinich, R., Molenda, M., & Russell, J. D. (1982). *Instructional Media and The New Technologies of Instruction* (2nd ed.). San Francisco: John Wiley & Sons.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). The cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics* 27(1), 59-78.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Höfer, T., & Beckmann, A. (2009). Supporting mathematical literacy: Examples from a cross-curricular project. *International Journal on Mathematics Education*, 41(1), 223–230. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0117-9>
- Hoffer, W. W. (2020). *Developing Literate Mathematicians: A Guide for Integrating Language and Literacy Instruction into Secondary Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Jablonka, E., & Niss, M. (2014). Mathematical literacy. In S. Lerman, B. Sriraman, E. Jablonka, Y. Shimizu, M. Artigue, R. Even, R. Jorgensen, & M. Graven (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 391-396). Dordrecht: Springer.
- Jewitt, C., & Kress, G. (2003). *Multimodal Literacy*. New York: Peter Lang.
- Johnson, E. B. (2002). *Contextual Teaching and Learning: What It Is and Why It's Here to Stay*. Thousands Oaks: Corwin.
- Jürges, H., Schneider, K., Senkbeil, M., & Carstensen, C. H. (2012). Assessment drives learning: The effect of central exit exams on curricular knowledge and mathematical literacy. *Economics of Education Review*, 31(1), 56-65. <http://dx.doi.org/10.1016/j.econedurev.2011.08.007>
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/305033448_Making_Sense_of_Negative_Numbers on Oct 12, 2020.
- Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education* 35(4), 224–257.
- Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. (2020). Towards a mathematics textbook for supporting 21st century learning: The student perspective. *Journal of Physics: Conference Series*. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012037>
- Lakoff, G. & Johnson, M. (2003). *Metaphors We Live By*. London: University of Chicago
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books
- Lin, Y. H., & Tsai, L. T. (2021). Development of mathematics reading assessment: psychometric Evaluation Based on SEM and IRT. *International Journal of Education, Psychology and Counselling*, 6(38), 46-56.
- Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations, *Educational Studies in Mathematics* 30 (1), 39–65.

- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173–196. <https://doi.org/10.1023/A:1003606308064>
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Lustick, D. (2010). The priority of the question: Focus questions for sustained reasoning in science. *Journal of Science Teacher Education*, 21(5), 495-511.
- Mannaz, M. (1998). An expert teacher's thinking and teaching and instructional design models and principles: An Ethnographic study. *Educational Technology Research and Development*, 46(2), 37-64.
- Maryani, N., & Widjajanti, D. B. (2020). Mathematical literacy: How to improve it using contextual teaching and learning method? *Journal of Physics: Conference Series 1581*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1581/1/012044>
- Mason, J. (1980). When is a symbol symbolic? *For the Learning of Mathematics 1*(2), 8-12.
- Mckenna, M. C., & Robinson, R.D. (2002). *Teaching through text-reading and writing in the content area*. New York: Person.
- Molenda, M. (2003). In search of the elusive ADDIE model. *Performance Improvement*, 42(5), 34–36. <https://doi.org/10.1002/pfi.4930420508>
- Molina, M., & Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics*, 9(2), 187. <https://doi.org/10.3390/math9020187>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1945). The second report of the commission on post-war plans. *The Mathematics Teacher*, 38(5), 195-221. <https://doi.org/10.5951/MT.38.5.0195>
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Authors.
- National Research Council (NRC). (2001). *National Science Education Standards*. Washington, DC: National Academic Press.
- NCTM (1970/2002). *A History of Mathematics Education in the United States and Canada*, Reston, VA: Author.
- NCTM (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2002). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

- NCTM (2004). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 35-55). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_2
- Niss, M., & Jablonka, E. (2020). Mathematical literacy. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 391-396). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-157890_100
- Norberg, M. (2019). Potential for meaning making in mathematics textbooks. *Designs for Learning, 11*(1), 52–62. <https://doi.org/10.16993/dfl.123>
- NRC (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). *Mathematics learning study committee, center for education, division of behavioral and social sciences and education*. Washington, DC: National Academy Press.
- O'Halloran, K. L. (1998). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education, 10*(3), 359-388. [https://doi.org/10.1016/S0898-5898\(99\)00013-3](https://doi.org/10.1016/S0898-5898(99)00013-3)
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD Publishing. Retrieved from <https://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33693997.pdf>
- OECD (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD Publishing. Retrieved from <https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf>
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- OECD (2018). *PISA 2022 Mathematics Framework*. OECD Publishing. Retrieved from <https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html>
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. Retrieved from <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- OECD (2022). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. Retrieved from https://www.oecd-ilibrary.org/fr/education/pisa-2022-assessment-and-analytical-framework_dfe0bf9c-en
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 33*(5), 158-175.

- Pimm, D. (1981). Metaphor and analogy in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 47–50.
- Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press.
- Pujiastuti, H., & Haryadi, R. (2023). Enhancing mathematical literacy ability through guided inquiry learning with augmented reality. *Journal of Education and e-Learning Research*, 10(1), 43-50. <http://doi.org/10.20448/jeelr.v10i1.4338>
- Roth, W.M., Ercikan, K., Simon, M., & Fola, R. (2015). The assessment of mathematical literacy of linguistic minority students: Results of a multimethod investigation. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 88–105. <http://doi:10.1016/j.jmathb.2015.01.004>
- Saxe, G., et al. (2007). Learning about fractions as points on the number line. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: The 69th yearbook* (pp. 221-237). Reston, VA: NCTM.
- Schmidt, W., Houang, R. & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum the case of mathematics. *Journal of Direct Instruction*, 4(1), 13–28.
- Schöber, C., Schütte, K., Köller, O., McElvany, N., & Gebauer, M. M. (2018). Reciprocal effects between self-efficacy and achievement in mathematics and reading. *Learning and Individual Differences*, 63, 1-11.
- Selvianiresa1, D., & Prabawanto, S. (2017). *Contextual Teaching and Learning Approach of Mathematics in Primary Schools*. 2017 International Conference on Mathematics and Science Education (ICMSce), IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 895 (2017) 012171. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012171>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
- Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (339-371). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communication*. Cambridge University Press.
- Shanahan, C., & Shanahan, T. (2014). Does disciplinary literacy have a place in elementary school? *The Reading Teacher*, 67(8), 636–639.
- Soto-Andrade, J. (2007). Metaphors and cognitive modes in the teaching-learning of mathematics. Proc. CERME 11. https://www.researchgate.net/publication/228583228_Metaphors_and_cognitive_modes_in_the_teaching-learning_of_mathematics
- Stacey, K. (2015). The International Assessment of Mathematical Literacy: PISA 2012 Framework and Items. In Sung-Je Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th*

- international congress of mathematical education*. (pp.771-790). Switzerland: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_43
- Steen, L. A. (1997). *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America*. New York, NY: The College Board.
- Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114), NCTM Press.
- Thrilling, B., & Fadel, C. (2009). *21st Century Skills: Learning for Life in Our Times*. San Francisco: John Wiley & Sons
- Tymoczko, I. (1986). Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 8 (3), 44-50.
- Umbara, U., & Suryadi, D. (2019). Re-Interpretation of Mathematical Literacy Based on the Teacher's Perspective. *International Journal of Instruction*, 12(4), 789-806.
<https://doi.org/10.29333/iji.2019.12450a>
- Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., & Houang, R. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction* 14 (2004), 469–484
- Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570.
 doi: 10.1080/09515080802285552
- Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language* (E. Hanfmann & G. Vakar, Eds. and Trans.). Cambridge: MIT Press.
- Wible, D. (2005). *Language learning and language technology*. Taipei: Crane Publishing.
- Yuan, Y, & Chen, K. (2023). Whole Number Bias of Students in Fraction Number Line Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education* 21(5), 1433–1449.
<https://doi.org/10.1007/s10763-022-10315-0>
- Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 245-255. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001>

附件一 負數識讀文本 1

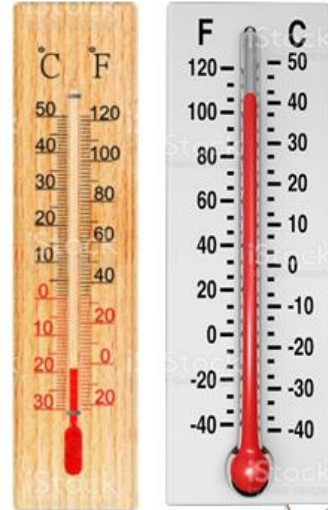
01 負數

比空無還小的數

♠ 小時候所知的正數或零，只能用來計算「物質」的量，例如有多長？有多重？有幾人？有多少？等等的問題。這些「物質」量，最少就是「沒有」，不能比「沒有」更少。例如一條繩子不能比 0 公尺更短，一張紙不能比 0 公克更輕，一間教室裡的人數不能比 0 人更少。

到國中，我們長大了，要遭遇「性質」的量。「性質」不像「物質」，它不是具體的東西。例如冷熱，它是相對的性質，並不會「沒有」冷熱。用攝氏溫標（C）來測量冷熱時，所得的溫度可能大於零度，但是也可能有零下的溫度。零下的溫度就是負的溫度，例如零下 10 度可以寫成紅色的 10°C ，也可以寫成 -10°C ，讀作「負 10 度 C」。於是，比空無還小的數出現了，稱為負數。

另一個常見的性質是「資產」，就是「有多少錢」的意思。用實際的紙鈔或銅板來看，「錢」當然是物質，我們不能擁有比 0 元更少的錢。可是如果把借錢的行為放進來，我們就可能擁有比 0 更少的錢。譬如爸媽如果跟銀行貸款 600 萬買一戶房子，則他們雖然擁有一間房屋，但是他們的「資產」是「欠銀行 600 萬元」，也可以說爸媽的資產是「負 600 萬元」，記作 $-6,000,000$ 元。



[隨堂練習 1]

(1) 便利商店存放冰棒的冷凍櫃，標準溫度應該是攝氏零下 18 度。用數字符號寫出那個溫度。答：

(2) 假如妳／你欠某人 100 元，請用數字符號寫出妳／你的資產。答：_____

在學習「負數」概念以前…
甲：我很窮，身上只有 10 元。
乙：我更窮，我身上一塊錢都沒。

在學習「負數」概念以後…
甲：我很窮，身上只有 10 元。
乙：我更窮，我還欠別人 10 元。

♥ 數線

小學時候可能看過零和正數的數線，但完整的數線應包含負數。溫度計上的刻度就是一條數線。只是我們習慣將數線畫成橫的（水平的），如下圖。



在數線上任取一點，定它的坐標（刻度）為 0 ，那個點稱為原點。朝著箭頭方向（右側）等間隔依序畫下坐標 1 、 2 、 3 、 \dots ，向箭頭的反方向依序畫下 -1 、 -2 、 -3 、 \dots 。前面已經說過，像 -2 這樣的數字，讀作「負二」。

[隨堂練習 2]

- (1) 用國字寫出 -3 和 -12 。答：_____
- (2) 在數線上數數看， -1 和 3 相距幾個間隔？答：_____

01 負數 1110815



「負」的概念

數學就像另一種「外國話」。負數就像是這種外國話的「字母」之一，所以是非常基本的。在國中三年，以及後面不管高中或是高職的課程裡，負數將會一再出現。因為有了負數，我們可以有負債的概念、或是氣溫可以有零下的表示法、而在數學上最具體的改變就是數線開始有負數的標示了。

在「數」的領域中，「負」是一種相對的概念，比方說：有「負 3 」就有「正 3 」，其實「正 3 」就是我們以前學過的 3 。在學到負數之前，除了 0 以外的所有數都是正數，所以我們不會刻意把 3 說成正 3 ，也不會刻意將它寫成 $+3$ ；那是因為我們當時對於「數」的概念只有正數。但隨著「數」的概念擴張到「負數」，這時才知道原來「數」也有正負之分的呀。所以一定要記得，「負」是一種性質符號，當此數是負的時候一定要帶有負號，例如 -7 就是要強調它的屬性是負的；但若此數為正，則可以省略正號，例如 7 和 $+7$ 是同樣的意思，寫 7 就可以了。注意， $+7$ 要讀「正七」而不是「加七」喔。

[課堂活動 1]

讀出以下等式（括弧不必讀出來），並判斷它們是否正確？說說你／妳的想法。

- (1) $3 = (+3)$? (2) $3 = (-3)$?

[課堂活動 2] 舉例說明「負數」是一種「相對的」概念？



本篇文本閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。）

- 我學到的負號意義有哪些？

- 我可以說明負數在數線上的位置表示與大小關係

- 我學到的負號與減號有何不同？



隨喜練習

1. 據報導：「美國批准以冷凍溫度攝氏零下 15 度至零下 25 度保存和運送輝瑞疫苗。」

(1) 用數字符號寫出報導中的兩個溫度。

(2) 試想：「零下 15 度」和「零下 25 度」哪一個比較冷？

(3) 根據以上概念，妳／你猜想「負 15」和「負 25」這兩個數，哪個應該比較小？

2. 更多練習。

(1) 用國字寫出 -5 、 $+5$ 和 -10 。

(2) 在數線上數數看， -3 和 0 相距幾個間隔？

(3) 在數線上數數看， -3 和 3 相距幾個間隔？

(4) 想像一下，在數線上 -7 和 0 應該相距幾個間隔？

(5) 想像一下，在數線上 -7 和 7 應該相距幾個間隔？

3. 針對「+」或「-」這二個符號，圈選出正確的讀音。

(1) $7+3$ ：「7 加／正 3」。

(2) $+3$ ：「加／正 3」。

(3) $7-3$ ：「7 減／負 3」。

(4) -3 ：「減／負 3」。

4. 在本文中，你覺得「負數」較能說明「性質」的量？還是「物質」的量？為什麼？

附件二 負數識讀文本 2

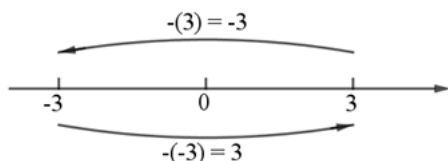
02 負數加減 1110815

班級： 座號： 姓名：

2 負數加減

♠ 「負」即「相反」

在數線上，「負」就是「相反」的意思。就像與原點 0 的距離相等的兩個數，互為「相反數」。如下圖， $-(3)$ 唸作「負 3」，是 3 的相反數，簡記作 -3 。而 $-(-3)$ 是 -3 的相反數，那就是 3。所以 $-(-3) = 3$ 不過就是「相反再相反就還原」，就好像「向後轉」再「向後轉」就回到原來的方向，也就所謂的「負負得正」。



[隨堂練習 1]

請在下面的數線上找出或用文字／畫圖說明 $-(-5)$ 所代表的最後位置並寫出答案。



[隨堂練習 2]

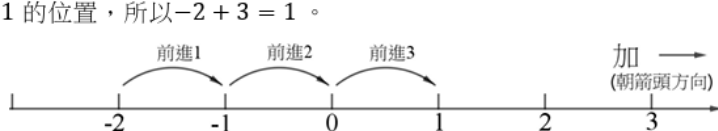
$$-(-(-7)) = \underline{\hspace{2cm}}$$

♥ 「負」非「減」

因為「負」和「減」恰好使用了同樣的符號「 $-$ 」，害得很多同學剛開始學「負數」的時候，以為「負 1」和「減 1」是一樣的。不！「負」是代表一個數的屬性，例如「負 1」代表在原點 0 的左邊 1 個單位的「位置」，但是「減」卻是代表兩個數的運算。比方說，「加 1」是朝數線的箭頭方向前進 1 個單位，而「減 1」是朝數線的「沒箭頭方向」前進 1 個單位。


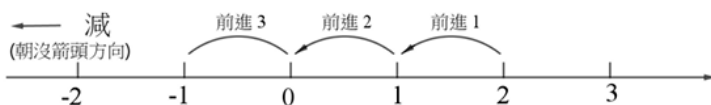
(1) $(-2) + 3$ (妳／你會讀此算式嗎？注意 $-2 + 3$ 和 $(-2) + 3$ 是同樣意思的算式。)

數線上的動作：從運算元 -2 在數線上的位置開始，朝數線箭頭方向前進 3 單位，到達 1 的位置，所以 $-2 + 3 = 1$ 。



(2) $2 - 3$

數線上的動作：從運算元 2 在數線上的位置開始，朝數線「沒箭頭方向」前進 3 格，到達 -1 的位置，所以 $2 - 3 = -1$ 。



原來加和減都是前進的動作，只是方向相反。

[隨堂練習 3]

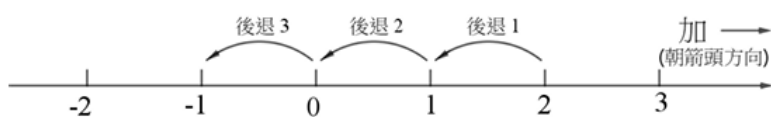
(1) $(-2) - 3 =$ 圖形的表示法：

(2) $0 - 3 =$ 圖形的表示法：

♣ 「負」是「後退」

我們說「負」是一種「相反」概念。所以如果「正」就是「往前走」的意思，那「負」就是往後退。所以「 -3 (負 3)」就代表往後退 3 個單位。舉例說明如下。

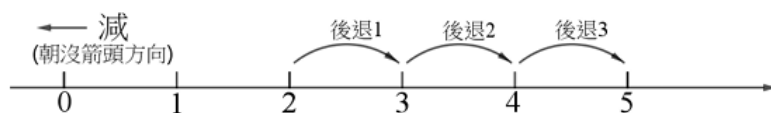
- (3) $2 + (-3)$ (注意，因為 $+-$ 接連在一起不容易讀，所以不寫 $2 + -3$ 而寫 $2 + (-3)$)
 這個算式讀作「2 加負 3」，代表著「從 2 的位置朝數線箭頭方向(這是「加」的意義)，後退(這是「負」的意義) 3 個單位」到達 -1 ，所以 $2 + (-3) = -1$ 。



(原來：一個「+」號與一個「-」號可以化簡成一個「-」號)

所以「加負 3」跟「減 3」的效果是一樣的，就像 $2 + (-3) = 2 - 3 = -1$ 。

- (4) $2 - (-3)$ (注意，因為 $--$ 接連在一起不容易讀，所以不寫 $2 - -3$ 而寫 $2 - (-3)$)
 這個算式讀作「2 減負 3」，代表著「從 2 的位置朝沒箭頭方向(這是「減」的意義)，倒退(這是「負」的意義) 3 個單位」到達 5，所以 $2 - (-3) = 5$ 。



(原來：「-」號與「-」號可以化簡成一個「+」號)

所以「減負 3」跟「加 3」的效果是一樣的，就像 $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ 。

[隨堂練習 4]

讀出以下「加減負數」算式，然後做計算。

(1) $5 + (-12)$

讀音：

算式 =

(2) $7 - (-10)$

讀音：

算式 =

(3) $0 - (-3)$

讀音：

算式 =

[討論活動]

請討論下列等式會相等嗎？(把錯誤等式的 $=$ 改成 \neq)

(1) $7 + (-13) = 7 - 13$

(2) $7 - 13 = -(13 - 7)$

(3) $(-7) - 3 = -(7 - 3)$

(4) $(-7) - 3 = (-7) + (-3)$

2. 疫苗裝瓶之後，從攝氏 25 度急速冷凍到零下 25 度。它上升還是下降了幾度？
- (1) 寫出數學算式並計算出答案。
- (2) 寫答案。（注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。）
3. 把疫苗從攝氏零下 25 度的冷凍櫃取出之後，在室溫靜置 3 分鐘才可以施打。假如疫苗在第一分鐘上升 20 度，第二分鐘上升 15 度，第三分鐘上升 11 度，試問它離開冷凍櫃之後 1 分鐘、2 分鐘、3 分鐘的溫度？
- (1) 寫出數學算式並計算出答案。
- (2) 寫答案。（注意要寫第幾分鐘，還要寫單位喔。）
4. 阿丹昨天結算的資產有 8 千元，今天投資失敗賠了 1 萬元，他今天結算的資產有多少元？
- (1) 寫出數學算式並計算出答案。
- (2) 寫答案。（注意要寫單位喔。）
5. 阿丹昨天結算的資產是負債 5 千元，今天勤勞工作賺進 1500 元（已扣除他當天的生活費），他今天結算的資產有多少元？
- (1) 寫出數學算式並計算出答案。
- (2) 寫答案。（注意要寫單位喔。）

科技工具

計算機（手持式科學電算器）雖然是一種「舊科技」，但是因為它價格低廉（200 元左右），輕便耐用，而且功能足夠國中、高中學習數學之用。請家長為學生採購，也請教師原則上准許學生使用。計算機用「正負鍵」來輸入負數，它的「負」和「減」是兩個不同的按鍵，特別適合用來學習「負」的概念。

請看計算機操作的教學影片，網址如下，或掃描右邊的二維條碼。如果妳／你學了計算機操作，不妨用它檢查本文各題的計算結果，當作驗算。

<http://shann.idv.tw/video/210813.html>



附件三 分數識讀文本 1

06 分數 1110808

6 分數

♠ 兩種除法

在小學，我們其實學了兩種不同的除法，並列舉例如下：

正整數除法

$$7 \div 2 = 3 \dots 1$$

餘數

有理數除法

$$7 \div 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} = 3.5$$

分數 或 小數

其中「正整數除法」得到正整數的商和餘數，而「有理數除法」不寫餘數，如果有餘的話，就寫成分數或小數。

讓我先解釋什麼叫做「有理數」。我們把 0、正、負整數，正、負分數，正、負（有限）小數，統稱為有理數。（請同學先不要理會「有限」這兩個字；我必須把它們寫在這裡，否則有人會罵我。同學們應該不想害我挨罵吧？）

我們在小學學過： $3\frac{1}{2}$ 讀作「三又二分之一」，它稱為帶分數。相對地 $\frac{7}{2}$ 稱為假分數，其實它一點也不假，只是分子比分母大而已。在國中，它們通通叫做分數；但是，如果沒有特別指明「帶」分數，則我們說的分數就是像 $\frac{7}{2}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $3\frac{1}{7}$ 這些數。

[隨堂練習 1]

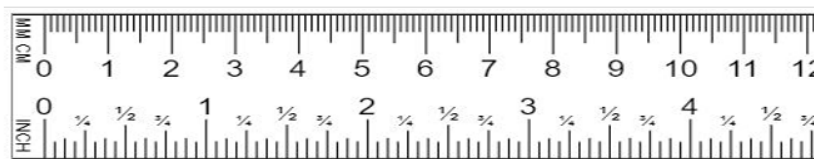
試計算 $20 \div 8$ 。

(1) 用「正整數除法」得到的答案是：_____。

(2) 用「有理數除法」得到的答案，寫成小數是：_____；寫成帶分數是：_____。

♥ 「分數」與「小數」

分數和小數都是測量所需的數。以測量長度為例，下圖是一把常用的尺，它同時顯示公分（cm）刻度和英吋（inch）刻度。



世人的習慣是：當我們使用公分來測量長度，就習慣用小數，例如 3 公分和 3.2 公分是可以用尺精確測量出來的，但是 3.25 公分就得目測估計了。此外，生活中充斥著習慣用英吋來測量的東西，例如蛋糕和披薩的直徑、手機和電視螢幕的對角線長、水管的口徑、襯衫的領圍等。¹ 當我們使用英吋來測量的時候，就習慣用分數了。例如大樓的主水管口徑可能是 $1\frac{1}{4}$ 吋，淋浴蓮蓬頭的水管口徑通常是 $\frac{1}{2}$ 吋，飲水機的出水口通常是 $\frac{3}{8}$ 吋。

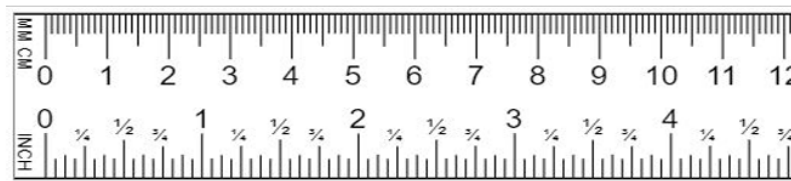
¹ 其實台尺、台寸也都還在用，例如臺灣製的床墊長寬、門窗的寬度等。裁縫師和木工師傅也常用台尺、台寸。

注意下圖的尺，僅標示出 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 吋的間隔刻度，但是它其實精確標示了 $\frac{1}{16}$ 吋的間隔。

[隨堂練習 2]

根據下圖回答下列問題。

- (1) 利用此直尺，在尺的上方，畫出長度為 5.3 公分的直線；在尺的下方，畫出長度為 $1\frac{1}{4}$ 英吋以及 $2\frac{3}{8}$ 英吋的直線。



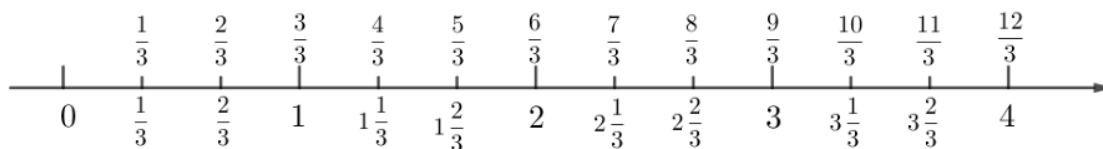
- (2) 利用上圖直尺所標示的刻度，圈出你認為可以測量的長度。

3.2 公分 $2\frac{3}{4}$ 英吋 5.52 公分 $3\frac{7}{16}$ 英吋 8.35 公分

♣ 「分數」為什麼有兩種寫法？

一般而言，我們都用帶分數來溝通，例如襯衫的領圍會寫 $14\frac{1}{2}$ 吋，不會寫 $\frac{29}{2}$ 吋。水電行會標示 $1\frac{1}{4}$ 吋的水管，不會寫 $\frac{5}{4}$ 吋，但分數與帶分數，只是同一個數的兩種寫法，如下圖。問題是：

當我們對分數做計算的時候，帶分數非常難算，而且很容易出錯。所以做計算之前，最好先把帶分數都轉換成假分數。可是，我們最好用帶分數來寫答案，才是「有素養」的寫法。



[隨堂練習 3]

請以 2 公分為單位長，畫一條數線，標示 8 個四分點： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、...、 $\frac{8}{4}$ 。在它們之中，特別標示 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{7}{4}$ 對應的帶分數。（注意：寫成帶分數的時候，分數部分要化到最簡，才是「有素養」的寫法。）

總結來說：分數應該用「帶分數」來說、寫，但是用「假分數」來算。



閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。）

<ul style="list-style-type: none"> ● 我可以舉例說明生活中帶分數、假分數、小數運用於何處。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 我可以舉例說明一個有刻度直尺可以測量的最小單位。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 我可以舉例說明在何種情境下的分數表示是一種「有素養」的分數寫法。
--	--	--



隨喜練習

1. 下列的分數都是計算完成之後的最後表示結果，請圈選出哪些是「有素養」的分數寫法。

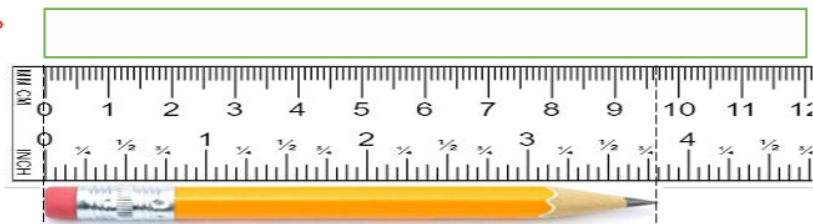
$$3\frac{2}{5}$$

$$\frac{27}{5}$$

$$\frac{5}{50}$$

$$6\frac{6}{7}$$

2. 家庭最常使用的 LED 燈泡是編號 E27 的螺口燈頭；雖然造型不一樣，但它們的燈頭直徑都是 27mm，如右圖。請根據下面直尺的刻度，在手指的方框中畫出 27mm 長的直線。（1 mm = 0.1 cm）



3. 請仔細觀察上圖中的鉛筆長度，你覺得最適當的鉛筆長度應該是多少公分？多少英吋？

06 分數 1110808

科技工具

大多數的計算機只做有理數除法，不做正整數除法；而且，它們做有理數除法的時候，不會算出分數，只會算出小數。但是有少數專門為學生的需求而設計的計算機，可以做分數計算。作者平常用來舉例的那一款計算機，就可以做分數計算。讓我們先學習怎樣用它來輸入分數、轉換帶分數和假分數吧。



<http://shann.idv.tw/video/211114.html>

附件四 分數識讀文本 2

07 單位分數 1111111

班級： 座號： 姓名

7 單位分數

在巴黎羅浮宮博物館裡，有一件十五世紀的文件相當有趣，那是一位操心的父親與數學家朋友的通信。信中內容是這樣：做父親的詢問，應該把兒子送去哪所大學就讀，數學家回答說：A 大學還可以，但是如果真心希望兒子瞭解分數，應該把兒子送去 B 大學。

沒錯，在 500 年前，分數真的是在大學階段才會學的課程，這足以表示分數確實有它的困難存在。但如今分數已經可以使用更簡單的觀念來闡述，才得以讓我們在小學階段就可以學習分數。但是到了國中還要繼續學習。分數之中，有一個非常特別的觀念叫做「單位分數」，我們要先來為它介紹一下。

♠ 單位分數

分子是 1 的分數稱為單位分數，例如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 都是單位分數。它們的性質是：把 m 個分母是 m 的單位分數相加起來，結果是 1（前面說的 m 就代表某正整數）。例如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{即 2 個分母是 2 的單位分數相加等於 1,}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad \text{即 3 個分母是 3 的單位分數相加等於 1,}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{即 4 個分母是 4 的單位分數相加等於 1}$$

但是同一個數的連加就是乘法，所以前面的連加就相當於以下乘法：

$$\text{得 } \frac{1}{2} \times 2 = 1, \quad \frac{1}{3} \times 3 = 1, \quad \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

用符號寫成通例，就是 $\frac{1}{m} \times m$ 。我們用這個性質來「規定」什麼數是單位分數。

[定義] 單位分數

如果有某數 \square ，自己連加 m 次等於 1，或者說 $\square \times m = 1$ ，則 \square 就是單位分數，即 $\frac{1}{m}$ 。

前面寫的 \square 代表一個「還不知道，有待查明的數」，稱為未知數。

[隨堂練習 1]

(1) 假如 $\square \times 5 = 1$ ，則 $\square =$ (2) 假如 $\square \times 7 = 1$ ，則 $\square =$

那麼單位分數與一般分數有何關係呢？簡單說，一般分數就是單位分數自己連加的結果。例如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

又因為連加就是乘啊，所以就縮短記號，寫成：

$$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2}, \quad \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$$

由此可知，一般的正分數與單位分數是倍數關係。我們利用這個性質來「規定」一般的正分數，

[定義] 正分數

正分數 $\frac{n}{m}$ 就是單位分數 $\frac{1}{m}$ 自己連加 n 次的結果；或者說 $\frac{n}{m} = \frac{1}{m} \times n$ ，即 $\frac{n}{m}$ 是 $\frac{1}{m}$ 的 n 倍。前述 m 、 n 代表某兩個正整數。

[隨堂練習 2]

$$(1) \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \times \square$$

$$(2) \frac{1}{8} \times 11 = \frac{\square}{\square}$$

原來單位分數在分數界，就好像是整數界的 1。

♥ 正分數與相異單位分數的表示

正分數在生活中，最常見的應用就是用來均分。好比現在有 2 條吐司，但是要平均分給 3 位同學，我們知道每人可以獲得 $\frac{2}{3}$ 條，但若真要你來分的時候，你可以怎麼分呢？不同的麵包型態應該會讓你有不同的想法吧。以下提供二種方法給你參考。

(1) 將每條吐司都均分成 3 等份，所以每人可以得到 2 個 $\frac{1}{3}$ 條（如圖一），這種分配方法相當於 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，也就是說 $\frac{2}{3}$ 可以拆成 2 個相同的 $\frac{1}{3}$ （單位分數）相加。

(2) 2 條吐司每人先分半條（ $\frac{1}{2}$ 條），所以還剩半條（ $\frac{1}{2}$ 條），再將剩下的 $\frac{1}{2}$ 條均分三等分（即 $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ ），所以每人分得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，如圖二。這種分配方法相當於 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。



圖一



圖二

從上面例子可知，一般分數可以拆解成多種不同的單位分數相加，比如上面所寫的： $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ；又如： $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ 、 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 、 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ 。

所以一個分數是可以有好多種的單位分數表示法，最簡單的就是用相同的單位分數來表示，像上面的 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ，但若想要多些變化，顯示你的分數能力很強，那就可以使用不同（相異）的單位來表示，像 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 或 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ 來表示了。

[隨堂練習 3]

下面的分數你可以使用幾種不同的單位分數相加來表示？完成之後與其他同學比較一下答案是否一樣？

$$(1) \frac{3}{4}$$

$$(2) \frac{5}{9}$$



本篇文本閱讀整理（不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。）

- 在這單元中我學到的新知識是什麼？例舉二個並完整說明或介紹。
- 二個正分數相乘，該如何計算？請舉個例子說明。
- 像文章中， $\frac{4}{5}$ 可以有多種的不同單位表示法，我發現它們的式子表示法中有何關聯性？



隨喜練習 (以下練習，用假分數作答即可；若能換成帶分數更好)。

1. 請計算下面各式的值

(1) $\frac{3}{4} \times 3 =$

(2) $\frac{9}{2} \times 5 =$

(3) $\frac{10}{3} \times 7 =$

2. 請利用單位分數計算的方式，算出下面各式的值

(1) $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8}$

(2) $\frac{11}{7} \times \frac{3}{8}$

(3) $2\frac{2}{7} \times \frac{3}{8}$

3. 請將分數 $\frac{5}{8}$ 用相異的單位分數來表示



其實在古代是因為分數不好計算，所以通常都會先將常用到的分數計算好貼在牆上，好讓大家能直接應用。

科技工具 大多數的計算機只做有理數除法，而且它們直接算出小數，不會算出分數。但是有少數專門為學生設計的計算機，可以做分數計算。作者平常用來舉例的那一款計算機，就可以做分數計算。請參閱以下影片。

<http://shann.idv.tw/video/211122.html>



附件五 分數識讀文本 3

8 分數除法 1110930

班級： 座號： 姓名：

8 分數的乘除

「先乘除，後加減」

我們小時候，都是先學加減，再學乘除。但當時的操作對象——也就是「被算的數」——是「正整數」，它們是「自然」發生的數，而且是我們人生中遇到的第一種數。相對於正整數，負數和分數就沒那麼「自然」，它們是人類發明或創造的數，而且要長大之後才開始學習。很多人以為分數的計算，應該像以前的經驗一樣，先學加減，再學乘除；但這個觀念不盡正確！其實，如果妳／你已經會正整數的加減乘除，則分數的乘除比加減簡單。因此，分數的運算，應該

先學乘除，再學加減。

♠ 正分數乘以正整數

同學們在國小看到「=」符號時，經常認為它是從左到右的關係，例如

我們會說 $15 \div 2 = 7 \dots 1$ ，但不會說 $7 \dots 1 = 15 \div 2$

進入國中以後，大家要學會從兩個方向使用「=」符號；

例如 $\frac{n}{m} = \frac{1}{m} \times n$ 不但可以說

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2, \text{ 也可以說 } \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$$

這個技術使得我們能做所有正分數乘以正整數的計算。例如：

$$\frac{2}{5} \times 3 \text{ 可以先用定義把 } \frac{2}{5} \text{ 拆開成 } \frac{1}{5} \times 2, \text{ 那麼原式就變成 } \frac{1}{5} \times 2 \times 3 = \frac{1}{5} \times 6 = \frac{6}{5}$$

整個寫成一串，就是：

$$\frac{2}{5} \times 3 = \left(\frac{1}{5} \times 2\right) \times 3 = \frac{1}{5} \times (2 \times 3) = \frac{1}{5} \times 6 = \frac{6}{5}$$

同學們應該不會像我示範的那麼笨，早就發現計算規則了：

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times k = \frac{\text{分子} \times k}{\text{分母}}, \text{ 其中 } k \text{ 代表某個正整數}$$

例如： $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4}$

[隨堂練習 1] (以下練習，用假分數作答即可；若能換成帶分數更好)。

(1) $\frac{3}{4} \times 3$

(2) $\frac{9}{2} \times 5$

(3) $\frac{10}{3} \times 7$

一般分數相乘

一般正分數相乘的算法，例如 $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$ 。

單維彰·國中數學別冊(一)

1

8 分數除法 1110930

班級： 座號： 姓名：

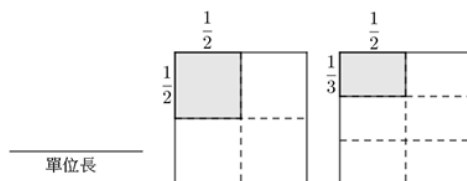
我們已經學到的一個重要技術是：一般正分數是單位分數的倍數。例如

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 3$ 、 $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times 4$ 。運用這個重要的技巧，可以算

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{2} \times 3\right) \times \left(\frac{1}{3} \times 4\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times 3 \times 4 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times 12$$

由此可見，我們只要能了解單位分數的乘法，就能了解一般分數的乘法了。

單位分數相乘的意義，可以用面積來看。如下圖，兩個大正方形的面積都是 1 平方單位。而 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 的意思是邊長為 $\frac{1}{2}$ 的正方形面積，同理 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的意思是長 $\frac{1}{2}$ 、寬 $\frac{1}{3}$ 的長方形面積。觀察附圖，很明顯地，這兩種面積分別是 $\frac{1}{4}$ 平方單位、 $\frac{1}{6}$ 平方單位。



所以 $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times 12 = \frac{1}{6} \times 12 = \frac{12}{6} = 2$

一般來說， $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$ 的意思就是把 1 平方單位的正方形等分成 $m \times n$ 塊長方形，

所以每塊長方形的面積就是 $\frac{1}{m \times n}$ 。因此 $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{m \times n}$ 。所以，一般正分數的乘法算則就是

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}$$

這應該是個很簡單的算則吧？

[隨堂練習 2]

$$(1) \quad \frac{-2}{5} \times 5 = \quad (2) \quad \frac{1}{3} \times -9 = \quad (3) \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{3} = \quad (4) \quad \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

分數除分數

很多同學看到這個標題，都會覺得很簡單：「分數除以分數，就是乘以倒數呀！」答案雖然沒錯，但是如果學到數學素養，就必須要明白為什麼「除以一個分數就是乘以它的倒數」？比起答案本身，學數學更重要的是理解的過程；而且它的理解還是可以回到單位分數。首先，讓我們針對倒數做個明確定義。

單維彰·國中數學別冊(一)

2

8 分數除法 1110930

班級： 座號： 姓名：

[定義] 倒數

兩數相乘等於 1 時，它倆互為倒數。關於倒數，我要特別說明幾個細節。

(1) 零沒有倒數。

(2) 我們已經知道整數可以視為以 1 為分母的分數，所以整數的倒數是單位分數。例如

$$5 \text{ 的倒數是 } \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \text{ 的倒數是 } 5。$$

(3) -1 的倒數還是 -1 ，這是因為它倆相乘為 1： $(-1) \times (-1) = 1$ ，所以 $\frac{1}{-1} = -1$ 。

(4) 習慣上，我們不把負數寫在分母。當分母是負數時，一律把負號寫在分數的前面。例如 -3 的倒數本來是 $\frac{1}{-3}$ ，但是因為

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-1} \times \frac{1}{3} = (-1) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \text{ 所以一律寫成 } -\frac{1}{3}。$$

(5) 負分數的倒數是：保留負號，絕對值作倒數。例如， $-\frac{2}{5}$ 的倒數是 $-\frac{5}{2}$ 。

[隨堂練習 1]

(1) $\frac{2}{7}$ 的倒數是 (2) -4 的倒數是 (3) $-\frac{1}{3}$ 的倒數是 (4) $-\frac{8}{3}$
的倒數是

♥ 一對父女的對話 — 【 待填 】

閱讀完下面的一段父女對話，你能從對話中找到哪些結論？

父：妳知道 $1 \div \frac{2}{3}$ 是多少嗎？ (1)

女：你應該要問我更簡單的題目，比方說 $1 \div \frac{1}{3}$ 是多少？ (2)

父：那妳會計算 $1 \div \frac{1}{3}$ 是多少嗎？ (3)

女：會，答案是 3。因為我把它想成是 1 呎長的緞帶，如果每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，那麼可以剪成 3 段，所以答案是 3。 (4)

父：那麼 $4 \div \frac{1}{3}$ 是多少呢？ (5)

女：答案是 12。因為 1 呎長的緞帶，可以剪出 3 段 $\frac{1}{3}$ 呎；4 是 1 的 4 倍，所以 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$ 。也就是 4 呎長的緞帶，每 $\frac{1}{3}$ 呎剪一段，可剪成 12 段。 (6)

父： $5 \div \frac{1}{3}$ 呢？ (7)

女：15。 (8)

父：能告訴我妳計算的規則嗎？ (9)

女：可以，把一個數除以 $\frac{1}{3}$ ，就是把那個數乘以 3；若除以 $\frac{1}{5}$ ，就乘以 5。 (10)

父：現在有一條 6 呎長的緞帶，每 $\frac{1}{4}$ 呎剪成一小段，已知完成一個花式蝴蝶結需要 3 小段來組成，那麼 6 呎長的緞帶可以做出幾個花式蝴蝶結所需要的緞帶呢？妳該如何設立數學算式？ (11)

單維彰·國中數學別冊(一)

3

8 分數除法 1110930

班級： 座號： 姓名：

女：應該是 $6 \div \frac{3}{4}$ ，因為一個花式蝴蝶結需要 3 小段，那麼完成一個蝴蝶結就需要 $\frac{1}{4}$ 呎 $\times 3 = \frac{3}{4}$ 呎的緞帶。 (12)

父：那可以打出幾個花式蝴蝶結？ (13)

女：答案是 8 個，因為 $(6 \times 4) \div 3 = 8$ 。 (14)

父：那麼把一個數除以 $\frac{3}{4}$ ，它的規則應是怎樣？ (15)

女：把一個數先乘以 4，再除以 3。 (16)

父：那把一個數除以 $\frac{3}{8}$ ，它的規則是怎樣？ (17)

女：把一個數先乘以 8，再除以 3。 (18)

父：非常好，那麼把一個數除以一般的分數，它的規則是怎樣？ (19)

女：先乘以分母，再除以分子。 (20)



原來「除以一個分數就是乘上它的倒數」的道理是這樣來的！



[隨堂練習 1]

讀完以上「父女對話」後，請回答下面的問題。

- (1) 請為那段對話設計一個標題，寫在對話開始前的【 】內。
- (2) 請寫出分數除法的算法是什麼？在對話中的哪幾行都有出現？
- (3) 數學老師說：「分數的除法其實還是用乘法來做的」，這句話可以在「父女對話」的哪幾行看到？

[隨堂練習 2]

$$(1) 6 \div \frac{2}{3} =$$

$$(2) \frac{3}{4} \div 2 =$$

$$(3) \frac{1}{5} \div \frac{2}{3} =$$



正負分數相除

同學們應該想到了，「正負分數相除」就如同「正負分數相乘」，我們只要運用「提出 -1 」的原理，就能處理正負混合的分數計算了。唯一改變的就是除以分數，就是乘以它的倒數。例如

$$-\frac{3}{5} \div 2 = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = (-1) \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) = (-1) \times \frac{3}{10} = -\frac{3}{10}。$$

[隨堂練習 3]

$$(1) -\frac{2}{5} \div 5 =$$

$$(2) \frac{1}{3} \div -9 =$$

$$(3) \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{4}{3} =$$

$$(4) \left(-\frac{2}{5}\right) \div \left(-\frac{5}{3}\right) =$$

08 分數的除法 1111111



本篇文本閱讀整理 (不論是知識或技巧或為什麼，都要寫出完整的意思哦。)

- 我可以寫出分數相乘的口訣，以及分數相除的口訣。
- 我可以計算出 $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3}$ 的值
- 我可以說明 $4 \div \frac{1}{3}$ 這式子代表的分數除法意義

◆ 隨喜練習

1. 做以下計算。

$$(1) 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$(2) \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$(3) \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{5} =$$

$$(4) \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$(5) \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} =$$

$$(6) \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

附件六 負數前測檢核卷

中一 數學閱讀 測驗 單元：負數 前測 班級： 座號： 姓名：

一、你喜歡「數學」嗎？（數字愈大表示愈喜歡）。為什麼？

分（最高 10 分，最低 1 分）。 因為：_____

二、你覺得自己的數學能力等級是多少？（數字愈大表示能力愈強）

分（最高 10 分，最低 1 分）

三、根據下面選項，依你喜歡的數學學習方式，依序寫上 5 分至 1 分的喜好程度（5 分代表最喜歡，1 分代表最不喜歡）。

直接計算題目 文字應用題
與生活有連結的數學知識 考試會考的題目。

四、在這節上課之前，你學過負數嗎？若有，在哪裡學的？

五、你認為負數是什麼？

六、請判斷下列式子是否正確？確定的在方框中打☑，不確定的在方框中打☒ (15%)

$-3 - 2 = (-9) + (-6)$ $-6 = -(6)$ $-(-5) = 5$
 整數包含正整數、零、負整數。 0 不是負整數 $+3 = 3$

七、請寫一段(30 字內)關於你對「負數的認識」的想法。(20%)

「負數」就是_____

八、針對以下的數學式子，描述一個在生活中有可能發生的情境。(10%)

$$7 - (-18)$$

可能發生的情境：_____

九、題目： $-17 - 6 = ?$

小明答案： $-17 - 6$ 就是17先減去6，等於11，然後因為17前面有個負號，所以答案就是-11。

小華答案：17前面的「-」號，代表17是負的，所以 $-17 - 6$ 就好比在數線上從-17的位置往左走6個單位，答案是-23。

請問：小明和小華的答案，哪一個是正確的。 答：_____

十、剛從遠洋捕獲的鮭魚在送上岸之後，需立刻從攝氏 25 度急速冷凍到零下 20 度。

問：它上升還是下降了幾度？

(1) 根據題意寫出數學算式。(不必寫出單位。)(5%)

(2) 計算出答案並寫出答案。(注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。)(5%)

十一、負數實戰題(10%)

1. 計算 $35 - (-23) + (-9)$ 2. 計算 $-2 - 9 - 7$ 3. 計算 $-1 - (-8)$

4. 在數線圖中標示出 $-2 - (-4)$ 的意義。



5. 在數線上標示出 -2 和 0，並比較這二個數字的大小？



答：

十二、回答下列問題

(1) 用國字寫出 $-3 - (-2)$ 的讀音。

(2) 承(1)，你覺得符號「-」，讀「減」或讀「負」的意義有沒有不同？

十三、聽力測驗：寫出你所聽到的式子表示法

(1) $(-3) - 1$ (2) $2 - (-7)$

附件七 負數後測檢核卷

中一 閱讀數界 測驗 單元 1-3 班級： 座號： 姓名：

一、聽力測驗：寫出你所聽到的式子表示法(8%)

(1) _____ (2) _____

二、判斷下列式子是否正確？正確者在方框中打☑，不正確者在方框中打☒ (24%)

$-9 - 6 = (-9) + (-6)$ $-20 = -(20)$ $-(-8) = 8$

右列這些數都屬於負數： 0 、 $-\frac{2}{3}$ 、 -1 、 -0.0001 、 -22000000 、 -1.5

0 不是正整數 $-7 + 2 = -(7 - 2)$

三、請在下方的空格中填上你認為恰當的文字或數字，讓它成為一篇有意義的文章。(12%)

「負數」用數線表示時，它總是在_____。像這樣的負數如：_____，(列舉3個即可)。我發現學習負數之後，生活中的很多事物就可以表示得更方便，像：_____，我就可以用 -15 來表示，負數真的很重要。

四、針對以下的數學式子，描述一個在生活中有可能發生的情境。(4%)

$$18 - (-12)$$

可能發生的情境：_____

五、**題目： $-5 - 4 = ?$** (4%)

以下是小明與小華針對題目方框中數學式子的陳述。

小明： $-5 - 4$ 用數線來說明，就好比站在 -5 的位置，然後向左轉，再前進4格，然後到達 -9 的位置，所以 $-5 - 4 = -9$ 。

小華： $-5 - 4$ 用數線來說明，就好比站在 -5 的位置，然後向左轉，再後退4格，然後到達 -1 的位置，所以 $-5 - 4 = -1$ 。

針對小明和小華的陳述，我認為 _____ (填小明或小華)是正確的。

六、BNT 疫苗裝瓶之後，需從攝氏 8 度急速冷凍到零下 80 度。問：它上升還是下降了幾度？(8%)

(1) 根據題意寫出數學算式。(不必寫出單位。)

(2) 計算出答案並寫出答案。(注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。)

附件八 分數檢核卷

中一 數學閱讀 測驗 單元：分數 班級： 座號： 姓名：

一、判斷下列式子是否正確？正確者在方框中打☑，不正確者在方框中打☒ (12%)

$\frac{4}{7}$ 就是 4 個 $\frac{1}{7}$ 相乘

$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{1}{7} \times 3 \times \frac{1}{5}$

$\frac{4}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{7} \times 5 \div 3$

二、選擇題(12%)

1. $\frac{7}{15} + \frac{11}{21}$ 的和最靠近下列哪一個數？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 算式 $(\frac{2}{5} - \frac{1}{3})$ $(\frac{2}{5} - \frac{1}{10})$ 的 空格中，該填入哪一個大小關係符號？

- (A) > (B) < (C) = (D) 以上皆非

3. $\frac{1}{2}$ 包的砂糖與 $\frac{1}{3}$ 包的冰糖，何者比較重？

- (A) 砂糖 (B) 冰糖 (C) 二者無法比較 (D) 以上皆非

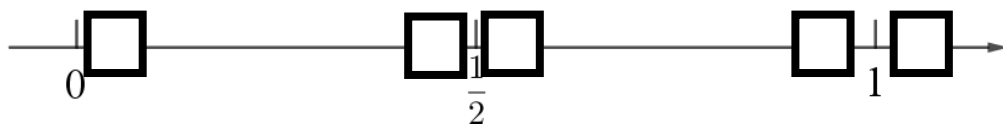
三、兩個分數相乘，如： $\frac{2}{3} \times \frac{7}{39}$ ，現在回答下列二個問題。(8%)

(1) $\frac{2}{3} \times \frac{7}{39}$ $\frac{7}{39}$ (在 內填 > 或 < 或 =)

(2) 說明你選此答案的理由：

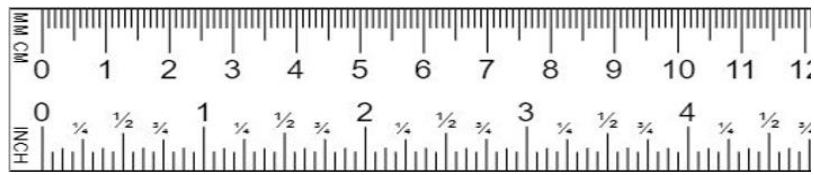
四、請將下列的五個分數填入數線上你認為最適當的位置(方框)中(20%)

$$\frac{1}{10}, \frac{5}{9}, \frac{3}{7}, \frac{5}{6}, \frac{15}{14}$$



五、請標示出 $1\frac{7}{10}$ 公分、9.6 公分、 $2\frac{5}{8}$ 英吋及 $4\frac{3}{16}$ 英吋等四個位置。並依序分別以

A、B、C 及 D 四個符號表示。(16%)



六、應用題(25%)

1. 衛福部疾病管制署公告：截至 12/20 日止，台灣目前已接種二劑 COVID-19 相關疫苗人數對應各接種疫苗之統計結果如下表。觀察相關數據後回答題號 (1) 至(3) 的問題。

(1) 參考下表中第二欄 AstraZeneca(陰影部分)之相關表示法，然後在下表空格處填入適當的百分比表示(取至小數後 1 位)(每格 5 分)

疫苗名稱	AstraZeneca	Moderna	高端	BioNTech	總計
已接種二劑人數	15,005,154	7,577,008	1,469,959	10,045,558	34,097,679
$\frac{\text{已接種二劑人數}}{\text{已接種二劑總人數}}$	0.440063794	0.222214774	0.043110236	0.294611196	1
各疫苗接種率(百分比表示)	44.0%				100%

(2) 上表中，陰影部分的 AstraZeneca 疫苗接種率數值為 44.0%，請說明它代表的意義。(5%)

(3) 請依題意列式。(5%)截至 12/20 日止，台灣總人口數約 2350,0000 人，已知滿 12 歲以上可接種疫苗者約占台灣總人口數的 87.5%。根據上表資料，請問：全台在應接種疫苗的人口數中，屬於接種 Moderna 者大約是多少？【此題僅需列式即可，無需計算】

七、你覺得生活中比較常見到「帶分數」的表示?還是「假分數」的表示?(2%) 試舉個例子說明你的答案。(5%)

八、❤️心情描述❤�

(1) 針對「分數」單元的學習，請依喜好程度塗滿愛心指數(塗的愈多，表示學習愈開心。)



(2) 你對「分數」多了哪些特別不一樣的新收穫?(寫的愈多，加分愈多。)(5%)

附件九 閱讀數界課 期末學習心得唔談卷

班 同學 訪談問卷內容 9:00-9:20

關心的研究	
1. 閱讀文本是否會影響數學學習？	2. 如何研究數學識能的改變？
3. 閱讀文本後對數學價值有何改變？	4. 學生喜歡何種方式的閱讀形式？
(1) 抽象概念有無更具體？	5. 喜好度與收獲度有無相關性？
(2) 分數四則運算是否可先乘法？	
設計訪談內容題目	
1. 你覺得每週 1 節的閱讀數界課會影響你的一般數學課的學習嗎？	2. 你覺得此文本與正課最大的差別在哪裡？
3. 在閱讀文本時，你最需要克服的是什麼？（專有名詞、數學公式、數學符號、太多文字、耐心）。	4. 你喜歡數學嗎？原因？
5. 若有同學不懂 $(-(-(-2)))$ 的意思，你會怎麼說明？	6. 你可以解釋 $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ 嗎？
7. 你覺得分數的乘法和加法何者較好計算？	8. 本學期的文本中有些名詞特別跟課本不大一樣，比方說：方程與方程式，你會覺得困擾嗎？希望如何？
9. 這學期中哪一個單元的內容，讓你有種「噢」，原來是這樣的感覺？	10. 現在你會將假分數的答案表示成帶分數嗎？為什麼

<p>11. 讀了一學期的文本，你對數學的看法有改變嗎？</p>	<p>12. 這學期的文本中，讓你印象最深刻的是哪一個單元？為什麼？難？易？有趣？</p>
<p>13. 描述一下你一開始學習這門課的心情。（那與現在看待它的心情）</p>	<p>14. 本學期的文本中有些名詞特別跟課本不大一樣，比方說：「負就是減」或「方程」，你會覺得困擾嗎？</p>
<p>15. 小學可有過這樣的學習方式？</p>	<p>16. 你喜歡哪一種的數學學習方式？ 直接計算題目、應用題、與生活有關的數學閱讀。</p>
<p>17. 你是用什麼條件篩選喜好度與收獲度？</p>	<p>18. 說一說你一開始拿到這文本時以為是上什麼課？</p>
<p>19. 閱讀這學期的文本，你最想給的建議是什麼？</p>	<p>20. 對這學期的文本排版方式有何建議？</p>