

國立中央大學

數學研究所  
碩士論文

九年一貫課程實施後對三角函數學習  
之影響

研究生：江佳玲

指導教授：單維彰 博士

中華民國九十六年七月



## 摘 要

本論文旨在探討九年一貫課程實施後，對於學生在高中學習三角函數所造成的影響，並根據研究結果提出建議，作為教育機關修訂高中課程綱要以及後續研究之參考。

本研究透過內容分析、問卷調查以及訪談之方式收集資料。分析的資料包括九年一貫課程之相關實務現況文件；在調查部分，以自編之「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」、「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」以及「九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見調查訪問大綱」為研究工具，藉以瞭解學生的先備知識、學習成就以及教師的看法。問卷與訪問調查對象為台灣北部地區 4 所高中的 94 學年度高一學生及該班任課教師。從調查資料的整理過程中，歸納九年一貫課程實施後，高中生學習三角函數單元現況的差異性，以及教師觀點中造成此差異性之原因，並進一步提出相關改善的建議。期望本研究對於高中課程綱要的修訂提供有益之參考。

## Abstract

The purpose of the research is to investigate the influence of students learning trigonometry in senior high school after implementing Grade 1-9 Curriculum. And we propose the suggestion according to the result of study as reference to revise the curriculum guidelines of senior high school and follow-up study of the educational authorities.

We adopted the ways of content analysis, questionnaire survey and opinion interview to collect the raw data. The analysed materials include the document practically relevant to situation of Grade 1-9 Curriculum. With regards to the questionnaire and interview aspects, we employed those made up by ourselves "The Questionnaire of trigonometry study present situation (pre-test)", "The Questionnaire of trigonometry study present situation (post-test)" and "the outline of opinion interview to teachers about trigonometry study present situation after implementing Grade 1-9 Curriculum" for study tools, for understanding the advanced knowledge and studying achievements of students and the opinions of teachers. The subjects of questionnaire and interview are the first-year students of senior high school in northern Taiwan in 2005 and their mathematics teachers. From the the survey materials, we sum up the differences of trigonometry study situation of senior high school student and the cause of the situation in teachers' points of view, and propose relevant improved suggestions further. We expect this research to offer beneficial reference to the revision of the course.

# 目 錄

摘要.....	i
Abstract.....	ii
目錄.....	iii
圖目.....	v
表目.....	v
第 1 章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的與問題.....	2
1.3 研究歷程.....	2
1.4 研究範圍與限制.....	4
第 2 章 文獻探討.....	5
2.1 九年一貫課程培養之學生數學能力.....	5
2.1.1 九年一貫數學課程.....	5
2.1.2 高中數學課程.....	6
2.1.3 三角函數課程.....	11
2.2 三角函數學習相關研究.....	13
2.2.1 三角函數概念及錯誤類型研究.....	13
2.2.2 三角函數學習困難之相關原因.....	14
第 3 章 研究方法與實施步驟.....	17
3.1 研究方法.....	17
3.1.1 內容分析研究法.....	17
3.1.2 調查研究法.....	18
3.2 研究實施步驟.....	20
3.2.1 課程內容分析.....	20
3.2.2 學習現況調查.....	21
第 4 章 三角函數相關課程之內容分析.....	26
4.1 國、高中課程之三角函數相關課題.....	27
4.2 高中課程之三角函數單元內容.....	39
第 5 章 高中生學習三角函數之現況分析.....	44
5.1 高中生之三角函數學習成就.....	45
5.1.1 三角函數相關課題之先備能力.....	46
5.1.2 三角函數單元之學習成就.....	48
5.1.3 高一學生在三角函數單元之學習相關性分析.....	51
5.1.4 探討.....	53
5.2 課程規劃.....	56
5.2.1 時數.....	56
5.2.2 教材.....	61

5.2.3 探討.....	66
5.3 學生表現.....	67
5.3.1 學習成就.....	67
5.3.2 學習態度.....	73
5.3.3 探討.....	78
5.4 建議改善方法.....	79
5.4.1 增加授課時數.....	79
5.4.2 調整教材編排.....	82
5.4.3 創新教學方式.....	85
5.4.4 探討.....	87
第 6 章 結論與建議.....	88
6.1 課程規劃的合宜性.....	88
6.2 學生表現的差異性.....	89
6.3 制度改善的適切性.....	90
參 考 文 獻	
中文部份 .....	92
英文部分 .....	94

## 圖 目

圖 1-1 研究架構圖.....	3
圖 5-1 三角函數學習現況調查研究試卷(前測).....	47
圖 5-2 三角函數學習現況調查研究試卷(後測).....	49
圖 5-3 三角函數學習現況之前、後測成績分佈圖.....	52
圖 5-4 九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見訪問大綱....	55

## 表 目

表 2-1 95 年高中數學科課程暫行綱要與 85 年版課程標準之差異.....	9
表 2-2 95 學年度高中數學課程暫行綱要三角函數課程內容.....	12
表 3-1 調查實施日程表.....	24
表 4-1 95 年南一版國、高中數學教科書三角函數相關課題內容.....	27
表 4-2 九年級分年細目之三角函數相關課題.....	37
表 4-3 南一版高中數學教科書第二冊三角函數單元及相關先備知識..	39
表 5-1 施測學校班級數及人數表.....	45
表 5-2 三角函數學習現況之前測正確率.....	46
表 5-3 三角函數學習現況之後測正確率.....	50

# 第 1 章 緒論

此章對本研究之研究背景與動機、研究目的與問題、研究歷程及研究範圍與限制做一通盤描述，共分爲四節，分述如下。

## 1.1 研究背景與動機

教育部於民國 87 年起著手推動「教育改革行動方案」，其中最重大的政策之一，就屬「實施九年一貫課程」。這個被外界視爲「教改中心」的方案，卻引發各界的爭議（李恆宇，2002），究竟這個重大政策引發了什麼樣的問題？未來又即將面臨什麼樣的考驗？值得我們加以探討。

91 學年度起實施的《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》，在課程上有了革命性的變動。在數學領域方面，與之前的課程比較，其內容是朝簡易的方向發展（翁婉珣，2005）。然而教改十年以來，數學課程簡化造成學生素質產生差異的問題，一直備受社會大眾的討論，國內學者亦對於課程內容的編排，產生大量的意見與爭執，首當其衝的議題便是如何銜接高中課程。

教育部預計對 95、96 以及 97 學年度入學的高中生實施《95 學年度高中課程暫行綱要》，此乃高中課程爲銜接九年一貫課程做漸進式改革的緩衝方案。而教育部並於 95 年召集各相關代表，成立團隊進行修訂高中課程正式綱要。因此，在面臨正式綱要修訂之際，本研究著手深入瞭解九年一貫第一屆學生——也就是 94 學年度高一學生——在進入高中後所呈現出的差異，以三角函數單元爲論點，對課程、學生學習成就以及高中教師提供的教學實況與意見，進行分析與探討，期盼本文對於高中數學課程綱要之修訂提供有益之參考。

本研究挑選三角函數單元爲研究的主要課題，原因在於九年一貫實施後，三角函數單元正式從國中教科書中全數刪除，直接影響了高中學習此單元的基礎，

而三角函數單元在現行高一下的課程中佔有極大的比重，內容橫跨兩章：「三角函數的基本概念」以及「三角函數的性質與應用」，並且在學前的先備知識涵括代數、幾何以及函數概念（張琇涵，2006），所以藉由觀察學生在學習本單元的實際情況，亦能瞭解九年一貫課程下學生在多方面概念上架構了若干的程度，爾後進一步探討高中課程綱要所應修訂的方向。

## 1.2 研究目的與問題

本研究主要目的在於：分析九年一貫課程的實施對於學生進入高中後學習三角函數單元所造成的影響，並探討教育改革依現況下的問題所應修正的方向，希望作為訂定高中數學課程正式綱要以及後續研究之參考。

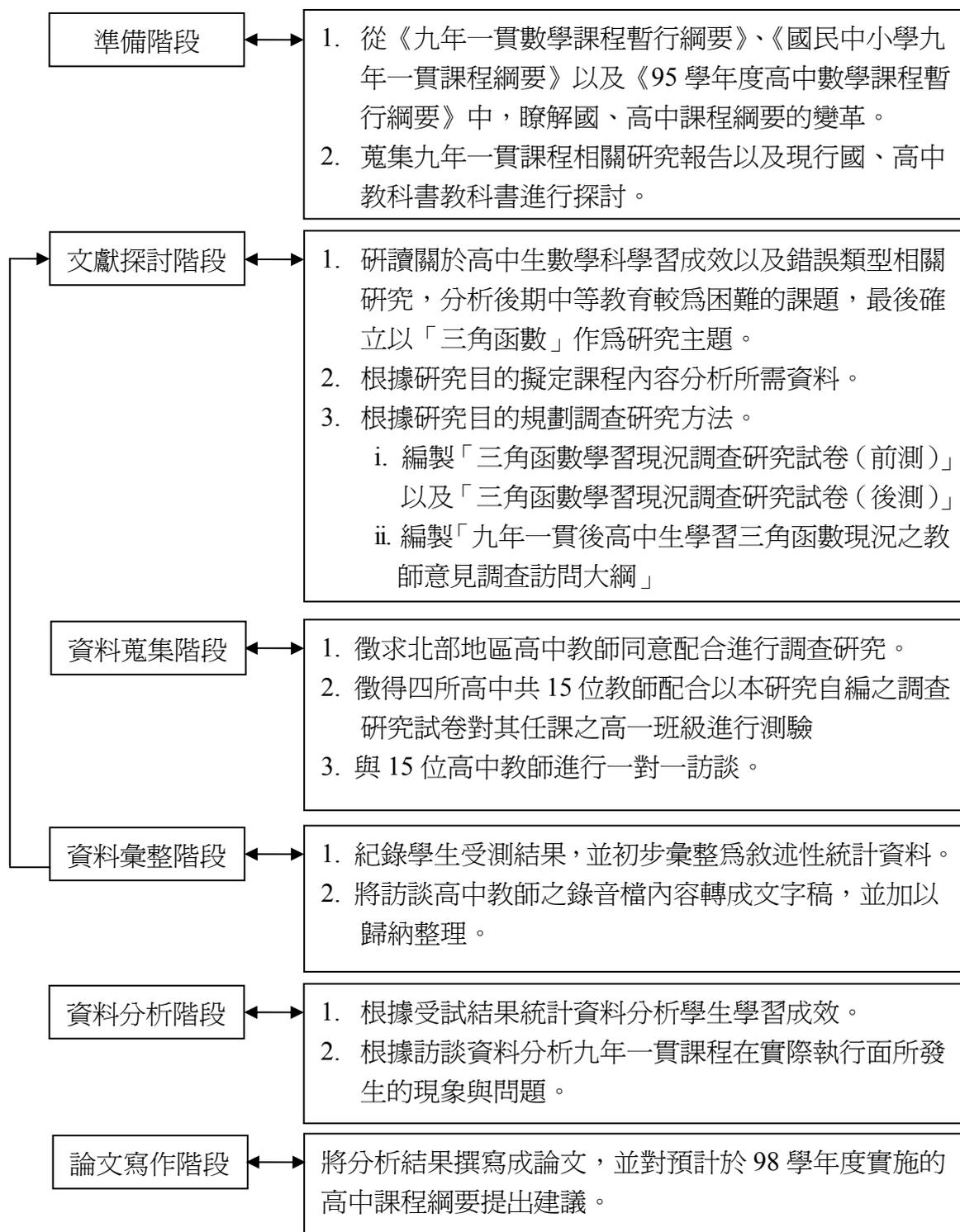
根據研究目的，針對高中生之三角函數學習現況，提出以下問題：

- (1) 九年一貫課程實施後，學生在三角函數相關單元的學習成就，相較於過去的學生所產生的差異為何？
  - i. 學生在三角函數相關先備知識上是否產生差異？
  - ii. 學生在三角函數單元的學習成就上是否產生差異？
- (2) 以高中教師的觀點，使用九年一貫課程的學生，在高中三角函數單元的學習歷程上，相較於過去的學生所產生的差異為何？
- (3) 高中教師對於即將修訂的高中課程綱要，以 95 學年度高中課程暫行綱要為基礎，其中三角函數單元內容是否尚須改進？

## 1.3 研究歷程

本研究針對高中生在三角函數單元學習現況進行探討，實施步驟如圖 1-1 所示。

圖 1-1 研究架構圖



## 1.4 研究範圍與限制

- (1) 本研究之範圍設定於九年一貫課程實施後之 93 學年度畢業生，於 94 學年度進入高中後，在高一下學期學習三角函數單元的實際情況。
- (2) 本研究在資料蒐集上，以實地訪查的方式進行。受限於人力、物力、時間與經濟等因素，訪查對象僅限於台北市、台北縣、桃園縣與新竹縣之四所高中師生，共計 15 位教師及其任教的 15 個班級學生，以自編之「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」、「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」以及「九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見調查訪問大綱」為研究工具。

## 第 2 章 文獻探討

本研究旨在探討九年一貫課程實施後，對於高中生學習三角函數所造成的影響。此章針對相關文獻進行分析，2.1 節說明數學課程的發展，2.2 節探討三角函數的學習相關研究。

### 2.1 數學課程的發展

#### 2.1.1 九年一貫數學課程

教育部於民國 87 年 9 月公布《國民中小學九年一貫課程總體綱要》，繼之於 90 年 1 月公布《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》，並且自 91 學年度起在一、二、四、七年級開始實施。九年一貫課程總目標強調能力的開拓，為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷，並培養分析資料、形成臆測、驗證與判斷的能力，以提升生活品質，改善生活環境，進而養成關懷環境、尊重自然的情操。數學學習領域的精神指標為：在多元社會中，養成開放與尊重的態度，激勵多樣性的獨立思維，並具備理性與溝通的素養，尊重各種不同的合理觀點，分享各別族群的生活數學及欣賞不同文化的數學發展（教育部，2000）。

九年一貫數學課程期望學生達成下列目標：

- (1) 掌握數、量、形的概念與關係。
- (2) 培養日常所需的數學素養。
- (3) 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
- (4) 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
- (5) 培養數學的批判分析能力。
- (6) 培養欣賞數學的能力。

為達成這些目標，數學課程的發展應以生活為中心，配合各階段學生的身心與思考型態的發展歷程，提供適合學生能力與興趣的學習方式。數學學習活動應讓所有學生都能積極地參與討論，以培養明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期盼在互動的過程中建立數學知識。

## 2.1.2 高中數學課程

教育部中等教育司於 94 年修正發佈「後期中等共同核心課程綱要」。以數學課程而言，未來的 95 至 97 學年度將依據《95 學年度高中數學暫行綱要》來實施，此期間為過渡時期。98 學年度則將落實高中正式綱要。兩者之目的皆為銜接九年一貫課程綱要，以期達成十二年一貫的整體課程。

### 後期中等教育共同核心課程

高中數學課程應秉承國中數學課程的基礎，進一步培養學生邏輯推理能力、運算能力和空間想像能力（教育部，1995）。根據民國 90 年「教育改革之檢討改進會議」之重要結論指出：「後期中等教育學校型態包括普通高中、完全中學、綜合高中及高職，鑑於延後分化、適性學習是必然趨勢，應積極研議對不同類型之後期中等教育設計共同基礎的學習目標與課程內涵，並以學校為本位發展多元彈性學程，以符合學生適性發展之需求。」依此決議，教育部中教司乃著手後期中等教育共同核心課程之研訂。

目前世界教育發展趨勢，各國之後期中等教育皆朝向以中介教育為主，終結教育為輔的角色，我國後期中等教育的發展與課程的改革，亦符應此改革潮流，例如綜合高中、完全中學、單科高中、實用技能班的設置，綜合高中學校本位課程的提倡，普通高中課程修訂對延後分化原則的重視，以及技職體系課程的規劃等。教育部業已完成的「後期中等教育共同核心課程研訂」與刻正進行之「高中

課程標準之修訂」、「技職體系課程」中「高中、高職及五專前三年課程規劃」等方案應能相互配合。

後期中等教育數學核心課程的基本理念為（教育部，2005）：

- (1) 後期中等教育包括普通高中、綜合高中、高職和五專前三年等不同類型學校，各有其特殊之教育目標及教育內涵，因此，後期中等教育共同核心課程數學科課程綱要之研訂，在理念上，除了將上述四類學校學生都必須修習之基本數學內容，規劃為共同核心課程，以做為未來課程發展的基礎外，同時並盡可能兼顧課程綱要多元發展的彈性，以期能適應各類型學校課程規劃的特殊需求。
- (2) 後期中等教育共同核心課程數學科課程綱要之規劃，是以培養現代國民應具備之基本數學素養為目標，是後期中等教育各類型學校學生修習進階或專業課程的基礎，因此，各類型學校於規劃課程時，應將共同核心課程綱要之內容適當納入必修課程之教學內容之中。
- (3) 由於延後分化的潮流以及高等教育大眾化的趨勢，目前雖然國中畢業生進入高中和非高中（包括高職和五專）之比約為一比一，但是越來越多的高職畢業生希望進入普通大學（非技術學院）就讀。至少就升學考試的準備而言，應盡量提供非高中生必要的數學能力。
- (4) 除了便利高職生參加大學學科能力測驗之外，考量到技術學院逐漸轉化成普通大學的趨勢，以及技術學院老師提出商業科與工科教授微積分之困難，後期中等核心課程希望所有學生進入大學後至少有一部份共同的數學經驗。

後中數學核心課程的內容重點為：

- (1) 著重基本數學概念之探討，特別注意與國民中小學「數學學習領域」課程綱要內容之銜接。

- (2) 高中生無論進入普通大學或技術學院，就所需要的數學教育而言，微積分和線性代數幾乎是全世界大學基礎數學教育的共識。因此核心課程的訂定至少要為修習微積分和線性代數提供前置的經驗。
- (3) 以國民基本素養而言，統計能力的培養也是主要重點之一。九年一貫在國中、小的數學課程中，規定了相當份量的統計課程。因此在後中共同核心課程應該要納入統計和與統計息息相關的機率課程。
- (4) 經由對數學概念的探究，培養觀察、推理、理性思辨及創造等能力，以應用於解決日常生活中所遭遇到的問題。

### **普通高級中學課程**

而為了因應時代的潮流以及社會的變遷，尤其為了配合國民中小學九年一貫課程之實施，於課程方面有所連貫，教育部於民國 90 年 5 月成立「普通高級中學課程發展委員會」，並於 91 年 10 月聘任各個科目的綱要制定小組召集人，由召集人根據教育部規範的原則組成綱要修訂小組委員會。數學科綱要修訂小組的成員共計有 12 位，包含中華民國數學會學術委員會的委員、數學系教授、心理學家、評量專家，以及高中老師。數學科綱要的修訂透過行政系統、公聽會、網站等管道廣泛聽取各方意見，並經由審查小組及課程發展委員會的審查通過。93 年 8 月發布《95 學年度高中數學課程暫行綱要》，其中必修科目「數學」課程欲達成之目標如下（數學學科中心，2005）：

- (1) 引導學生瞭解數學的內容，意義及方法。
  - (2) 培養學生以數學思考問題，分析問題，解決問題的能力。
  - (3) 提供學生在實際生活和學習相關學科方面所需的數學知能。
  - (4) 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。
- 選修科目「數學(I)」及「數學(II)」課程欲達成之目標如下：
- (1) 加深加廣必修課程所學之內容。
  - (2) 提供學生在大學學習相關學科的基礎知能。
  - (3) 以多項式函數為主體引導學生瞭解微積分學的內容，意義及方法。

《95 學年度高中數學課程暫行綱要》採不分化原則，在高一、二時每學期 4 學分。另有選修(I)與選修(II)課程各 3 學分。高一、二之課程需注意到與國中課程之銜接，選修課程需注意到與大學基礎教育之關聯。與 85 年版高中課程標準在科目、必選修以及時間分配上之差異列示如表 2-1。

表 2-1 95 年高中數學科課程暫行綱要與 85 年版課程標準之差異

學期	85 年版高中課程標準			95 暫行綱要		
	科目	必選修	時間分配	科目	必選修	時間分配
高一上	數學(一)	必修	4	數學(一)	必修	4
高一下	數學(二)	必修	4	數學(二)	必修	4
高二上	數學(三)	必修	4	數學(三)	必修	4
	幾何學(一)	選修	2			
高二下	數學(四)	必修	4	數學(四)	必修	4
	幾何學(二)	選修	2			
高三上	數學甲(上)	選修	6	選修數學(I)	選修	3
	數學乙(上)	選修	4-6			
高三下	數學甲(下)	選修	6	選修數學(II)	選修	3
	數學乙(下)	選修	4-6			

註一：選修數學(I)、(II)之內容及學分數皆為參考用，各校可依其經營理念與特色自行規劃適合的內容與節數。

註二：選修數學並非只適合自然組學生選讀，有志於商學院的社會組學生也亟需要。

《95 學年度高中數學課程暫行綱要》與 85 年版課程標準在內容上的差異為：

高一上：將 85 年版高中課程中的第一章基礎概念移入附錄。

將 85 年版高中課程中的遞迴數列移入 95 暫綱排列組合章。

高一下：不談反三角函數；將餘切、正割和餘割的圖形移入附錄。

不談和差化積，但保留積化和差。

高 二：95 暫綱只談二元克拉瑪公式和二元行列式，

而將三元的情形移入選修(I)。

95 暫綱只談錐線的標準式。

95 暫綱增加信賴區間和信心水準的解讀。

選修(I)：95 暫綱不談轉軸，不談二階方陣所對應的平面變換。

95 暫綱不談連續圖案、黃金分割和正多面體。

選修(II)：95 暫綱將微積分的討論擴及到多項式。

95 暫綱要處理積分公式。

《95 學年度高中數學課程暫行綱要》預定於 95 學年度開始實施，而針對 94 學年度高一新生（九年一貫的第一屆），教育部提出以下相關因應措施：

- (1) 委託中華民國數學會辦理「九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教學素材製作計畫」，數學銜接教材已於 94 年 5 月發展完成，並於 6 月於全國北、中、南、東等四區舉辦說明會。
- (2) 進行國文、英文、歷史、地理、物理、化學、生物等七科之「國、高中銜接教材內容比對分析」研究計畫，於 93 年 12 月完成「國、高中銜接教材內容比對分析」研究，並轉知國、高中教師查詢參考。
- (3) 於 94 學年新生入學的暑假期間提早辦理國、高中教材的銜接學習。
- (4) 要求各高中於 94 學年度每週加一節數學課，彌補課程不足之處。

其中《九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教材》應包含下列單元：「乘法公式與多項式」、「因式分解」、「方根的運算」、「一元二次方程式的解」、「線型函數與二次函數」、「不等式」、「數列與級數」、「幾何與證明」、「三角函數」。

### 2.1.3 三角函數課程

國中階段的三角函數單元課程，其教學目標及教材內容，隨著課程改革歷經多次精簡或刪除。民國 74 年教育部修訂公佈的國民中學數學課程標準，將相似形、二次函數等相關內容列為三角函數的先備知識，且在國中三年級的課程中編排「數值三角及其應用」的單元，使得學生進入高中前對三角函數有基本的認識。民國 83 年教育部修訂公佈的國民中學數學課程標準，大幅精簡數值三角及其應用的內容，只編寫銳角三角函數與三角函數的應用之內容。民國 87 年九年一貫數學課程暫行綱要，將所有三角函數單元從國中教科書中刪除。因此目前的國中學生在進入高中課程之前，只具備了相似三角形的判別法、二次函數圖形的概念與三角形性質的幾何證明等先備知識。

而在高中階段的三角函數單元課程，95 學年度起開始實施《95 學年度高中數學課程暫行綱要》，其中的三角函數單元與 85 年版高中課程標準的主要差異為刪除反三角函數、和差化積，並將餘切、正割和餘割的圖形移入附錄。教材內容列示如表 2-2。

表 2-2 95 學年度高中數學課程暫行綱要三角函數課程內容

	主要內容	備註
* 三角函數的基本概念	1.銳角三角函數	1-1 有一個銳角為， $30^\circ$ 或 $45^\circ$ 的直角三角形邊角性質。
	2.三角函數的基本關係	2-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。
	3.簡易測量與三角函數值表	3-1 可用電算器求出三角函數值。
	4.廣義角的三角函數	
	5.正弦定理與餘弦定理	
	6.基本三角測量	
三角函數的性質與應用	1.三角函數的圖形*	1-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。
	2.和角公式*	2-1 含積化和差公式。
	3.倍角*、半角公式	
	4.正餘弦函數之疊合	4-1 以實例說明疊合的意義。
	5.複數的極式	5-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根。
附錄	1.函數的概念* 2.餘切函數、正割函數和餘割函數的圖形	以到目前為止學過的數學統整函數的概念。

註：「\*」為「後期中等教育共同核心課程指引」內容。

教育改革的步調必須是分階段進行的，而在整體制度的大幅變動下，學生在學習上的銜接是否能夠妥善、適切，有絕大部分的因素仰賴於教育資源在學習的脈絡上是否安排得連貫、合宜。本研究透過對現況實地訪查，藉由瞭解學生經過九年一貫課程後，在高中課程三角函數單元中的實際表現，分析與探討上述課程在執行上的成效。

## 2.2 三角函數學習相關研究

### 2.2.1 三角函數概念及錯誤類型研究

吳佳起（2003）「函數單元學習前後的概念成長探討」發現，國二學生在函數方面存在許多錯誤類型，以及對於函數的迷思概念：

- (1) 在學生初次學習函數的概念前後，其函數概念有顯著的不同；
- (2) 函數的學習，最有助於「壓縮」層次的學生進階到「物化」層次；
- (3) 學生存在著許多錯誤類型。如：自變數與應變數的角色混淆顛倒；
- (4) 學生有許多關於函數的迷思概念。如：可以寫出關係式的就是函數。

陳忠雄（2003）「高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究」中指出，學生在三角函數概念學習的錯誤類型主要分為：

- (1) 三角函數與反三角函數定義的概念不清：三角函數與反三角函數的定義混淆，不瞭解三角函數的定義域、值域與反三角函數的定義域。
- (2) 三角函數符號運用的概念不清：乘法性質的誤用、函數與反函數合成的誤用與三角形三邊長性質的誤用。
- (3) 三角函數運算性質的概念錯誤：三角函數的遞增與遞減不清楚、三角函數的平方關係不清楚、誤認三角函數具有線性性質、三角函數值的正負不會判斷、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的疊合性不清楚與三角函數值相等的概念不清。
- (4) 角度的基本性質概念不清：角度的單位換算以及同界角的認識不清。
- (5) 三角函數的圖形概念不清：三角函數的圖形與平移認識不清，三角函數圖形的對稱性概念不清。
- (6) 三角函數的週期與振幅概念不清：函數週期的定義概念不清、三角函數的週期與振幅性質認識不清。

賴潔芳（2004）「二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究」探討依據分析高三學生三角函數概念學習錯誤類型的結果，設計高一三角函數教學，是否可使學生避免犯下相同的錯誤，文獻中將學生概念學習的錯誤類型分為：

- (1) 弧度與函數值的錯誤概念；
- (2) 圖形概念的錯誤；
- (3) 正餘弦疊合概念的錯誤；
- (4) 廣義三角函數的錯誤概念；
- (5) 三角函數的運算性質錯誤概念；
- (6) 反三角函數概念的錯誤；
- (7) 角度單位換算的錯誤概念。

簡志明（2004）「高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究」文獻中，發現學生運算的錯誤類型主要為：

- (1) 銳角三角函數及廣義角三角函數定義不清楚；
- (2) 角度與邊長的對應關係為片段性的認知；
- (3) 三角形的三角函數值運算概念不清楚；
- (4) 角度的範圍無法用不等式表示；
- (5) 各象限角的三角函數值正負判斷錯誤；
- (6) 角度轉換錯誤；
- (7) 三角函數方程式不會分解；
- (8) 象限角的三角函數值為錯誤值。

## 2.2.2 三角函數學習困難之相關原因

賴潔芳（2004）指出三角函數單元的學習成效與其他單元相較之下較不理想且學生的學習意願普遍低落，原因有二：

- (1) 學習者需要將三角函數的圖像與數字關係做連結，去處理如

$$\left[ \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \right] \text{ 這類的比例問題及操弄有關的符號。}$$

- (2) 語言背景使學生無法瞭解三角函數的英文寫法、唸法及其命名的意義。

簡志明（2004）提出在學習銳角及廣義角三角函數的基本概念時的學習困難有下列各項：

- (1) 預備知識的不足，無法貫通；
- (2) 計算過程感覺繁雜，產生困難；
- (3) 對於文字符號不能清楚掌握；
- (4) 銳角擴展至廣義角三角函數時，難以銜接；
- (5) 無法仔細認清題目的各項條件而加以連結；
- (6) 代數觀念沒有落實；
- (7) 在日常生活中，少有實際應用相關題目，以致學習時較為抽象吃力；
- (8) 邏輯推理觀念不足，無法逐步思考。

文中並說明，學生在高中的學習方式和國中時有所不同，高中對定義、定理及應用有著明確的規範，而有不少的學生往往忽略基本定義所講述的，不清楚主題是什麼，如廣義角、同界角的定義，不瞭解定義，接下來的步驟則顯得毫無推理可言。而有部分學生將三角函數關係式記得很清楚，但無法靈活運用的，學生只去背公式，而忽略任何公式都是可以導出來，不瞭解背後的意義。在國中幾何部分刪掉了不少，在高一的幾何觀念就明顯地變差了許多，一些稍微複雜的圖形，不管是邊長或角度的對應與推導，學生就會亂成一團。此外，許多錯誤乃由於學生對定理的不熟悉，定理的不熟悉其實則與很少算題目有很大的關係。過去的高一數學部分大多是把國中的觀念加強得再延伸，但如今因為國中新課程的實施，使得有些觀念高一時才有教授，尤其國中基本學力測驗，檢測方式限用選擇，大大影響到國中生讀書的模式，讓學生覺得數學這門科目或許只要用看的就可以了，不一定要瞭解完整解題過程，這一點著實值得教育界人士深思。

該研究就其此次調查研究結果，對高中數學老師提出以下的教學建議。

- (1) 預備知識的加強：高一上課程中所提及的觀念大多是國中觀念的延伸，

若可以利用為入學前的暑期時間，再次複習先前的觀念，例如整數的定義、二次函數、基本的幾何概念等等有助於高一的教學。

- (2) 計算能力的演練：高中計算的部分與國中差異很大，且高一的數學一週課程介於 4 至 5 堂課，要利用上課時間作計算能力的加強是很困難的，可在高一生八月份登記分發完至校登記時，分發自編的加強計算之講義，利用暑假期間作運算。尤其在無理數的計算部分。
- (3) 與物理、地科的結合：物理、地科老師在一些拋射的的運動中，三角函數的部分可先講述，以輔助學生的學習。
- (4) 強化代數觀念：高中數學更為抽象，常常要先做假設，而不是只有計算而已，通常需要代數的轉換，計算的式子才得以呈現，如果學生的代數觀念太差，有時候連下筆都很難，這一層面須要做突破。
- (5) 老師的教學態度：對待現在的高一生，可能要更有愛心與耐心，在教學過程中，不斷給予適當的鼓勵，以提高其學習的動機。

由以上文獻中可以看出，高中課程在三角函數單元部分的學習上，相較於其他單元，涵括了更為廣大、繁複的概念以及解題能力的培養。所以藉由觀察學生在學習本單元的實際情況，亦能瞭解九年一貫課程下學生在各大主題上架構了若干的程度，以進一步做為高中課程綱要修訂方向的依據。因此，本研究以三角函數為課題，進行深入的探討與分析。

## 第 3 章 研究方法與實施步驟

此章旨在說明本研究所採取的研究方法與實施步驟，共分為兩節，詳述如下。

### 3.1 研究方法

本研究欲探討九年一貫課程實施後，對於學生在高中學習三角函數所造成的影響，並根據國、高中課程的設計、學生的成就表現以及高中教師的觀點分析現行制度的合宜性。基於此目的，本研究採用「內容分析研究法」與「調查研究法」，藉由瞭解三角函數相關課題內容在新課程推行後的變化，以及實地調查高中生在學習上的整體表現，分析、探討新制度下學生在學習成就上的發展。

#### 3.1.1 內容分析研究法

內容分析研究法（content analysis）是指透過量化的技巧以及質的分析，以客觀及系統的態度，對文件內容進行研究與分析，以推論產生該項文件內容的環境背景及其意義的一種研究方法，有時亦稱為文獻分析法（documentary analysis）或資料分析法（informational analysis）。所謂的文件，包括所有的正式文件、私人文件、數量紀錄、照片、視聽媒介等。而分析的因素，則是指：訊息的來源、訊息的內容、訊息的接受者、訊息的傳播技巧、訊息的效果、傳播的理由等，因此早期的研究對象多以大眾傳播媒體為主。而近代的教育研究法亦逐漸採用內容分析研究法，研究對象擴及教科書等課程材料，且教材的內容分析已成爲

當前課程研究的重要領域之一（歐用生，1998）。內容分析研究法可以說是一種「質」與「量」並重的研究法，對於改進教育或社會的實務方面，或增添重要的知識方面而言，都能發揮其功能（王文科，1999）。因此，本研究以九年一貫後的國、高中三角函數相關課程為研究對象，利用內容分析研究法分析三角函數相關課題的整體課程，探討其銜接性及合宜性。

### 3.1.2 調查研究法

調查研究法是指根據母群體所選擇出來的樣本，從事探求社會學變項與心理學變項的發生、分配及其彼此相互關係的研究法（郭生玉，1995）。調查研究的最主要目的，是在探討某種社會現象在當前的情況，以做為解決問題，改進現況，並計畫未來的根據。基於對當前事實的研究性質，調查研究的結果可作為教育決策的參考，因此，調查研究是屬於決定導向（decision-oriented）的目的，而非結論導向（conclusion-oriented）之目的（Mouly, 1978）。調查是一項重要的研究型式，它須界定目標與問題、專門性的設計、細心分析與解釋蒐集而得的資料，最後提出合乎邏輯的研究報告。

根據研究資料的收集方法，調查研究可分為問卷調查與訪問調查。將設計好的問卷或調查表郵寄給受試者填寫或安排受試者集體填寫，稱為問卷調查；利用訪問者親身攜帶問卷或調查表的方法收集，則稱為訪問調查。

問卷調查在教育研究中廣泛地被使用，原因在於其具有方便性、標準性以及廣佈性。一份經過良好設計的問卷，所收集到的資料即能透過量化的分析，呈現客觀的事實。此外，問卷的回收率應該達到一定程度，資料始能視為適當

有效，根據貝比（Babbie, 1973）的觀點，調查資料若要能分析和報告，收回率至少須達到 50%才算適當，60%視為良好，70%或以上視為非常良好。

訪問調查依提問的形式又分為結構性訪問（structured interview）、非結構性訪問（unstructured interview）與半結構性訪問（semistructured interview）。結構性訪問的內容與程序，均在訪問進行之前就已標準化，訪問的實施完全遵照預定的訪問表格逐一進行，主要的優點是訪問結果易於比較、在良好的控制下可以建立通則以及訪問的主題不易被分散；非結構性訪問沒有使用訪問表格與事先決定好的訪問程序，問題的內容、順序以及用語較開放，訪問者可以鼓勵受訪者自由表達其思想，而僅以少許問題導引會談的方向，主要的優點是具有彈性、能使用較複雜的問題以及可深入探索人的動機，並使受訪者與訪問者得以產生社會的交互作用，因而從中找到豐碩的假設（Van Dalen, 1979）；半結構性訪問即訪問者於事前向受訪者發問一系列的結構性問題，然後在面談時採用開放性問題，務期兼備結構性訪問與非結構性訪問的優點，具有合理的客觀性，並且允許受訪者充分反映己見，因此在教育研究領域中格外適用，可獲得較有價值的資料（Borg and Gall, 1983）。

調查研究的步驟與過程，必須於實施之前，詳細地加以規劃，方能使資料的收集、整理、分析和解釋得以順利進行，提高研究結果的正確性。以下列示調查研究的實施過程，主要有五個步驟：

- (1) 確定調查目的：以清楚而明確的方式將調查的目的詳細敘述，作為設計整個調查計劃的依據。
- (2) 設計調查方法：決定抽樣方法、研究工具的設計以及資料的分析方法。

- (3) 從事資料收集：依照預定的計劃以及程序進行資料收集。
- (4) 從事資料分析：將收集到的資料，依照類別或項目加以記錄、分類。
- (5) 報告調查結果：根據分析的結果，加以解釋和討論。

本研究欲從多向的角度瞭解高中生在三角函數單元的學習現況，一方面以測驗式的問卷，調查高中生在相關課題的先備知識及該單元的學習成就；一方面以半結構性的訪問，調查高中教師對於學生在學習歷程的整體表現與對於高中課程的修訂方向的想法。

## 3.2 研究實施步驟

本研究主要目的在探討九年一貫課程實施後，對於學生在高中學習三角函數單元所造成的影響，藉由對於目前課程現況的分析研究以及對學生學習現況的調查研究，探討《95 學年度高中數學課程暫行綱要》是否切合學生在高中階段的狀態，希望作為日後修訂正式綱要的參考。

為瞭解改革後的整體發展，在實施的步驟上主要分為「課程內容分析」與「學習現況調查」兩部份進行。

### 3.2.1 課程內容分析

目前普通高級中學課程綱要的修訂採漸進的方式進行。為了銜接九年一貫課程，教育部在 92 年新修訂高中課程綱要草案，並預計於 95 至 97 學年度實施《95 學年度高中數學課程暫行綱要》，98 學年度則將落實高中課程正式綱要。本研究

以實體的國、高中教材作分析，探討初步修訂的新課程在三角函數單元是否有足夠的銜接性與合宜性。由於欲從教科書中完整分析其內容的連貫性，我們選定以同時出版國中、高中階段數學課本的「南一」版教材為範本進行研究。

### 3.2.2 學習現況調查

為從多角度瞭解學生在三角函數單元的學習現況，所收集的資料包括對學生的問卷調查以及對教師的訪問調查。一方面為學生安排紙筆測驗，分析學生在進入三角函數課程前所具備的先備能力，以及在結束三角函數課程之後所表現的學習成效，將結果加以統計。另一方面與各班級的數學科任課老師作一對一的面談，瞭解學生學習三角函數單元的歷程，將面談內容錄音並轉成文字稿。

#### (1) 研究樣本

由於受限於人力、物力、時間與經濟等因素，本研究取樣以台灣北部地區的高中為主。經電話、信函尋訪各校於 94 學年度任教高一班級的數學教師，並且為了在訪問調查中，教師能提供過去的經驗以作為參照，我們進一步找出這些教師當中，曾在過去五年之內也任教過高一班級教師，再前往面訪各位教師，說明本研究的目的及實施日程，以徵得教師同意配合，並由教師挑選其任教的其中一個高一班級來進行調查。最後取得 4 所學校共 15 位教師及其任教的 15 個班級作為本研究的樣本，由於挑選的班級皆為常態編班，其成員涵蓋各校數學學習成就高、中、低程度的學生。此外，本研究所取得之有效樣本數 464 人，相較於 2004 年各相關研究，已為最大之樣本數，因此該樣本應有足夠的代表性。

## (2) 研究工具

爲了調查 94 學年度的高一學生在三角函數單元學習的情形，利用下列兩種工具來蒐集所需要的資料，內容扼要分別說明如下：

- 自編「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」以及「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」

由研究者自行編製，藉以調查學生在進入三角函數課程之前，所具備的相關先備知識，以及在結束三角函數課程之後，所表現的學習成就。編製的過程與原則如下：

- a. 原始試題來源：爲了使試題具備有效性及代表性，所以試題的來源是多方面的。主要參考各中學段考考題、各家版本教科書及教師手冊以及網際網路上的相關教學資源。從上述資料中設計出合於三角函數單元主要概念的試題，並經由中央大學數學系教師及相關研究人員共同檢討修正，編製出前測題目共 12 題與後測題目共 16 題的試卷，配合各高中在三角函數的教學進度，預計分別於 95 年 3 月及 95 年 6 月進行測驗。
- b. 第一次試測：爲瞭解試題中的文字措辭是否適當表達題意，於中央大學挑選三位研究生進行測驗，而考量時間及人力因素，本次受測對象乃採方便取樣。依測驗結果及受測者提出的意見修改部分文字，以使將來受測之高一學生能清楚瞭解題意。
- c. 第二次試測：爲確立本試題的可行性，於桃園地區挑選三位高中學生進行測驗，而考量時間及人力因素，本次受測對象乃採方便取樣。依測驗結果調整部分試題採用的數據，以使試題更適合學生的程度。

d. 正式試卷：經過研究者與中央大學數學系教師共同檢討、第一次預試及第二次預試的結果修改完成該具有專家效度的前測、後測試卷。

➤ 自編「九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見調查訪問大綱」

訪問的進行如係根據審慎設計的結構而來，或確可引出重要的資料，其效度就較大。在這種探究的領域中，專家所持的批判性判斷，對於選取達成研究目標所需的問題，可能有所助益（王文科，1999）。因此，研究者諮詢中央大學數學系教師以及相關研究人員意見，擬定 7 大項相關問題大綱，於訪問前先行書面寄送予高中教師，再徵詢高中教師於學期末同意配合的時間，與研究者進行開放性的個別面談。目的在於藉由教師的觀點瞭解 94 學年度高一學生在學習三角函數單元的實際狀況，以及針對現階段高中數學科的課程綱要、教材等教學資源在實際執行上的優劣點，並對於即將修訂的高中課程綱要提出看法與建議。

### (3) 實施日程

本研究針對 94 學年度高中一年級學生在三角函數單元的整體學習歷程作調查研究，因此實施日程計劃係自 95 年 1 月份起依照學校課程進度安排，詳細說明如表 3-1：

表 3-1 調查實施日程表（以下日期皆為民國 95 年）

日 程	調查活動	內 容 說 明	備 註
1 月 16 日至 2 月 24 日	前測試題編製	由研究者蒐集資料，再與中央大學數學系教師及相關研究人員共同檢討修正，編製出前測題目共 12 題。	初擬完成後進行第一次試測及第二次試測，根據結果及受試者的意見修訂完稿。
2 月 25 日至 3 月 10 日	徵求高中教師 協助研究	經由電話及信函向北部地區高中發出邀請函，徵得初步同意後前往該校說明本研究調查活動。	最後徵得台北、桃園及新竹地區四所高中教師同意協助研究，共計 15 位教師。
3 月 11 日至 3 月 24 日	前測正式施測	於老師正式教授三角函數課程之前，作國中課程中相關知識的學前測驗。	請老師安排約 20 分鐘施測，由研究者收回閱卷並紀錄。
4 月 17 日至 4 月 28 日	後測試題編製	由研究者蒐集資料，再與中央大學數學系教師及相關研究人員共同檢討修正，編製出前測題目共 20 題。	初擬完成後進行第一次試測及第二次試測，根據結果及受試者的意見修訂完稿。
6 月 12 日至 6 月 23 日	後測正式施測	於老師正式教授完畢三角函數單元課程後，作三角函數的學後測驗。	請老師於期末當作一次 30 分鐘小考施測，由研究者收回紀錄分析。
6 月 19 日至 6 月 30 日	訪談教師	就學生學習三角函數情況進行約 30 分鐘訪談。	請老師安排時間與研究者作一對一面談。

#### (4) 資料處理與統計

本研究之資料處理分成：學生測驗結果分析及教師訪談資料分析，茲就各部份說明如下：

- 學生測驗結果部份：利用敘述性統計呈現所有樣本學生在「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」以及「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」

中，每一題答對人數與作答人數之間的比率，分析學生在正式進入三角函數課程之前，所具備的相關課題先備知識能力程度，以及課程結束後所表現的學習成就。此外，並紀錄兩次測驗成績，探討各校前測、後測成績相關性的推論統計。

- 教師訪談資料部份：研究者聆聽訪談的錄音檔，並將內容轉成文字稿，再依內容歸納出學生在學習時呈現的差異性，以及教師對於現行課程、即將實施的《95 學年度高中數學課程暫行綱要》與未來的高中課程正式綱要的意見。

## 第 4 章 三角函數相關課程之內容分析

本研究旨在探討九年一貫課程實施後，對於學生在高中學習三角函數所造成的影響。九年一貫數學課程將「三角函數的基本概念」單元從國中教科書中刪除，相關課題內容也有所更動，未來的學生到了高中，三角函數對他們而言，會是一個前所未見的新課題。在如此差異甚鉅的先備知識條件下，學生是否具有足夠的能力以承受目前訂定的高中三角函數課程？這即是此章所欲分析的主題。4.1 節說明國、高中課程中的三角函數相關課題的內容是否具有足夠的銜接性，4.2 節說明高中三角函數單元的課程內容，並分析各個學習段落所需要的先備知識。

爲了因應時代的潮流以及社會的變遷，教育部於民國 87 年開始著手推動九年一貫課程，91 學年度先行實施《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》，爾後經參考各方意見，適度調整暫行綱要的修訂方向，於 94 學年度正式實施《國民中小學九年一貫課程綱要》。而爲使課程有所連貫，教育部考量目前之可行性，以漸進方式進行高中課程綱要的修訂，結合現行高中課程標準及 92 年新修訂課程綱要草案，修訂成《95 學年度高中數學課程暫行綱要》，預定於 95 至 97 學年度實施。未來 98 年普通高級中學課程正式綱要，亦將以暫行綱要爲基礎，持續朝理想修訂。

此外，由於高中課程在因應編修的時程上有所不及，94 學年度高一學生仍沿用 85 年版高中數學課程標準，教育部唯恐國中與高中教科書內容上的落差造成學習上的困難，因此著手進行「九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教學素材製作計畫」，經由國、高中銜接教材內容比對研究，制定《九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教材》，要求各高中於 94 學年度每週加一節數學課來配合進行，並鼓勵學校於開學前的假期提早辦理國、高中教材的銜接學習，彌補課程不足之處。

本章就現行國、高中課程中的三角函數相關課題，分析其是否有足夠的銜接性與連貫性。欲具體瞭解國、高中階段的三角函數相關課程，本研究參考相關文獻（張琇涵，2006），從教材來作觀察與分析，並援引文獻中資料，考量教科書在同一個版本下較有一致性，選定以同時出版國中、高中階段數學課本的「南一」版教材為範本進行分析研究。

## 4.1 國、高中課程之三角函數相關課題

《95 學年度高中數學課程暫行綱要》將三角函數單元安排在高中第二冊教材中的第 2 章及第 3 章，學生在正式學習三角函數之前的國、高中課程中，所接觸的相關課題內容皆經過大幅變動。本研究從實體教材分析新課程，將國中第一冊至第五冊（國中第六冊無三角函數相關課題內容）以及高中第一冊中的三角函數相關課題內容列示如表 4-1。而其中由於本研究在撰寫上的時程仍為課程漸進式改革之過渡期，製表以「現行最新」為原則，國中第一冊至第四冊採用根據《國民中小學九年一貫課程綱要》編輯的教科書，國中第五冊採用根據《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》編輯的教科書，並於表內國中第一冊至第四冊的欄位中以「\*」註記各個課題內容與暫行綱要的差異。

表 4-1 95 年南一版國、高中數學教科書三角函數相關課題內容

冊別	三角函數相關課題內容
國中第一冊	<p><b>分數的四則運算 (2-4 pp.149--152)</b> *暫行綱要無負數及四則混合運算例題*</p> <p>在分數的算式中，如果同時有加、減、乘、除的運算，應由左向右依序計算且依循整數的運算規則。分數的運算也滿足乘法對加法的分配律。</p> <p>例題：</p> $1\frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4}。$

$$\begin{aligned} \text{解： } 1\frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} &= \frac{5}{3} \times (-2) \times \frac{1}{4} \\ &= -\frac{10}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

**解一元一次方程式 (3 - 3 pp.182--188) \*暫行綱要第三冊內容\***

當一個方程式中的未知數用某個數代入，能使這個方程式中左右兩邊的值相等，那麼這個數稱為方程式的**解或根**。求出方程式的「解」的過程稱為**解方程式**。一個  $x$  的方程式如果可以化簡成  $ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的形式，就稱為  $x$  的一元一次方程式。

利用等量公理解一元一次方程式：

例題：

$$3x = \frac{1}{2}$$

$$\text{解： } 3x \div 3 = \frac{1}{2} \div 3$$

$$x = \frac{1}{6}$$

**解二元一次聯立方程式 (1 - 2 pp.21--26) \*暫行綱要第三冊內容\***

國中  
第二冊

例題（代入消去法）：

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \cdots \cdots \text{①} \\ x = 3y \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

解：先將①式中的  $x$  以②式中的  $3y$  代入

$$\text{得 } y = 4 \cdots \cdots \text{③}$$

再將③式代入②式，得

$$x = 3 \times 4 = 12。$$

例題（加減消去法）：

$$\begin{cases} x + 7y = 15 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + y = 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解：原聯立方程式的①式與②式，等號的左邊都有  $x$ ，所以由

$$(x + 7y) - (x + y) = 15 - 3 = 12$$

得  $y = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

再將③式代入②式，得  $x + 2 = 3$ ， $x = 1$ 。

**直角坐標平面** (2 - 1 pp.40-51) \*暫行綱要第三冊內容\*

在平面上先選定一基準點  $O$ （稱之為原點），再選定兩條相交於  $O$  點且互相垂直，單位長相同的數線，橫的數線稱為 **x 軸**，箭頭方向（向右）表示正方向，縱的數線稱為 **y 軸**，箭頭方向（向上）表示正方向。我們稱這樣的平面為**直角坐標平面**，簡稱**坐標平面**。如果有序數對  $(a, b)$  所代表的是坐標平面上  $P$  點的位置，我們就稱  $P$  點的坐標為  $(a, b)$ ，記作  $P(a, b)$ 。其中，第一個數  $a$  叫做  $P$  點的  $x$  坐標，第二個數  $b$  叫做  $P$  點的  $y$  坐標。

坐標平面上的  $x$  軸與  $y$  軸將坐標平面分成四個區域，我們把四個區域依逆時針旋轉的方向，依序稱之為第一象限、第二象限、第三象限、第四象限（ $x$  軸與  $y$  軸上的點不屬於任何一個象限）。

**二元一次方程式的圖形** (2 - 2 pp.56--73) \*暫行綱要第三冊內容\*

方程式  $ax + by = 0$  ( $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ) 的圖形是一條通過原點的直線。當  $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ， $c \neq 0$  時，方程式  $ax + by + c = 0$  的圖形是一條直線。

方程式  $by + c = 0$  ( $b \neq 0$ ) 的圖形是一條直線，它通過  $(0, -\frac{c}{b})$  且與  $y$  軸垂直。

方程式  $ax + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的圖形是一條直線，它通過  $(-\frac{c}{a}, 0)$

且與  $x$  軸垂直。

當二元一次聯立方程式恰有一解時，這個解所代表的點就是此聯立方程式各式直線圖形的交點。

二元一次聯立方程式有無限多組解時，表示兩條直線重合。

當二元一次聯立方程式無解時，表示兩條直線平行。

#### 比例式 (3 - 1 pp.78--83) \*暫行綱要第五冊內容\*

$a$  與  $b$  ( $b \neq 0$ ) 兩個數的比記作  $a : b$ ，讀作  $a$  比  $b$ ，其中  $a$  稱爲這個比的前項、 $b$  稱爲這個比的後項；它的比值爲  $\frac{a}{b}$ ，表示前項是後項的  $\frac{a}{b}$  倍。

$a : b$  與  $c : d$  兩個比相等的意思，就是他們的比值  $\frac{a}{b}$  與  $\frac{c}{d}$  相等，記爲  $a : b = c : d$ 。

#### 函數與函數值 (4 - 1 pp.123--125) \*暫行綱要無此內容\*

給定自變數  $x$  的一個值時，都恰好能找到一個應變數  $y$  的值與它相對應，這種  $x$  與  $y$  的對應關係就稱爲**函數** (function)，或稱  $y$  是  $x$  的**函數**，記作  $y = f(x)$  ( $f(x)$  讀作  $f$  of  $x$ )。

當  $y = f(x)$  是  $x$  的函數，給定  $x$  的一個值  $a$ ，就可以得到一個與之對應的  $y$  值時，我們就稱這個與  $a$  對應的  $y$  值爲**函數  $y = f(x)$  在  $x = a$  時的函數值**，以  $f(a)$  表示。

	<p><b>函數的圖形</b> (4 - 2 pp.131--134) *暫行綱要無此內容*</p> <p>將自變數看成橫坐標，對應的 <math>y</math> 值看成縱坐標，我們就可在此坐標平面上描出有序數對 <math>(x, y)</math> 所對應的點，所有合於 <math>y = f(x)</math> 關係的點 <math>(x, y)</math> 所成的圖形，就稱為<b>函數 <math>y = f(x)</math> 的圖形</b>。</p> <p>在函數 <math>f(x) = ax + b</math> 中，當 <math>a \neq 0</math> 時，<math>f(x)</math> 稱為一次函數；當 <math>a = 0</math> 時，<math>f(x)</math> 稱為常數函數。這兩個函數的圖形都是一條直線，所以我們稱函數 <math>f(x) = ax + b</math> 為<b>線性函數</b>。</p>
<p>國 中 第 三 冊</p>	<p><b>乘法公式</b> (1 - 1 pp.6--13) *暫行綱要第四冊內容*</p> <p>對於任意數 <math>a、b、c、d</math>，<math>(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd</math></p> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ <p><b>平方根的四則運算</b> (2-1 pp.67--68) *暫行綱要無此內容（僅有平方根意義）*</p> <p>例題：</p> $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$ <p>解：</p> $\begin{aligned} \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{15}}{5} \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \sqrt{15} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \end{aligned}$

	<p>利用分子、分母同乘以一數，其值不變的運算性質，使分母不再帶有根號的化簡過程，稱為<b>有理化分母</b>。</p> <p><b>勾股定理</b> (2 - 3 pp.75--79) *暫行綱要第四冊內容* (之前僅在小四介紹直角)</p> <p>「任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。」在西方稱為<b>畢氏定理</b>。而在中國，這個定理一般稱為<b>勾股定理</b>。</p> <p><b>距離公式</b> (2 - 3 pp.85--87) *暫行綱要無此內容*</p> <p>給定坐標平面上任意兩點 <math>A(x_1, y_1)</math>、<math>B(x_2, y_2)</math>，則 A、B 間的距離</p> $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。$
<p>國 中 第 四 冊</p>	<p><b>點、直線與角</b> (2 - 1 pp.32--35) *暫行綱要第二冊內容 (無互餘內容)*</p> <p>在幾何中，用點表示位置，但不考慮它的大小。</p> <p>在平面上，通過點可以畫出很多線，但只有一條是<b>直線</b>，也就是說兩點決定一直線。兩點間的距離以直線距離最短。</p> <p>以 A 點為起點的兩個射線 AB 和 AC 形成了一個角，我們把這個角記為 <math>\angle BAC</math> 或 <math>\angle CAB</math>，簡記為 <math>\angle A</math>，點 A 稱為 <math>\angle A</math> 的<b>頂點</b>，射線 AB 和 AC 稱為 <math>\angle A</math> 的<b>邊</b>。</p> <p>如果 <math>\angle A = 90^\circ</math>，我們就說 <math>\angle A</math> 是<b>直角</b>；如果 <math>\angle A &lt; 90^\circ</math>，我們就說 <math>\angle A</math> 是<b>銳角</b>；如果 <math>\angle A &gt; 90^\circ</math>，我們就說 <math>\angle A</math> 是<b>鈍角</b>；如果一個角的兩邊在同一直線上，且不重疊，我們稱這個角是<b>平角</b>，平角是 <math>180^\circ</math> 的角。</p> <p>如果兩個角的和是一個直角，則稱這兩個角<b>互餘</b>，其中一個角稱為另一個角的<b>餘角</b>；如果兩個角的和是一個平角，則稱這兩個角<b>互補</b>，其中一個角稱為另一個角的<b>補角</b>。</p>

**三角形 (2 - 1 pp.35--36) \*暫行綱要第二冊內容\* (勾股定理先於三角形分類)**

若依三角形的內角角度來分類，可以分爲：

- 銳角三角形 (三個內角都小於 90 度)
- 直角三角形 (有一個內角是 90 度)
- 鈍角三角形 (有一個內角大於 90 度)

**弧長與扇形面積 (2 - 1 pp.41--43) \*暫行綱要第二冊 (無扇形面積內容)\***

在一個圓中，以圓心爲頂點，兩半徑爲邊所組成的角稱爲**圓心角**。

在一個半徑爲  $r$  的圓中，如果有一個圓心角爲  $x^\circ$ ，那麼它所對應的弧長及其所夾的扇形面積分別爲：

$$(1) \text{ 弧長} = \text{圓周長} \times \frac{x}{360} = 2\pi r \times \frac{x}{360}。$$

$$(2) \text{ 扇形面積} = \text{圓面積} \times \frac{x}{360} = \pi r^2 \times \frac{x}{360}。$$

**三角形的邊角關係 (3 - 3 pp.122--130) \*暫行綱要第二冊內容\***

三角形中大邊對大角，大角對大邊。

**平行線的性質 (4 - 1 pp.136--144) \*暫行綱要第五冊內容\***

兩條平行線被一直線所截，則同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。

**相似三角形 (2 - 2 pp.65--74)**

國中  
第五  
冊

SAS 相似性質：如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

AAA 相似性質：如果兩個三角形的三個內角對應相等，那麼這兩個三角形相似。

SSS 相似性質：如果兩個三角形的三邊長對應成比例，則這兩個三角形相似。

### 三角形的外接圓 (3 - 2 pp.98--100)

通過 $\triangle ABC$  的三個頂點 A、B 與 C 的圓 O，叫做這個 $\triangle ABC$  的**外接圓**，O 點叫做 $\triangle ABC$  的外心，這個 $\triangle ABC$  叫做圓 O 的一個**內接三角形**。

直角三角形的外心即斜邊的中點，它到三個頂點的距離相等。

直角三角形中，若有一個內角為 $30^\circ$ ，則此角所對應的股，長度是斜邊長度的一半。

### 推理 (4 - 1 pp.116--125)

作為推理依據的「已知事項」叫做推理的「**前提**」，推出的「新的結果」叫做推理的「**結論**」。推理的每一個步驟都必須「言而有據」，這些根據就是「已知事項」。常見的「基本推理模式」如下：

(模式一) (1) 矩形的對角線等長。

(2) 正方形是矩形。

所以，正方形的對角線等長。

(模式二) (1) 矩形的對角線等長。

(2) 有一四邊形的對角線不相等。

所以，此四邊形不是矩形。

### 幾何證明 (4 - 2 pp.128--135)

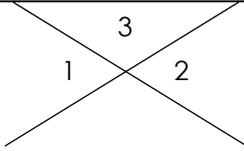
所謂「證明」就是依據公理、定理、定義、題設條件……等「已知事項」去論證某一事項的正確性。幾何證明的對象是有關幾何的敘述。

例題：

如果有兩個角是對頂角，那麼這兩個角相等。

解：推理如下

在右圖中， $\angle 1$  與  $\angle 2$  是對頂角，

	<p>因 <math>\angle 1 = 180^\circ - \angle 3</math> ,  <math>\angle 2 = 180^\circ - \angle 3</math> ,  故 <math>\angle 1 = \angle 2</math> ,  即對頂角相等，所以此「敘述」是正確的。</p> 
<p>高中第一冊</p>	<p><b>無理數 (1 - 2 p.33)</b></p> <p>在數線上，我們稱不是有理數的數叫作<b>無理數</b>。</p> <p>只要自然數 <math>n</math> 的質因數標準分解式中所含某一個質因數的次冪是奇數，那麼 <math>\pm\sqrt{n}</math> 便是無理數。</p> <p><b>平方根的化簡 (1 - 2 p.41)</b></p> $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$ <p>有理化分母：<math display="block">\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \quad (a \geq 0, b &gt; 0)</math></p> <p><b>兩點距離公式 (1 - 3 pp.51-52)</b></p> <p>平面上兩點 <math>P(x_1, y_1)</math> 和 <math>Q(x_2, y_2)</math> 間的距離為</p> $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{。}$ <p><b>複數及其四則運算 (1 - 4 pp.79-81)</b></p> <p><math>\sqrt{-1}</math> 稱為虛數單位，記作 <math>i</math>。凡是可寫成 <math>i</math> 的實數倍 <math>bi</math> (<math>b \neq 0</math>) 的這種數叫作純虛數。一般來說：如果 <math>a</math> 與 <math>b</math> 都是實數，那麼形如 <math>a+bi</math> 的數叫作複數，其中 <math>a</math> 稱為實部，<math>b</math> 稱為虛部。</p> <p>複數之間像實數一樣，可以做四則運算，規定如下：</p>

$$(1) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(2) (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(3) (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(4) \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)i$$

#### 複數平面 (1 - 4 pp.83--86)

高斯採用數對  $(a, b)$  來表示複數  $a + bi$ ，由於平面坐標系建立後，每一數對  $(a, b)$  可與平面上的點一一對應，因此複數  $a + bi$  可用平面上的點  $(a, b)$  來表示。高斯把填滿複數的平面叫做**複數平面**。其中橫軸上的點代表全體的實數，所以稱為**實軸**；縱軸上的點代表了全體的純虛數  $bi$ ，所以稱為**虛軸**。

#### 函數的概念 (3 - 4 pp.218--220)

設  $x$  和  $y$  是兩個變量，如果給定一個  $x$  (在某個範圍內) 的值， $y$  的值就隨  $x$  取值，依某一種對應關係法則  $f$  唯一確定時，那麼便說  $y$  是  $x$  的函數，用記號  $x \xrightarrow{f} y$  或  $y = f(x)$  表示。

#### 函數的圖形 (3 - 4 pp.223--225)

給定一個函數  $y = f(x)$ ，將  $x$  和  $y$  想成平面坐標系中的橫坐標與縱坐標，那麼所有滿足  $y = f(x)$  的點  $(x, y)$  在坐標平面上構成的圖形，稱為函數  $y = f(x)$  的圖形。

#### 二次函數的圖形 (3 - 4 pp.218--220) (圖形的伸縮僅在例題中提及)

將  $y = ax^2$  的圖形沿  $x$  軸向右平移  $h$  單位，就得到  $y = a(x + h)^2$  的圖形。

將  $y = ax^2$  的圖形沿  $x$  軸向左平移  $h$  單位，就得到  $y = a(x - h)^2$  的圖形。

將  $y = ax^2$  的圖形沿  $y$  軸向上平移  $h$  單位，就得到  $y = ax^2 + h$  的圖形。

將  $y = ax^2$  的圖形沿  $y$  軸向下平移  $h$  單位，就得到  $y = ax^2 - h$  的圖形。

此外，依據《國民中小學九年一貫課程綱要》編寫的國中數學課本第五冊、第六冊，由於尙未出版，僅將綱要中對於教材規範的應有內容的三角函數相關課題分年細目中列示如表 4-2。

表 4-2 九年級分年細目之三角函數相關課題

主題	代號	內 容
幾 何	9-s-01	能根據平行線截線性質作推理。
	9-s-02	能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質。
	9-s-03	能理解三角形的相似性質。
	9-s-04	能理解平行線截比例線段性質。
	9-s-05	能利用相似三角形對應邊成比例的觀念，應用於實物的測量。
	9-s-06	能理解直線與圓及兩圓的關係。
	9-s-07	能理解圓的相關性質。
	9-s-08	能理解三角形外心的定義和相關性質。
	9-s-09	能理解三角形內心的定義和相關性質。
	9-s-10	能理解三角形重心的定義和相關性質。
	9-s-11	能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。
代 數	9-a-01	能以具體情境來理解二次函數的意義。
	9-a-02	能理解二次函數的樣式並繪出其圖形。
	9-a-03	能利用配方法繪出二次函數的圖形。
	9-a-04	能計算二次函數的最大值與最小值。
	9-a-05	能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質。
	9-a-06	能理解二次函數的圖形與拋物線的概念。
	9-a-07	能理解拋物線的線對稱性質。

根據教育部「九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教學素材製作計畫」的國、高中銜接教材內容比對研究，依《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》編寫的教科書，在三角函數相關課題方面，必須補充「乘法公式與多項式」、「方根的運算」、「線型函數與二次函數」、「幾何與證明」、「三角函數」等單元，以使學生能順利銜接高中階段的課程。

而從表 4-1 的教材內容來看，依暫行綱要編寫的教科書中所缺少的三角函數先備知識有「分數的四則運算」、「函數與函數值」、「線性函數的圖形」、「二次函數的圖形」、「平方根的四則運算」以及「距離公式」，在目前依《國民中小學九年一貫課程綱要》的國中教科書第一冊至第四冊，已補回「分數的四則運算」、「函數與函數值」、「線性函數的圖形」、「平方根的四則運算」以及「距離公式」；尚未出版的第五冊與第六冊，則應按照九年一貫數學能力指標在九年級的分年細目的規範，加入「二次函數的圖形」內容。而在高中第一冊中，《95 學年度高中數學課程暫行綱要》在「多項式函數」單元中再度安排一個段落做「函數的概念」與「二次函數的圖形」的闡釋。

在課題上做如此的補足，對於 97 學年度入學的高中生堪稱足夠，但是再經由深入觀察，會發現教科書中的內容與例題皆有著不同程度的減少與簡化，此與九年一貫課程強調尊重多元智慧，導致數學學習領域的授課時數相對於過去較為減少也有關係。在先備知識上經過了這樣的改變，學生到了高一下學期是否能順利銜接上三角函數的課程，則有待未來研究者的進一步調查。

## 4.2 高中課程之三角函數單元內容

以三角函數單元內容而言，《95 學年度高中數學課程暫行綱要》與 85 年版課程標準相較之下，主要的更動為：餘切、正割和餘割的圖形移入附錄以及刪除和差化積與反三角函數部分。本節以南一版 95 年高中數學教科書第二冊為範本，分析三角函數單元在各個課題下，學習內容所需的先備知識以及演練例題所需的連結知識，整理如表 4-3。其中相關知識為對照 4.1 節的表中的課題，括弧中的加註為該課題所在的冊別，國 1、國 2、國 3、國 4、國 5 與高 1 分別代表國中第一冊、國中第二冊、國中第三冊、國中第四冊、國中第五冊、高中第一冊。而加註「\*」號表示該課題在《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》中有所缺漏。

表 4-3 南一版高中數學教科書第二冊三角函數單元及相關先備知識

單元	主要課題	內容相關先備知識	例題相關連結知識
2-1 銳 角 三 角 函 數	銳角的三角比	比例式 (國 2) 相似三角形 (國 5)	比例式 (國 2) 勾股定理 (國 3) *平方根的四則運算 (國 3) 平行線的性質 (國 4) 相似三角形 (國 5)
	特別角的三角比	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) 比例式 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3)
	銳角三角函數	*函數與函數值 (國 2)	無例題

2-2 三角函數的基本關係	倒數、商數、平方、餘角關係	*分數的四則運算 (國 1) 勾股定理 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) 乘法公式 (國 3) *平方根的四則運算 (國 3)
	基本關係的應用		*分數的四則運算 (國 1) 乘法公式 (國 3)
2-3 簡易測量與三角函數值表	簡易測量	*方位的概念 (無)	*方位的概念 (無) *繪圖 (無) *平方根的四則運算 (國 3)
	三角函數值表	點、直線與角 (國 4)	*分數的四則運算 (國 1) 點、直線與角 (國 4)
	使用電算器求三角函數值		無例題
2-4 廣義的三角函數	廣義角	點、直線與角 (國 4)	無例題
	同界角		
	廣義的三角函數	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) 勾股定理 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3)
	同界角、 $(-\theta)$ 角、 $(180^\circ \pm \theta)$ 角、 $(90^\circ \pm \theta)$ 角、 $(270^\circ \mp \theta)$ 角與 $\theta$ 角之三角函數的關係	直角坐標平面 (國 2)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2)

2-5 正弦定理 與 餘弦定理	三角形面積與 正弦定理	*分數的四則運算 (國 1) 三角形 (國 4) 三角形的外接圓 (國 5)	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3) 三角形的外接圓 (國 5)
	餘弦定理	直角坐標平面 (國 2) 勾股定理 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3)
2-6 基本三角 測量	利用正弦、餘弦定理 解決測量問題		*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3) 勾股定理 (國 3)
3-1 三角 函數的 圖形	弧度	*弧長與扇形面積 (國 4)	*分數的四則運算 (國 1)
	扇形的弧長與面積	*弧長與扇形面積 (國 4)	無例題
	三角函數的圖形及其特性	*函數與函數值 (國 2) *函數的圖形 (國 2)	函數圖形的伸縮 (無) *函數的圖形 (國 2) 二次函數的圖形 (高 1)
3-2 和角公式	正弦、餘弦的 和角公式	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) 解二元一次聯立方程式 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) *距離公式 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2)
	正切的和角公式	*分數的四則運算 (國 1)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2)

3-3 倍角、半角與積化合差公式	倍角公式		*分數的四則運算 (國 1)
	半角公式	*分數的四則運算 (國 1)	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3)
	積化和差公式	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3)	*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3)
3-4 正弦、餘弦函數之疊合	化 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 為 $r\sin(\theta + \alpha)$ 之形式	直角坐標平面 (國 2) 勾股定理 (國 3) 平行線的性質 (國 4)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) 解二元一次聯立方程式 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3)
	正、餘弦函數疊合之應用	函數圖形的伸縮 (無) *函數的圖形 (國 2) 二次函數的圖形 (高 1)	函數圖形的伸縮 (無) *分數的四則運算 (國 1) *函數的圖形 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 二次函數的圖形 (高 1)
3-5 複數的極式	複數的幾何表示法	*距離公式 (國 3) 複數平面 (高 1)	無例題
	複數的極式	*分數的四則運算 (國 1) 勾股定理 (國 3) 複數及其四則運算 (高 1) 複數平面 (高 1)	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 複數及其四則運算 (高 1) 複數平面 (高 1)

棣美弗定理		*分數的四則運算 (國 1) *平方根的四則運算 (國 3) 複數及其四則運算 (高 1)
解 n 次方程式 $x^n - a = 0$		*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 複數及其四則運算 (高 1) 複數平面 (高 1)
極坐標	*分數的四則運算 (國 1) 直角坐標平面 (國 2) *平方根的四則運算 (國 3) 點、直線與角 (國 4)	

註一：「(國 1)」、「(國 2)」代表國中第一冊、國中第二冊，依此類推。

註二：「\*」號表示該課題在《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》中有所缺漏。

觀察表 4-3，學習三角函數單元除了在基本的內容上需要用到一般我們所認為課前應有的先備知識，在教學實務上，必須由教師講解例題來幫助學生加深理解，而演練例題時所需要的連結能力與相關知識是比學習基本內容時還要多出許多的。此外，在「簡易測量」課題內容中所需用到的「方位的概念」、「繪圖」，以及在「三角函數的圖形」課題內容中所需用到的「函數圖形的伸縮」相關知識，是在《國民中小學九年一貫課程綱要》以及《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中沒有明確規範在教材的應有內容中。而每一個課題的相關知識在《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》中，幾乎都有不同程度的缺漏。

就教材的內容而言，《國民中小學九年一貫課程綱要》與《95 學年度高中數學課程暫行綱要》在三角函數相關課題的銜接上堪稱足夠。然而國中教材的簡化是否在無形中造成了隱憂？學生是否具有真正的能力連結相關的知識來學習三角函數，則是我們下一步要去尋求的答案。

## 第 5 章 高中生學習三角函數之現況分析

根據相關文獻指出，過去的高中生在三角函數單元的學習成就比起其他單元較不理想，且學生的學習意願普遍低落（賴潔芳，2004；簡志明，2004），而在經過九年一貫課程的大幅改革後，這樣的情形又有了什麼樣的演變？

此章 5.1 節即在說明本研究利用「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」以及「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」，調查高中生在學習三角函數前的先備能力，以及三角函數課程結束後的學習成效，並由兩次測驗的成績進一步分析其中的相關性。

5.2 節至 5.4 節中說明本研究以自編之「九年一貫實施後高中生學習三角函數現況之教師意見訪問大綱」為藍本，與高中數學教師進行訪談的結果。根據訪談內容，紀錄諸位教師在三角函數單元的授課期間所觀察而得的實際狀況、察覺到的新現象以及提出的建議，進一步分析九年一貫課程對學生在高中學習三角函數單元所造成的影響，探討高中的教學資源應該如何做適當的修正來銜接。

### ※調查研究背景※

本調查研究的對象為 94 學年度高一學生及其數學科任課教師。《九年一貫數學課程暫行綱要》於 91 學年度從國中一年級開始實施，該屆學生應於 94 學年度就讀高一，然而由於高中課程在因應編修的時程上有所不及，94 學年度高一學生仍沿用 85 年版高中數學課程標準，並訂定於 95 學年度始實施《95 學年度高中數學課程暫行綱要》。而針對 94 學年度的高一學生，教育部唯恐國中與高中教科書在內容上的落差造成學習上的困難，因此著手進行「九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教學素材製作計畫」，經由國、高中銜接教材內容比對研究，制定出《九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教材》，

要求各高中於 94 學年度每週加一節數學課來配合進行，並鼓勵學校於開學前的假期提早辦理國、高中教材的銜接學習，彌補課程不足之處。而在調查期間，各校業已進行《95 學年度高中數學課程暫行綱要》的前置工作，加強對教師宣導校內配合暫行綱要的新規劃措施。

## 5.1 高中生之三角函數學習成就

本研究係利用「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」以及「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」，調查學生在學習三角函數單元前的先備能力，以及三角函數單元課程結束後的學習成效。受試之對象為北部地區 94 學年度高一學生，台北市取樣為成功高中、萬芳高中，桃園縣取樣為六和高中，新竹縣取樣為香山高中。施測以班級為單位，由各班教師安排於三角函數課程之前進行前測，並在學期終了前進行後測。總施測樣本數為 15 個班級共 613 人，但由於部份班級施測時程受到個別外來因素而延誤，為避免造成統計結果的偏差，因此將其中三個班級的受試資料視為無效樣本。至調查活動終了，有效樣本數計為 12 個班級共 464 人，各學校班級數及人數分佈如表 5-1。

表 5-1 施測學校班級數及人數表

學 校	班 級 數	人 數
台北市成功高中	3	127
台北市萬芳高中	3	102
桃園縣六和高中	3	135
新竹市香山高中	3	100
總計	12	464

### 5.1.1 三角函數相關課題之先備能力

針對學生於高一下學期接觸三角函數課程之前，在三角函數相關課題的先備知識是否足夠進行測驗，題目如圖 5-1。本測驗共 12 題，茲就每一題題旨及各校學生在該題作答的正確率整理出資料表如表 5-2。

表 5-2 三角函數學習現況之前測正確率

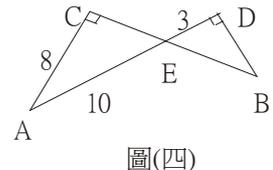
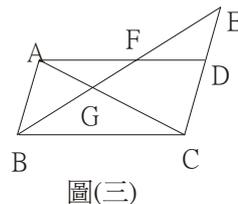
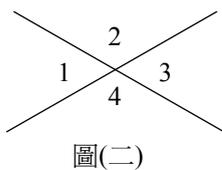
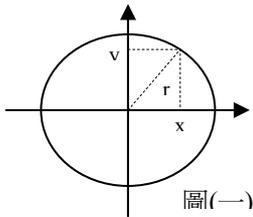
題號	三角函數相關課程內容	正確率				
		成功	萬芳	六和	香山	平均
1	利用三角形的邊角關係，判斷任意三角形中，邊與角及邊與角的大小關係。	95%	86%	74%	83%	84%
2	由互補與互餘的定義計算兩角的角度與之間的關係。	94%	76%	60%	62%	73%
3	應用三角形的相似性質，求出相似三角形對應角的角度。	99%	97%	93%	95%	96%
4	利用三角形的相似性質，判斷對應邊與對應角的正確關係。	99%	93%	93%	93%	95%
5	從三角形三邊的連比，察知該三角形的內角角度性質。	93%	85%	67%	59%	76%
6	利用坐標平面上的點與坐標的關係，以畢氏定理求線段長度。	96%	85%	70%	78%	82%
7	利用平方根的四則運算性質計算並有理化數值。	97%	86%	67%	73%	80%
8	利用畢氏定理以及平方根的四則運算，計算直角三角形的斜邊長	95%	82%	76%	77%	83%
9	利用三角形的內角角度性質解一元一次方程式。	99%	94%	95%	94%	96%
10	利用周角角度性質及已知角度計算未知的角度。	99%	96%	97%	97%	98%
11	利用三角形的相似性質推論圖中三角形的相似情形。	92%	76%	47%	51%	67%
12	利用三角形的相似性質以及畢氏定理，計算未知的線段長度。	93%	91%	87%	87%	89%

圖 5-1 三角函數學習現況調查研究試卷（前測）

## 三角函數學習現況調查研究試卷（前測）

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

- ( ) 1. 若有一任意三角形 ABC，則下列敘述何者錯誤？(A)  $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$   
 (B)  $\overline{AC} - \overline{AB} < \overline{BC}$  (C) 若  $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，則  $\angle B > \angle C$  (D) 若  $\angle B > \angle C$ ，則  $\overline{AC} < \overline{AB}$ 。
- ( ) 2. 若  $\angle 1 = 120^\circ$ ， $\angle 1$  與  $\angle 2$  互補， $\angle 2$  與  $\angle 3$  互餘，則  $\angle 1$  與  $\angle 3$  是(A)互補  
 (B)相等 (C)和為  $90^\circ$  (D)差為  $90^\circ$ 。
- ( ) 3. 將三角形 abc 用影印機放大 150%得三角形 ABC，已知  $\angle a = 40^\circ$ ，則  $\angle a$  的對應角  $\angle A$  為 (A) $20^\circ$  (B) $40^\circ$  (C) $60^\circ$  (D) $100^\circ$ 。
- ( ) 4.  $\triangle abc \sim \triangle ABC$ ，則(A) $\angle c = \angle C$  (B) $\overline{ab} = \overline{AB}$  (C) $\overline{ac} = \overline{AB}$  (D) $\angle a = \angle B$ 。
- ( ) 5. 若有一三角形，三邊的長度比  $1:1:\sqrt{2}$ ，則下列何者正確？(A)此三角形為銳角三角形 (B)  
 此三角形為鈍角三角形 (C)此三角形為直角三角形 (D)有兩內角和為  $140^\circ$ 。
- ( ) 6. 如圖(一)，坐標平面上有一以原點為圓心，以  $r$  為半徑的圓，圓上一點的坐標為  
 $(x, y)$ ，則  $x^2 + y^2 =$  (A)  $r$  (B)  $r^2$  (C)  $\sqrt{r}$  (D)  $2r$ 。
- ( ) 7. 若  $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ，則  $a^2 + b^2 =$  (A)18 (B) $8\sqrt{3}$  (C)16 (D) $6\sqrt{6}$ 。
- ( ) 8. 若直角三角形的兩股為 3 與  $\sqrt{6}$ ，則斜邊長為 (A)9 (B)15 (C)3 (D) $\sqrt{15}$ 。
- ( ) 9.  $\triangle ABC$  中， $\angle A = (2X + 3)^\circ$ ， $\angle B = (3X - 5)^\circ$ ，若  $\angle C = 82^\circ$ ，則  $X =$  (A)19 (B)20  
 (C)21 (D)22。
- ( ) 10. 如圖(二)，兩直線相交於一點，形成的四個角依序為  $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，若  $\angle 2 + \angle 3 +$   
 $\angle 4 = 300^\circ$ ，則  $\angle 1 =$  (A) $50^\circ$  (B) $60^\circ$  (C) $70^\circ$  (D) $80^\circ$ 。
- ( ) 11. 如圖(三)之平行四邊形 ABCD，則下列哪一個三角形與  $\triangle DEF$  相似？  
 (A) $\triangle ABF$  (B) $\triangle AGF$  (C) $\triangle ABG$  (D) $\triangle ABC$ 。
- ( ) 12. 如圖(四)， $\overline{AD}$  與  $\overline{BC}$  交於一點 E，若  $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且  $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{AE} = 10$ ，  
 $\overline{DE} = 3$ ，則  $\overline{BC} = ?$  (A)9 (B)10 (C)11 (D)12。



觀察表 5-2，學生作答的平均正確率普遍在 80% 以上，且各校之間的正確率也僅有些微的差距，顯示九年一貫國中課程基礎數學的學習成效，幾乎不會因為各校學生素質的不同而有所差異，而這個成效可說是相當良好的。此外，在正確率低於 80% 的第 2 題與第 11 題中，研究者也透過教師瞭解，這是由於該屆學生在國中所使用的教科書品質不一，有部份學生完全沒有接觸過「互餘」的課程內容，因此第 2 題呈現出稍低的正確率；而在正確率最低的第 11 題中，由於需要較多步驟的推導，以致於學生解題時容易發生錯誤，這也呼應了教師表達的意見中，學生推導能力下滑的情形。

### 5.1.2 三角函數單元之學習成就

針對學生於高一下學期結束三角函數課程之後，在三角函數單元的學習成就進行測驗，題目如圖 5-2。本測驗共 16 題，茲就每一題題旨以及學生在該題的正確率整理出資料表如表 5-3。

觀察表 5-3，正確率普遍不到七成，且各校學生之間也產生了較大的落差，顯示學生在學習三角函數單元的成效是有待加強的。而其中需要較多計算題目如第 10、11、12 題以及關於函數值域的第 5、6 題，正確率則在五成以下，需要作圖的第 13 題更只有 21% 的正確率，這些現象也呼應了教師意見中，學生的計算能力以及函數與函數圖形的概念較弱的情形。

## 三角函數學習現況調查研究試卷（後測）

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

### 選擇題：

- ( ) 1. 設  $a = \sin 50^\circ$ ,  $b = \cos 50^\circ$ ,  $c = \tan 50^\circ$ , 其大小順序為 (A)  $a > b > c$  (B)  $c > a > b$  (C)  $a > c > b$   
(D)  $b > c > a$ 。
- ( ) 2. 若  $\tan \theta > 0$ ,  $\sec \theta < 0$ , 則  $\theta$  在下列哪一個範圍內? (A)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$   
(C)  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  (D)  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 。
- ( ) 3. 設  $a = \sin 1$ ,  $b = \sin 2$ ,  $c = \sin 3$ ,  $d = \sin \frac{\pi}{2}$ , 則 (A)  $d > a > b > c$  (B)  $d > a > c > b$  (C)  $d > b > a > c$   
(D)  $b > c > a > d$ 。
- ( ) 4.  $\sin(\cos^{-1} \frac{3}{5}) =$  (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{6}{5}$ 。
- ( ) 5. 下列何者有意義? (複選) (A)  $\sin^{-1}(-2)$  (B)  $\sin^{-1} \frac{3}{4}$  (C)  $\sin^{-1} \pi$   
(D)  $\sin^{-1} \frac{\pi}{4}$  (E)  $\sin^{-1}(-\frac{2}{5})$ 。

### 填充題：

6. 若  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 請問餘弦函數值  $\cos \theta$  的範圍為何? \_\_\_\_\_。  
正割函數值  $\sec \theta$  的範圍又為何? \_\_\_\_\_。
7. 設  $\theta$  是銳角, 且  $\cot \theta = \frac{12}{5}$ , 則  $\sin \theta - \cos \theta$  之值為 \_\_\_\_\_。
8. 寫出下列各三角函數的值: (1)  $\sin(-90^\circ) =$  \_\_\_\_\_。 (3)  $\sec 540^\circ =$  \_\_\_\_\_。
9.  $150^\circ$  為多少弧度? \_\_\_\_\_。
10. 設  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\tan \beta = \frac{12}{5}$ , 則  $\sin \beta =$  \_\_\_\_\_,  
 $\sin(\alpha + \beta) =$  \_\_\_\_\_。
11.  $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ =$  \_\_\_\_\_。
12.  $\sin 72^\circ + \sin 144^\circ + \sin 216^\circ + \sin 288^\circ =$  \_\_\_\_\_。

### 作圖題：

13. 試草繪  $\frac{3}{2} \sin(\pi\theta)$  的圖形。

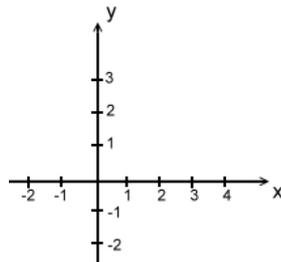


表 5-3 三角函數學習現況之後測正確率

題號	三角函數相關課程內容	正確率				
		成功	萬芳	六和	香山	平均
1	由銳角三角函數的基本定義推論同一個銳角的正弦、餘弦與正切值的大小。	92%	81%	47%	36%	64%
2	在給定同一個廣義角之正切、正割值正負號的條件下，判斷該廣義角的所在範圍。	92%	82%	63%	62%	75%
3	察知 360 度制與弧度制的不同，判斷各個給定角度所在象限，以比較其正弦值的大小。	76%	45%	36%	26%	47%
4	由三角函數與反三角函數合成的關係，利用畢氏定理算正弦值，並代入合成函數求值。	88%	73%	35%	23%	55%
5	由廣義角正弦函數的基本定義推論其值域範圍，判斷各數值代入反函數是否有意義。	65%	50%	10%	35%	39%
6-1	由三角函數的基本定義推論一銳角之餘弦函數以及正割函數的值域範圍。	77%	36%	09%	10%	34%
6-2		47%	11%	02%	03%	16%
7	在給定的銳角之餘切值條件下，利用畢氏定理計算其正弦值以及餘弦值的差。	75%	70%	47%	31%	56%
8-1	由廣義角三角函數的定義及同界角的轉換，判斷各個給定角的正弦值以及正割值。	93%	85%	51%	44%	69%
8-2		88%	66%	31%	22%	53%
9	360 度制與弧度制的轉換。	87%	75%	69%	74%	76%
10-1	在給定角度的正切值條件下，利用畢氏定理計算其正弦值，並判斷其正弦值的正負號。	76%	43%	27%	26%	44%
10-2	利用正弦函數和角公式，在給定兩角度的正弦值條件下，計算兩角度之和角的正弦值。	49%	32%	16%	15%	28%
11	利用餘角關係在正弦函數及餘弦函數之間作轉換，再由三角函數的平方關係求解	76%	52%	33%	40%	50%
12	利用同界角的關係轉換正弦函數，再由兩兩對稱角度之間的正弦函數關係求解。	79%	61%	18%	29%	46%
13	利用正弦函數的圖形及其依係數縮放振幅、週期的特性繪製所給定的函數圖形。	54%	25%	02%	03%	21%

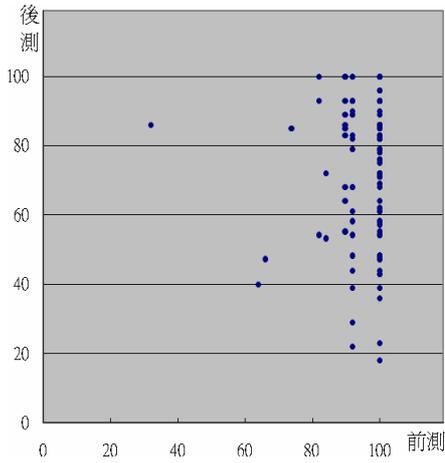
### 5.1.3 高一學生在三角函數單元之學習相關性分析

針對學生在「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」以及「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」所得分數作相關性的分析。前測之配分為第 1 至 10 題每題 8 分，總分 100 分；後測配分為選擇題每題 4 分、填充題每題 7 分、作圖題 10 分，總分 100 分；本研究將兩次測驗分數以皮爾遜（K. Pearson）的積差相關（product-moment correlation）方法計算其相關係數。茲分別將各校學生兩次測驗的分數散佈圖以及其相關係數整理如圖 5-3。

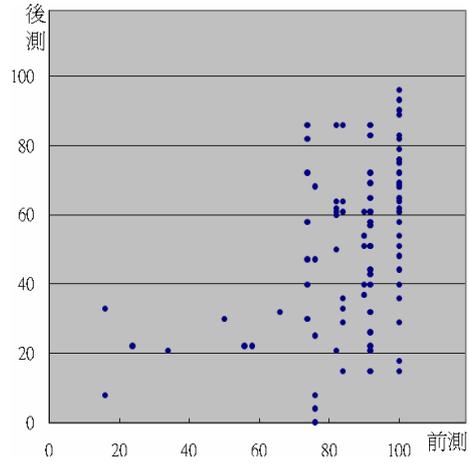
四校學生在前、後測的分數上皆有大幅的落差，前測平均分數全部在 75 分以上，而相較之下後測平均分數則呈現 20 至 50 分不等的下滑。此外、學生在三角函數相關課題的先備知識，理應與學習三角函數單元的學習成就息息相關，然而四校學生前、後測分數的相關係數全部在 0.5 以下，成功高中更只有 0.033。由以上統計資料結果，我們可以看出以下的推論：學生在學習三角函數之前的先備知識程度，與他在三角函數單元的成就，兩者之間的相關性是相當低的。

此外，本研究也以班級為單位作相關性分析，其中有兩個班的前後測相關係數是較高的，分別為 0.462 與 0.605。若以自由度為 35 人而言，將顯著水準定為  $\alpha=0.01$ 。經查積差相關的考驗表之後，得知其臨界值為 0.418。則兩班都超過臨界值，也就是這兩個班級學生前後測分數不是零相關，但前者與臨界值僅有些微的差距；而後者的相關係數最高，但參考其它關聯測驗成績相關性分析研究中的數據，多為 0.65 以上方宣稱其間具顯著相關，因此，我們認為該班級的前後測成績仍未達顯著相關。

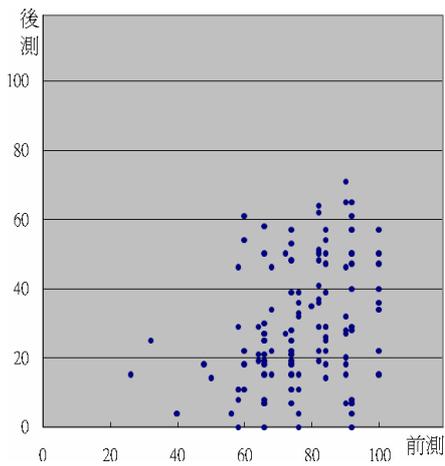
圖 5-3 三角函數學習現況之前、後測成績分佈圖



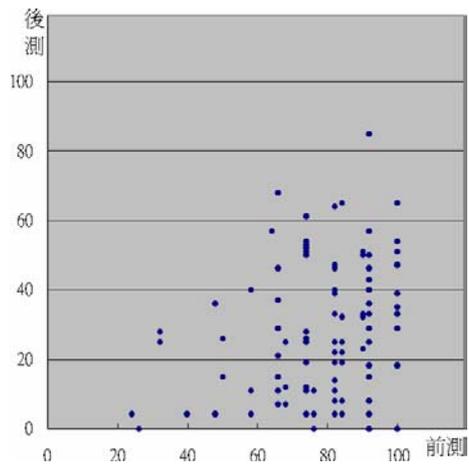
校 別： 成功高中  
 前測平均： 95.86  
 後測平均： 74.03  
 相關係數： 0.033



校 別： 萬芳高中  
 前測平均： 87.28  
 後測平均： 52.87  
 相關係數： 0.456



校 別： 六和高中  
 前測平均： 76.70  
 後測平均： 29.02  
 相關係數： 0.345



校 別： 香山高中  
 前測平均： 78.68  
 後測平均： 28.16  
 相關係數： 0.268

#### 5.1.4 探討

從前測的平均分數以及本文 5.1.1 中所述，我們可以合理地推論出，學生在九年一貫國中課程內的三角函數先備知識具有良好的程度，但是在高中三角函數單元卻未必有相對的良好表現，且學習成效相當低落。且本研究進行前測的時間與學生考完基本學力測驗的時間間隔將近一年，但學生仍然未因疏離國中課程太久而產生太大的落差，反觀後測的表現，施測的日期乃是安排在學生剛結束三角函數單元課程，正在準備第三次段考的期間，理應是學生對該單元記憶最新、反應最快的時機，然而這一點優勢卻在後測的平均分數上無跡可循。

那麼學生在先備知識上的良好條件，難道不足以幫助他們在這個單元得到良好的學習成效嗎？在本研究進一步的相關性分析中則揭示了這一點，兩者之間的相關性極為微渺。

在固有的觀念中，學習的脈絡就是在知識上循序漸進地去認知、理解，在個體上既然有著優質的先備能力，再進入下一個階段的學習，應要能夠承上啓下，發展出更為良好的學習成效，但在實地調查的結果下卻得不到這個合理的結果。那麼造成以上現況的因素究竟為何？這便是本研究必須要從另一個角度去深入探討這個問題的原因。

※ ※ ※ ※ ※

有鑑於單方面由學生在紙筆測驗所表現的學習成就，不足以呈現學習歷程的整體情形，本研究另由高中教師的觀點，從多面向來瞭解高中生的學習現況，並進一步徵詢高中教師對於修訂高中課程正式綱要的意見。

以下三節為訪談資料之歸納整理結果，從高中教師的觀點探討九年一貫後關於學習三角函數單元的現況。5.2 節為教師自 94 學年度的教學實務中觀察三角函數單元的課程規劃是否符合學生學習上的需求；5.3 節為教師描述學生在三角函數單元的學習成就以及學習態度中，他們所發現重大的差異表現；5.4 節為教師根據自身的教學經驗對於未來應如何改善學生學習現況的建議。此三節於各段落呈現訪談逐字稿相關部分的原始內容。其中  $T_i$  表示依面晤時間先後排序之序號  $i$  的教師。

※ ※ ※ ※ ※

圖 5-5 九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見訪問大綱

## 九年一貫後高中生學習三角函數現況之教師意見訪問大綱

親愛的老師您好：

這份問卷的目的在於借重您寶貴的經驗，瞭解九年一貫課程實施後，學生進入高一學習三角函數的過程中，是否和以往的學生有所差異，又需要給予何種與過去不同的資源，使得整體學習更臻完善。藉以探討當前教育改革之下所形成的現況，並作為未來擬定高中課程正式綱要的參考。

請您詳閱以下問題，並於三角函數的課程結束後安排約 30 分鐘的時間，讓我們前往貴校拜訪您，就下列的問題與您作一對一的訪談，謝謝您的協助。敬頌

教祺

國立中央大學數學研究所謹啓

1. 請問在三角函數這個單元，你大概花了多少時間來闡述所有內容讓學生瞭解呢？學校所排定的課程時間表可以讓學生有足夠的時間學習嗎？這些時間和前幾屆的學生的比較上是否有些許差異呢？
2. 你覺得學生沒有三角函數的先備知識，會不會讓你教起來比較吃力？需要花比較多的時間建立學生的基礎嗎？
3. 若以細目分為下列幾種，你覺得學生在大概哪幾點的學習狀況比較不佳？和以往的學生狀況有差異嗎？
  - (1) 角度與弧度
  - (2) 廣義角
  - (3) 反三角
  - (4) 正、餘弦定理
  - (5) 三角函數之圖形問題、週期
  - (6) 應用問題（測量問題）
4. 現在很多學生都會參加課後輔導（如補習班、家教），這樣在上課情形會給你怎樣的幫助或障礙嗎？在三角函數這個單元的情形會特別嚴重嗎？
5. 廣泛來說，你覺得這一屆的學生和以往的學生在學習三角函數上最大的差異在哪裡？
6. 你覺得在這麼短的時間內，讓學生學習這麼多三角函數的東西，學生會不會容易有適應不良的問題？是否有什麼方法可以幫助學生改善這個狀況呢？
7. 對於現階段的三角函數安排，你是否有一些建議或是批評呢？對於學生在學習三角函數上，是否可以給學生一點建議呢？

## 5.2 課程規劃

### 5.2.1 時數

《九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教材》中，約有 20 堂三角函數相關單元課程，各高中經考量校內整體課程規劃，將銜接課程分別納入寒、暑假輔導課或學期中之課後輔導，並根據學生狀況增加授課時數。估計各校至課程終了時，在三角函數單元的授課時數分別為：成功高中 72 堂、萬芳高中 84 堂、香山高中 90 堂 (包括寒、暑期輔導)、六和高中 114 堂 (包括暑期輔導)，平均為 90 堂。以現行課程而言，三角函數單元應該是在高一下學期間的 12 週內完成，而《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中，高一下學期僅規劃每週 4 堂的教學時數，即使每週加上一堂輔導課，12 週一共只有 60 堂課，而暫行綱要中的三角函數課程與 85 年版的舊課程相去無幾，僅刪除了反三角函數一節以及和差化積的部分內容，授課時數卻整整少了 30 堂課，其間的落差甚鉅，況且對於 94 學年度實際進行的時數，部分教師仍認為有所不足。

本研究將九年一貫後三角函數單元需要更多授課時數的原因歸納如下。

#### (1) 三角函數的基礎概念須重新介紹

過去的學生在國中時期的選修課程中，仍有三角函數單元的基礎課程，因此學生在進入高中時都有初步概念，或是至少對三角函數的符號有些許印象，而九年一貫課程實施後，三角函數對高一下的學生而言是全新的單元，學生需要時間去適應前所未見的符號及定義，教師在進度上便必須配合學生放慢腳步，因此即使是六個三角函數符號的基本定義，都要花較過去為多的時間

讓學生產生一定程度的認知。受訪教師中即有兩位教師在正式進入三角函數課程之前，整整撥出兩堂課的時間做整體內容的闡述。而除了一開始建立認知的講解時間較多，在往後課程中的應用上，也因為學生的熟悉度不夠，教師必須不斷重複地提醒基礎的定義與概念，這一點更大大延宕教學進度。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在三角函數單元的接受度，在一開始講述基礎概念，學生是否相對需要較多的時間來適應？教師答覆如下：

T<sub>01</sub>：都要比以前多講個兩三遍，相對的來說是要多花一些時間來補足他們以前的不足，那這個學期的課程也沒有比以前簡單，所以這邊拖一下，那邊拖一下，到最後時間就不夠。

T<sub>02</sub>：當然（花比較多時間）啦！原本都沒有學過三角函數，一下子來了六個，對他們來講比較難……我們有把一部分課程先略過，我們有兩個單元安排在暑假上。

T<sub>03</sub>：我們是有比較放慢腳步，所以是有在用比較慢的速度在讓他們學習，因為基礎不好嘛！所以就是看他們的進度慢慢教……而且問題都要在課堂上就解決，不能直接把問題丟給他們，不然下一次來上課他們還是一樣不會，所以說課堂上要帶著他們討論，帶著他們寫，就變成會用掉很多課堂上的時間，因為他們題目都要在課堂上寫。

T<sub>05</sub>：在建立這個觀念的時候，是要花比較久的時間……他們的基礎完全是零，建立上會比較困難，他們會覺得這些實在很抽象，光是三角函數的六個符號的定義，就蠻難去跟他們建立一些認知。

T<sub>06</sub>：應該是更多時間，因為我之前有帶過一屆，這兩屆的差異上是這樣……如果說他國中沒有接觸過的話，當然會比較不容易進入狀況……那我們就是一直不斷重複的講，這個佔用蠻多時間的。

T<sub>07</sub>：今年的高一狀況比我想像中還要難過一點，因為本來一些基本的東西交代過去就可以了，現在可能要花很多時間……我們在第二章的部

分，講一些基本的三角函數的時候就會拖很久，所以第二次段考本來是應該要考到第三章，後來只考到第二章結束，那這樣拖下去，所以到最後我們學校很多老師都上得蠻辛苦的……那這個部分他們的先備知識可以說是幾乎沒有啦！所以說要花很多時間去建構他們的概念。

T<sub>09</sub>：以前的人在進高中的時候，他對三角函數已經先有一定的概念，就以我們現在的課本來講，他都已經有兩節有基本的概念了，所以我們可以很快的複習一下，就進入高中的主題，那現在就是完全要從頭開始，孩子光是要背 sin、tan 這些英文字母，就要背很久了。

T<sub>12</sub>：去年的學生，因為以前學過了，所以後來在高中的時候，跟他們講這個東西，他還蠻快就可以進入這個狀況的，那今年的學生完全沒學過，那我就慢慢地講，從定義開始慢慢說，可是我發現今年的學生，還是覺得那是很陌生的東西，所以他們的適應期會有一陣子，所以剛開始我前面可能撥個一、兩堂課，稍微介紹一下三角函數是在做什麼。

\*\*\*\*\*

## (2) 推導與證明過程須細部講解

九年一貫課程在數學推導與證明的內容上強調「簡單步驟」，以致學生上高中後對於推導與證明的過程感到相當陌生，與過去的經驗作比較，多數教師覺得這一年上課很吃力，學生對推導與證明的瞭解非常緩慢，或是根本無法接受。過去只要簡單地帶學生整個看過去的相同題型，對本屆學生就必須在每一步驟作清楚的解說，檢討考卷時也必須一再說明書寫證明題的規則。學生對於基本的邏輯推理有著嚴重的錯誤概念，即使經過教師個別指導後，依舊常發生類似的錯誤。受訪教師表示，上課時需要提醒學生注意細節的次數比過去多很多，這一屆的學生容易忽視證明過程中應有的嚴謹模式，教師必須

挪出課堂上的時間帶領學生作證明題的演練。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在三角函數單元學習歷程中，所出現較特殊的情形，教師答覆如下：

T<sub>08</sub>：像前幾屆，我只要把證明簡單地帶他們整個看過去就行的，但是這一屆的不行，我必須一題一題講，然後把學生一個一個叫過來問，跟他們說這種証法是不行的。這很嚴重，像我們證明的東西，比如說  $A \Rightarrow B$  這個式子，他們就都會直接寫  $A=B$  這樣，他們的心裡就會覺得就是可以這樣寫，而且這個已經講過很多次了，他們還是會，那個邏輯概念都不行。

T<sub>09</sub>：時數是比以前還多了一個小時（銜接課程），多了一個小時以後，我們現在是勉強可以把課趕完，但是因為以前的小朋友，他的底子稍微好一點，所以他少了這一個小時，一個學期下來大概少十七個小時，但是這些時間可能要用來補以前他們少學的這些東西，我個人認為是補不回來的。

T<sub>14</sub>：你一下子不能跳太多，一定要一步一步慢慢講，不能直接從某一步就直接跳到給你答案。

T<sub>15</sub>：我覺得他們整個理解力都比較弱，有時候我在上課的時候推一個公式給他們看，他就會問這一步為什麼可以這樣，那以前的學生就都不會問這種問題，可是他們就是你要一步一步解釋給他們聽

\*\*\*\*\*

### (3) 數字的運算能力須額外訓練

九年一貫課程強調理解，因此教材中的例題以及測驗卷的題目僅採用少量而方便計算的數據，讓學生對數字的內在邏輯有較流暢的感覺，以增強學生的自信心，避免大量、繁複的演算造成的錯誤引起沮喪感，使學生放棄學習。

然而，94 學年度高一學生的計算能力也因此較過去的學生弱，在課堂上不論是做習題的演練，或是舉行隨堂測驗，都比過去要花費更多的時間。而許多教師便在課程進度的壓力下，改以安排課堂外時間考試的方式替代練習，設計計算類型為主的考題，在正課以外的時間進行，目的在於加強學生的計算能力，避免拖垮課程進度。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師 94 學年度高一學生學習上較大的困難點為何，教師答覆如下：

T<sub>01</sub>：計算能力吧！有時候我們需要用到一些工具，他都沒有工具，就必須要從頭開始講，而且不一定講一次他就可以很快地把握到那個技巧，所以要花更多的時間去教……我們在銜接教材的時候有講過，但是都要比以前多講個兩三遍，相對的來說是要多花一些時間來補足他們以前的不足，那這個學期的課程也沒有比以前簡單，所以這邊拖一下，那邊拖一下，到最後時間就不夠。

T<sub>09</sub>：他們現在國中、國小的學習，計算方面太不要求，而我們這個地方，有的東西你道理簡單，可是計算上是很繁複的，像正、餘弦定理。

T<sub>12</sub>：今年的學生學習力比較差一點，比較低落一點，就是除了運算能力上比較差以外，腦筋的思考，有時候不太愛動。

T<sub>14</sub>：因為他們國中的時候學的比較輕鬆一點，所以說要花很多時間再去磨他們計算的那個部分……等於你一方面要上新課程，一方面還要幫他複習他國中學過的東西，配方法也是……那些小細節要花太多時間琢磨，比如說每個單元我們以前大概都是一個禮拜五節課就解決，但是他們這一屆都還要再多一節，因為他們都要再多花時間在計算的部分。

T<sub>15</sub>：他們一些很基本的，像是計算能力，都比較弱，我覺得是因為他們的訓練比較少一點。

\*\*\*\*\*

研究者發現，受訪的高中教師皆因應這一屆學生在三角函數單元課程進度的落後，而討論決定縮減該學期第二次段考的範圍，部分學校更因為最後無法教完，將課程順延至暑假的輔導課再繼續。而在學期終了以前結束三角函數單元的教師也表示，課程到最後相當匆促，只能勉強地將課本上的教完，完全沒有辦法講解任何補充的教材。

受訪教師以其過去的教學經驗，分析學生應有的學習歷程，他們表示：三角函數單元需要花時間去熟悉其符號以及運算，練習的份量必須要達到一定程度，否則的話學生無法消化三角函數單元大量的內容，且必須經過學習、練習、錯誤、改正，然後再練習、再錯誤、再改正，這些都需要教師在課堂上做適當地引導。然而在實務上常為了配合進度，不斷地加新的內容進來，教材的精讀以及習題的演練只能讓學生在課後自行安排時間，學生沒有跟上的話，便很難在後面的章節運用，因此愈到後面，學生落後、甚至放棄的情形就愈多。

以平均 90 堂課的學習情形況且如此，而《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中的三角函數單元課程時數將縮短為 60 堂課，雖然刪除部分內容，但教師一致認為不足，對未來的學生感到憂心。

## 5.2.2 教材

受訪教師表示，過去教材一致由國立編譯館統整彙編，長年以來依循固有的理念進行改版與修訂，因此，過去的國中教材與高中教材之間，有著相當程度的銜接性與連貫性。以三角函數單元而言，過去只要延續著國中的觀念講述，學生隨即可以進入狀況。而九年一貫後，國中教材與高中教材之間產生了落差，教育部也

因應實際所需，提出修改高中教材的相關措施，並針對 94 學年度高一新生規劃銜接教材。但是在學生身上由於國中教材所產生的程度上的落差，似乎並不是找個學習的空檔期，將遺漏的內容填進去就足以彌補。

九年一貫課程在教材上呈現出截然不同的面貌，題材中除了完全刪除「三角函數的基本概念」單元之外，三角函數相關課題的內容也都有不同程度的變動，這些變動對於學生在銜接高中課程上造成了什麼樣的影響？以下歸納受訪教師觀察學生在三角函數單元的學習歷程中，由於九年一貫後國中教材的變化所產生的重大差異。

#### (1) 推理能力薄弱，無法獨立作出正確證明過程

九年一貫課程在國中階段，對於幾何推理的內容，僅強調學習「簡單」步驟的推理，教材中的習題多以「填充式證明」為主，加上基本學力測驗題型只有選擇題造成國中教學策略的改變，因此學生在國中時期幾乎沒有獨立做證明題的練習，以致對證明過程非常陌生，教師在課堂上講解三角函數的相關定理或是公式的推導時，發現許多學生無法將證明的過程一脈相連地去思考。而在考試時只要遇到證明題，約有一半的學生會直接放棄作答，有作答的學生大部分也無法掌握書寫證明題該有的規則與細節。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師認為 94 學年度高一學生在學習三角函數單元上，所發生的特殊困難為何？教師答覆如下：

T<sub>08</sub>：我覺得尤其他們證明的能力，幾乎是非常非常地弱，比以前差很多，幾乎不太會寫證明，因為我們有一些就是數學上必須要用的，就是推理的模式，他們寫的根本就不行，他們在國中的時候沒有經過這個訓

練……像前幾屆，我只要把證明簡單地帶他們整個看過去就行的，但是這一屆的不行，我必須一題一題講，然後把學生一個一個叫過來問，跟他們說這種証法是不行的。這很嚴重，像我們證明的東西，比如說  $A \Rightarrow B$  這個式子，他們就都會直接寫  $A=B$  這樣，他們的心裡就會覺得就是可以這樣寫，而且這個已經講過很多次了，他們還是會，那個邏輯概念都不行。

T<sub>14</sub>：他們對證明非常地陌生，因為他們國中的時候沒有講那種證明……比如像前一屆的，你只要跟他說這是怎麼來的，他就算是以後忘記，他還是可以自己慢慢導，慢慢去湊，可是這一屆即使是程度比較好的，他還是湊不出來，然後你會發現他湊不出來不是因為他沒唸，是因為他沒有辦法去聯想到，可以說是對這個比較沒有感覺……他們比較不會自己去推公式，就是當他忘記的時候，而且是對成績好的學生來講，他上課的時候也許聽得懂，可是他沒有辦法自己去推，還是用硬記的。

T<sub>15</sub>：以前的國中有幾何證明題，現在沒有，所以他們好像都不會思考，不知道要思考什麼，我覺得沒有教證明題差很多，腦袋有沒有訓練差很多。這樣數學跟其他科目沒差別，就是背起來，然後現在又不用什麼計算，數字很簡單，所以他們到高中會覺得數學一下子變得好複雜。

\*\*\*\*\*

## (2) 無法判讀應用問題題意

九年一貫課程實施後，國中教材整個作了一次大幅度的改變，其中一個較為明顯的差異，就是許多版本的教科書內容大量使用圖片，學生由豐富生動的光鮮圖文，加深對課內知識的認知，然而也造成學生對於教材所提供的圖像產生依賴，以致於閱讀文字的能力降低。在高中遇到僅有文字敘述的應用問題時，無法自行構思出題意所指的圖形，更難以下筆繪製、解題。其中又以

空間問題最為嚴重。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師認為學生在三角函數中的哪些部份較有困難，教師答覆如下：

T<sub>04</sub>：只要遇到應用問題都很害怕，就是看到中文，他沒有辦法把它轉變成數學的式子……測量最大的問題就是他們不會畫圖，他圖畫不出來，那當你圖畫不出來的時候，你三角函數、邊跟邊之間的關係就不對了！

T<sub>06</sub>：測量方面的問題就是，他們立體的概念很缺乏，在平面的時候他們還可以，但是如果遇到應用問題，他們就會連圖形都畫不出來……連畫都沒有畫，這一部分我就不曉得是國文程度不好，還是不會畫圖，我覺得應該都有啦！所以導致他們無法解題。

T<sub>08</sub>：應用問題的話，以前的學生問的問題比較少，這屆的學生連題目都不見得看得懂……像應用問題有時候會講到走幾步路，然後測量高度，那以前的學生真的就很容易自己做圖，現在的學生不會。

T<sub>09</sub>：看著題目的敘述，他畫不出那個圖來……一般的數學語句，簡單一點的，比較明確一點的，他們都畫不出圖，最主要是沒有那個習慣，而且國文程度又很差，還有這邊還有一些測量的問題是空間問題，但是他們在一張紙上面要想像出空間問題來不太容易。

T<sub>10</sub>：學生遇到立體測量的問題，大多無法自行繪出正確圖形，也無法將立體圖形轉成平面圖形。

T<sub>12</sub>：應用對他們也有一點難，他們不會畫圖，他們很難把中文轉成數學，就是比方說題目講我現在人在燈塔的右邊，然後看什麼地方等等的，然後他就不知道怎麼去畫那個圖形，我不知道是他們的空間概念差，還是他們解讀的那個語意上不太能瞭解，然後要我畫在黑板上，他們才知道原來是這樣子畫，然後真的拿一個題目給他們看，他們其實也很難下筆，不知道要去畫哪邊。

\*\*\*\*\*

### (3) 缺乏函數圖形概念

國中課程將函數的概念去掉，僅教導學生將方程式的數對對應繪製到直角坐標系的平面上，而同樣由於基本學力測驗題型只有選擇題造成國中教學策略的改變，因此學生練習的機會減少許多，以致對於在坐標平面上作圖的概念相當模糊，甚至對於數對中的數字該對應  $x$  軸或是  $y$  軸都不清楚。受訪教師表示，許多學生在高中第一冊的一次函數、二次函數圖形已較過去的學生表現為差，三角函數圖形的繪製對他們而言更是困難。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師認為 94 學年度高一學生在三角函數單元中的哪些章節較難進入狀況，教師答覆如下：

T<sub>02</sub>：你就花時間帶著他們描點，這些他們都還可以接受，只是給他們題目要他們自己去畫，他們就都不是畫得很好，那圖形的應用、移動，有些學生就是沒有辦法接受。

T<sub>07</sub>：我覺得圖形不只是在三角函數有問題，連坐標系的建構的時候，他們連一次函數、二次函數，他們對函數的圖形感覺都很差，我覺得高一的時候，函數的圖形要畫在坐標平面上這種轉換，我覺得他們在國中的時候訓練度比較欠缺，國中的時候是把函數的概念去掉，那現在他們一次函數、二次函數都不一定會畫，那三角函數更是困難……他們現在函數圖形的概念就很差，我發現他們在國中之前，他們幾乎都沒有建構。

T<sub>09</sub>：他們都畫不出圖，最主要是沒有那個習慣……而且那個反三角函數，只是一個符號而已，但是對他們來講，因為他們國中都沒講過函數，所以這些都要靠我們來講，我們講起來簡單，可是對他們來講都不是那麼容易。

T<sub>11</sub>：以前的國中也是有教函數，然後他們這一屆函數到我們高中才教，所

以這一屆的確對函數比較弱一點，那因為他函數方面比較弱一點，那三角函數還一直教下來的話，那他們的觀念就比較沒有像以前那麼強。

\*\*\*\*\*

以高中教師的觀點，九年一貫課程的教材中，少了嚴謹的推理證明，多了繽紛的情境圖像，刪除基本的函數概念，加上升學考試制度影響教學策略，學生學習數學的歷程似乎因此演變成較為以認知、記憶為主的模式。這樣的方式或許可以讓部份的內容形成定型的內化知識，也能在國中課程內容相關的測驗上得到良好的成績，但無法從這樣的表現中判斷學生是否經過思考而真正理解。受訪教師表示，在高中課程進行中，學生常有思考停頓的情況發生，或是甚至不知道要思考什麼，然而由於教學進度的壓力，課程必須要繼續往下發展，但是即使在課後安排讓學生發問的時間，學生也無法思考出問題到底在哪裡。

### 5.2.3 探討

從教師的觀點看來，高中三角函數單元課程需要更多的授課時數來進行，學生也需要更充分的先備能力才能銜接。然而在接下來實施的《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中，所頒定的授課時數顯然是不足的；在教材的編排上，三角函數單元之前的內容，也未有規劃補足九年一貫課程所缺少的相關課題內容來銜接。

教育部針對 94 學年度的學生，擬訂「九年一貫暫行綱要銜接高級中學課程數學學習領域銜接教學素材製作計畫」，經由國、高中銜接教材內容比對分析研究，制定包含 9 大單元內容，其中「線型函數與二次函數」、「幾何與

證明」以及「三角函數」即是三角函數相關課題先備知識上的補足。然而《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中，三角函數單元內容與過去相去無幾，在此單元之前的課程也沒有加入銜接上應有的教材內容，一經比較，我們發現這份暫行綱要並沒有對於銜接上的問題作出足夠的因應措施，學生在學習上，恐怕會遭遇到較 94 學年度高一學生更為重大的困難。

## 5.3 學生表現

### 5.3.1 學習成就

整體而言，受訪教師一致認為，94 學年度高一新生在三角函數單元的學習成就的確較過去的學生為低。以校內段考而言，部分學校已考量本屆學生在國中使用較為簡化的新教材，多將題目調整為簡明、淺顯的類型，但是學生的平均成績仍舊較過去的學生大幅下降。以教師的觀點，造成 94 學年度高一學生在三角函數單元學習成就欠佳的最大原因就是學生自身根本上的差異。茲分析如下。

#### (1) 思考模式的差異

九年一貫課程強調培養學生擁有帶著走的能力，所以數學教學不再只是教師單向傳授知識、學生強行記憶，而是強調多元化、活潑化的現代教學。在教科書的內容方面，由於各家版本競爭激烈，莫不增添豐富的圖像以及博引廣泛的課外相關知識，目的在於提升內容的精采度來刺激學生的學習動機，並藉此獲得學校教師的愛用。此外，教師除了配合教材增加課堂上的教學活動，也自行設計許多具有創意的教案，希望學生在輕鬆的氣氛下快樂學習。然而，

多數學生在長期接受由外來刺激來加強印象的學習模式後，思維習慣逐漸傾向「被動」，一旦教學活動沒有給予足夠的刺激，他們的思考便很容易停頓。此現象與現在學生在日常生活中接觸媒體、使用網路、打電玩也有關係。學生沒有耐心聆聽課程中較為平板、不帶趣味性的部分；排斥閱讀數學課本中段落稍長的文字敘述；遇到問題習慣先問答案。因此，學生在課堂上一開始接觸三角函數的基本概念時，真正建立的認知並不強，大部分學生只是將表面的符號及大概的定義記起來，在考試的時候就拼湊片段的記憶來作答，很少有學生會去想其中的意義或是為什麼題目要這樣問，考試的分數也因為短期記憶的有限而變得有限。到了三角函數的性質與應用單元課程時，許多學生便無法將上一章學的內容與實際應用作聯想，甚至是忘了前面的內容。課堂上許多學生無法跟著教師講述的進度理解，而自行演練或考試時，大部分學生幾乎都無法運用所學的知識來解需要多一點思考的變化題。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在三角函數單元的學習上，最大的差異為何？教師答覆如下：

T<sub>03</sub>：這一屆的學生比較動不起來，變成他們在學習上比較沒有那種學習的意念，所以有時候明明已經放慢腳步在教，他們還是看到題目就坐著、發呆，也不動腦筋去想。

T<sub>08</sub>：（這一屆學生）上課的東西會比較聽不懂，然後反應會比較慢……理解能力變很差。他們對觀念基礎不夠深，所以你一定要再講深入一點，他往往會卡在那裡，連基本定義都不是很清楚。

T<sub>09</sub>：他們甚至於都還來不及想他們的問題，我們就講完了，因為課程進度要繼續往下走……我看的出他在想：我不懂！這是為什麼？但是那時候我們還是要繼續往下走，但是我會告訴他，有問題可以來找我，但

是小孩子就是小孩子，你叫他找你的時候，他就不會來找你，而且他也不知道他的問題到底在哪裡，後面的東西就排山倒海而來，就其實他們也很辛苦啦！

T<sub>12</sub>：今年的學生學習力比較差一點，比較低落一點，就是除了運算能力上比較差以外，腦筋的思考，有時候不太愛動。

T<sub>13</sub>：學生有一個傾向，好像他遇到題目不會做的時候，他的整個思考就停頓了，我感覺不到他們有想要突破的嘗試，就是自己用自己的能力把問題解出來。

\*\*\*\*\*

## (2) 語文能力的差異

當學生無法正確解讀題目的中文敘述時，常選擇不作答，少部分學生則會勉強寫出一些悖離題意的算式。部分受訪教師同時擔任導師的工作，他們表示，94 學年度學生在國文科的成績也普遍較過去的學生低落，可能是九年一貫國文科課程經過簡化，也可能是由於對英文科課程向下延伸，分化了學生在國文科的專注力。這樣的情形導致考試無法反應出學生真正對三角函數的理解程度，有些學生具備正確的觀念，卻因為看不懂題目而拿不到分數。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在三角函數單元的細項下，所遭遇最大的困難為哪一部份？教師答覆如下：

T<sub>04</sub>：只要遇到應用問題都很害怕，就是看到中文，他沒有辦法把它轉變成數學的式子。

T<sub>06</sub>：沒有，連畫都沒有畫，這一部分我就不曉得是國文程度不好，還是不會畫圖，我覺得應該都有啦！所以導致他們無法解題。

T<sub>08</sub>：必須要由老師講過這個圖要怎麼做，他才會去看這個怎麼做，做出

題目要的那個三角形的圖形……我是覺得這跟他們的國文能力也有點關係。那也可能是因為他們的數學底子真的是比較差。

T<sub>09</sub>：他們沒有動手畫圖的習慣，國文程度太差，看著題目的敘述，他畫不出那個圖來……一般的數學語句，簡單一點的，比較明確一點的，他們都畫不出圖，最主要是沒有那個習慣，而且國文程度又很差。

T<sub>12</sub>：他們很難把中文轉成數學，就是比方說題目講我現在人在燈塔的右邊，然後看什麼地方等等的，然後他就不知道怎麼去畫那個圖形，我不知道是他們的空間概念差，還是他們解讀的那個語意上不太能瞭解，然後要我畫在黑板上，他們才知道原來是這樣子畫。

T<sub>15</sub>：測量問題有時候他題目根本就看不懂，跟他們的語文能力不好也有關係。

\*\*\*\*\*

### (3) 圖形概念的差異

根據《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》編寫的教材中，除去函數的概念，學生對於在直角坐標平面上繪圖的認知，僅止於將二元一次方程式的解一一對應地描點；加上基本學力測驗只考選擇題，因此在繪製函數圖形的練習並沒有進一步作加強。而缺乏練習造成的結果在高中立即反映出來，學生不清楚數對中的哪一個數字該對應橫軸、哪一個數字該對應縱軸，這是過去幾屆學生很少會發生的混淆，而本屆學生卻幾乎每一個班級都會發生類似的問題。另一個圖形概念的差異，是發生在測量問題，若題目提供圖形作參照，則部分學生可以計算出正確的答案，但是若題目沒有提供，則大多數學生無法根據題意自行畫出正確圖形，遇到需要作圖的題目時，常常是直接放棄的。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在三角函數單元的細項下，所遭遇最大的困難為哪一部份？教師答覆如下：

T<sub>03</sub>：我是覺得在圖形的方面，你上課的時候帶他們畫是會，可是你要他們應用，他們會分不清楚定義域、值域……給他們題目要他們自己去畫，他們就都不是畫得很好，那圖形的應用、移動，有些學生就是沒有辦法接受。

T<sub>04</sub>：測量最大的問題就是他們不會畫圖，他圖畫不出來，那當你圖畫不出來的時候，你三角函數、邊跟邊之間的關係就不對了！

T<sub>07</sub>：基測完全採用選擇題，可能對他們有產生影響，因為他們做圖的感覺都很差，那現在要把圖形跟代數做一個轉換，我覺得對他們還是有一點困難。

T<sub>08</sub>：像應用問題有時候會講到走幾步路，然後測量高度，那以前的學生真的就很容易自己做圖，現在的學生不會。

T<sub>10</sub>：學生遇到立體測量的問題，大多無法自行繪出正確圖形，也無法將立體圖形轉成平面圖形。

T<sub>12</sub>：他們不會畫圖，他們很難把中文轉成數學，就是比方說題目講我現在人在燈塔的右邊，然後看什麼地方等等的，然後他就不知道怎麼去畫那個圖形，我不知道是他們的空間概念差，還是他們解讀的那個語意上不太能瞭解，然後要我畫在黑板上，他們才知道原來是這樣子畫，然後真的拿一個題目給他們看，他們其實也很難下筆，不知道要去畫哪邊。

\*\*\*\*\*

研究者發現，學生在三角函數單元學習成就降低的原因，除了國中教材的簡化以外，還有教學策略的改變，使得學生對於所習得的知識停滯在認知的階段，

相較於過去的學生，94 學年度的學生在衍生、變化以及其間的轉換、運用方面的能力，似乎產生了很大的落差。部分受訪教師表示，他們曾經深入瞭解程度較好的學生之所以較好的原因，發現大部分就是由於他們的國中老師是採新、舊教材並用的方式來教學，即以新版課本為主體，配合國中教師自編的講義，沿用過去較為嚴謹的方式督導學生練習。

舊課程與九年一貫課程同樣在培養學生的數學能力，而九年一貫課程更將數學能力以「分年細目」呈現所應達到的目標，然而，乍看之下這數以百計的「分年細目」似乎很「齊全」、「具體」，但在實際教學上卻出現了模糊地帶，那就是數學教材內容五大主題中的「連結」部分，九年一貫數學能力指標不對連結的能力指標加以分段，僅強調連結的能力要在各階段與其他能力相配合培養，因此在嚴密的規範教材應在每個年級能使學生習得該有的能力時，似乎是遺漏了這一塊。再加上高中教師反映出的學生狀況，我們幾乎可以推論出問題就在這個地方。連結的能力在數學內部強調各單元內容的交互應用，也可以說是解題能力的培養；在數學外部強調生活及其他領域中數學問題的察覺、轉化、解題、溝通、評析諸能力的培養。而這樣的連結能力，就是在高中教師觀點下，九年一貫後的學生所缺乏的能力。那麼過去的課程是如何幫助學生培養出來的呢？那就是「練習」。過去由於升學考試中，數學科考題富有變化，國中教師為幫助學生考上好高中，在學習歷程中循序漸進地規劃許多數學習題的演練，而連結的能力就在這種日積月累的反覆練習中培養出來。從 94 學年度高一學生的表現看來，這方面的訓練，仍是在中學教育中不可或缺的一環。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師認為應如何加強學生在三角函數單元的學習成效？教師答覆如下：

T<sub>04</sub>：讓他們比較能夠多吸收對不對？就是不斷地給他們做題目，然後從題目當中，讓他們腦筋能夠多想，然後多反應，因為你能夠吸收，那是因為你對這個題目已經很瞭解，那為什麼不能瞭解，因為你題目做的不夠多，每一種題型他怎麼樣做轉變，你都有去看、有去想，那就會差很多。

T<sub>07</sub>：我覺得學生就是說，他練習的時間不夠，就是上課的時候，我們把課程講完，就已經很趕了，那變成說我沒有辦法在課堂上督導他們練習，所以我們現在都是用考試，用考試替代練習，因為叫他們寫習作，他們也都是用抄的，那考試我們可以利用早自習或是中午的時間。

T<sub>13</sub>：我認為三角函數這個單元是需要花一點時間去熟悉他的符號，熟悉他的運算，只要你這個功夫沒有下的話，你光是聽課是不可能熟悉的，更何況是成績，就是看到題目你要會做的話，你平常的練習的量只要稍微不夠，就是他自己練習的份量一定要達到某種程度的量，不然的話他不可能可以消化這些內容……我們目前的評量方式是紙筆測驗，你要透過這樣紙筆測驗的方式，來反映出你所理解的，你還是需要課後的練習……

\*\*\*\*\*

### 5.3.2 學習態度

學生在三角函數單元的學習成就，除了因為九年一貫新課程而使他們的先備能力產生差異外，受訪教師表示，影響學習表現的另一個因素，就是學生的學習態度。

本研究分別從課內學習態度與課後學習態度來討論：

#### (1) 課內學習態度

回顧九年一貫課程初出推行之際，各界質疑聲浪不斷，許多關心國民教育的

團體以嚴格的標準檢視、批判這次重大改革，媒體更是對於某些反對、撻伐的意見加強渲染，使得這一屆的學生以及家長一開始便有先入為主的觀念，認為這一屆的學生被迫成為實驗的小白老鼠，對學校教育沒有信心，因此造成學生在一開始便以消極的態度進入國中的課程。受訪教師表示，94 學年度的高一新生，在課堂上的與教師的互動，比起過去的學生明顯減少許多。講述課程內容的時候，學生完全採被動的姿態聆聽，鮮少有發問、舉一反三的行為；演練隨堂習題的時候，遇到難題或是需要數字大一點的計算，會直接等老師公佈算式、答案，缺乏主動思考的意願；對於教師提供課外衍生的益智問題，沒有想要突破的嘗試，學生覺得若一個題目可能需要十分鐘，可能甚至要花一個小時才能解，則不值得做這樣的投資。於是大部分學生對於三角函數課程內容的認知，僅只能停滯在某一個程度。此外，學生之間的落差也是越來越大，高分群人數減少，程度和以前的學生大致相同，可是低分群人數增加，且分數相當低。以教師的立場，對於此現象莫不產生前所未有的無力感。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在整體上與過去學生最大的差異為何？教師答覆如下：

T<sub>03</sub>：變成是他們意願的問題，會主動問問題的只有少數，認真學習的學生都會多問問題，但是以整體上來講，他沒有辦法跟以前的學生一樣，有那種研究和學習的互動……我們以前比較注重課堂上的互動，比如說安排一些題目給學生做一些思考，可是這一屆的學生比較動不起來，變成他們在學習上比較沒有那種學習的意念，所以有時候明明已經放慢腳步在教，他們還是看到題目就坐著、發呆，也不動腦筋去

想……還有他們之間的落差也是越來越大，高分群還是不低啦！可是你可以發現低分群真的都很低。

T<sub>12</sub>：比較低落一點，就是除了運算能力上比較差以外，腦筋的思考，有時候不太愛動……以前大概都是只要中間以上的學生，就是有唸書的學生，會問比較多的問題，那今年大部分都是那種比較好的學生，程度比較好的，才會問問題，那中間程度的學生就比較沒有想把它唸上來……這一屆的學生他們上來，他們自己知道自己是九年一貫的學生第一屆，所以有一些學生，自己知道自己程度不好，也不是說程度不好，就是他們知道自己學得很少，然後他們就會覺得自己是白老鼠，然後他們後來在學習的時候可能就有意無意會抱怨，叫老師不要說去年的學生怎樣怎樣，因為去年的學生他們學過了，那我會跟他們講，你就是多算、多練習，就可以跟上一屆的學生程度是一樣的……但是我覺得大部分的學生，他們雖然說知道自己計算程度差，但是他們並不會想要去補救他們的計算程度，就是差的這一塊，所以我覺得反而是本來程度就不錯的學生，他們知道自己哪裡不好，他們可以儘量地去改善，但是那種其他中間程度的學生或後半部的學生，他們也不會去補救自己計算程度差，加減乘除常算錯的問題，他們可能也不會花比較多的時間，去每天練習個五題，他們並沒有那個心想要讓自己更好。

T<sub>14</sub>：這一屆學生比較懶得去背公式，像之前的學生再怎麼懶，你叫他背，他多少還是會背，但是這一屆的學生都會覺得等考試再背就好了……就是很懶得背，他們就會覺得國中都沒有這麼辛苦，還沒有辦法調適過來。

\*\*\*\*\*

## (2) 課後學習態度

教育政策自改革以來，整體一直有著傾向培養學生多元智慧的趨勢，在過去

數學科為所謂的「主科」，大部分的學生都會規劃出較多的時間在數學科，包括課後自行演練習題、上補習班或是請家教。但受訪教師表示，這一屆的學生在基本的價值觀上呈現出一個較為明顯的差異：學生在課後會將大部分的時間投入在個別喜好的科目上或活動上。過去的學生即使是有同樣的負擔，但是對於數學科仍有相當程度的重視，而九年一貫課程下的學生，似乎將數學科當成一般的「選修」科目，在學習的時間規劃與專注力上，都較過去學生為鬆散。而三角函數單元之間的關係是環環相扣的，若是學生在學習過程中的某一個階段中分心了，沒有跟上課程的進度，則在後面單元的學習上，通常會因此而一蹶不振。

在尋求校外資源方面，主要是上補習班或是請家教，受訪教師一致表示，上補習班對學生在三角函數的學習成效並沒有產生影響，認真、程度好的學生，即懂得在學校及補習班之間安排適當的讀書計畫，同樣地，中等程度或中下程度的學生，即使去了補習班，也不會改變原本讀書的態度；因此整體而言，學生的成績不會因為去了補習班而變好或變壞。另外約有將近一成左右的學生是由家長聘請教師到府指導學生，這些學生經由家教個別指導並訂定讀書計畫、以及按時督促進度，其中少數學生在三角函數單元的表現會有些微提升。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於 94 學年度高一學生在整體上與過去學生最大的差異為何？學生在課後參加補習或請家教是否有幫助？教師答覆如下：

T<sub>03</sub>：問題都要在課堂上就解決，不能直接把問題丟給他們，不然下一次來上課他們還是一樣不會……這些學生真的要等他想學，他才可以真正

慢慢學起來。可是平常還是有一部分學生都不認真，到被當了，要補考了，才好好認真唸……我們班上學期補習的人還蠻多的，可是去補習，成績也沒有比較突出，反而有些補習的去到那邊不認真，只是跟父母講說要去補習，所以成績沒有進步。

T<sub>05</sub>：我覺得表現起來是沒有差很多，有些平常在學校不認真的，去補習班還是一樣啊！然後認真的學生去補習班，就還是一樣成績好，就是去補習班好像沒有太大的差別，沒有那種原本成績不好，然後就因為去補習所以成績變好了。

T<sub>06</sub>：這一屆的學生比較活潑，他們比較熱衷一些課外的活動。對，就是唸書上面比較沒什麼心，我也是一直在灌輸他們說：該唸了啊！道理也講很多啊！那他們有幾個人吸收，我就知道了，可能現在小孩子的價值觀也不一樣了……學習動機如果強烈的話，其實他補不補是無所謂，那如果說有些去補習班只是繳錢而已，那也不見得說很用功，不用功，那你基本的還是不會，他雖然做比較多題目，但是他還是不懂，當然是會有差啦！如果以學習動機差不多的人去比，那其實沒有很大的差別。

T<sub>11</sub>：因為回家沒有複習啦！或者沒有很踏實去做，那他很快就忘記了，要一直反覆跟他們講……我覺得他們就是本來好的就還是好，那像本來就不專心的，他去補習還是這樣，沒有比較強，沒有。那有些學生他在上課的時候就很不專心，那他去補習班好像更慘，就你上課的時候他都不聽課，就一直拿著補習班的講義在那裡寫，那這樣的孩子他的成績往往是比其他孩子更差的。

T<sub>12</sub>：我覺得這一屆的學生他們不夠積極，如果說今年的學生跟去年的比起來，去年的學生自己主動作習題的比例比較高，就是派功課回去，他們會做的比例會比較高，然後今年的學生，我覺得功課派下去，寫的比例比較低……原本那種自律心蠻強的學生，他們知道自己該唸書，去補習班再多聽一次課，我覺得對他們來講是很 OK 的，我覺得他們的學習狀況都還蠻好的，然後對於那種中間程度的學生，有些學生是自

以為有補習，上課就不聽課，然後另外有一部分學生是補習的時候也不聽課……我是知道我的學生補習是沒什麼用啦……我知道自己的班有幾個學生就是不愛補習的，可是他們就是家長要他們去補，他們也就只好去補，那去補他們也坦白跟我講說，他們完全都聽不懂，也只能抄，有的連抄都不抄，就跟人家聊天……不過我們班有幾個同學是去家教的，就是請大學生回家裡教的，那家教的學生就教得還不錯，就是他們上課也還蠻認真地抄筆記，然後回家有不懂的部分，也還會問家教，所以我覺得我們班有請家教的比有去補習班的狀況好很多，但是不多，就是兩、三個同學而已。

T<sub>14</sub>：他們都說他們補習完回家就睡覺，比較積極一點的他還是會熬夜唸一點書，可是比較愛玩的還是一樣，反正補習就補習呀！不會影響他唸書，他一樣考試前要唸才會唸。

\*\*\*\*\*

在教育改革的表象上，我們看到改變的是政策、方案、課程以及教材，由這一些具體的條文，我們可以去預知未來的學生在知識面上接收的內容會有什麼樣的改變。但事實上，學生的整個學習態度，甚至是人格特質，在無形之中都跟著受到了影響。三角函數有些原理簡單，可是其中的推導、證明、計算、繪圖都必須經過一些細微、繁複的思考歷程，學生的心態若沒有從國中大而化之的學習模式調整上來，恐怕這個部分會是他們難以跨越的一道障礙。

### 5.3.3 探討

九年一貫政策將教材簡化後，學生在國中數學科方面的成績表現，似乎較為「平均」，八成的學生都能夠對國中以前學的數學有一定程度的認知，但卻為學生在

高中課程的學習上埋下了隱憂。高中教師一致表示，94 學年度高一學生在三角函數單元表現出較為低落的學習成就，原因並不在於學生的智商，而在於個體上一些學習所需的根本要素能力退化了。他們的思考模式、語文能力、圖形概念大大不如以前的學生，以及對於數學科的學習態度較為不重視、不嚴謹，才是最主要的原因。高中教育在某個層面上，是在培養學生自主學習的能力，以現行課程中的三角函數單元而言，學生必須懂得如何在課程行進的節奏中，對於新知識不斷地配合著認知、練習、思考然後融會貫通，一旦學生以偏頗、鬆散的學習態度來對待這門科目，便無法深入知識的核心，發現其精妙之處，更難以得到良好的學習成效了。

## 5.4 建議改善方法

### 5.4.1 增加授課時數

本研究在 5.2 節提到，受訪的 4 所學校在三角函數單元平均需要 90 堂的授課時數才足夠，這樣的情況下，教師仍感有所不足，認為學生學習三角函數還需要更多課堂上的引導與練習。而《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中的三角函數內容，僅刪除了反三角函數一節與和差化積的部分內容，時數卻減少至 60 堂課，整整比原有的時數少了三分之一，顯然是嚴重不足的。而受訪教師也一致表示，三角函數對九年一貫課程實施後的高中生是全新的課題，學生需要時間去適應其中的定義、符號，需要時間去熟悉其間的關係、性質，需要時間去演練其外的技巧、應用。上課時數不足，並不是加快講述速度、淺化課程內容、跳過隨堂練習就能了事，重要的是學生能夠學懂、學好。因此，若想要提升學生在三角函數的

學習成就，最基本的就應該是增加應有的上課時數。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師關於對即將實施的《95 學年度高中數學課程暫行綱要》的看法？教師答覆如下：

T<sub>02</sub>：那就要趕快能夠銜接啊！如果授課時數能增加那就更好啊！因為其實現在的課程進度還是蠻趕的。

T<sub>07</sub>：我們在爭取能不能上到 5 堂，你知道明年要剩 4 堂課啊！那 95 暫綱的課程內容沒有減少很多，那課要減少到 4 節，甚至更少，所以我們極力在向學校爭取，能不能再安排比較多的一個時間……最好是時間看能不能拉長一點，因為我覺得學生就是說，他練習的時間不夠，就是上課的時候，我們把課程講完，就已經很趕了，那變成說我沒有辦法在課堂上督導他們練習。

T<sub>08</sub>：新的這個一週只有 4 個小時，絕對不可能上得完，我們現在上六個小時，都已經上得非常困難了，所以說這是不可能的事情，天方夜譚。我是覺得時數要增加啦！才可以多舉一些例子讓他們練習，如果只是把一些定義講完，其實沒什麼用，一定要多舉一些例子，所以時數還是要增加。

T<sub>09</sub>：這課程（對以後的學生）是越來越難，但是他（教育主管機關）做的事情是時數減少，這等於就是鼓勵學生去補習班，然後我們學校就學到這個程度就好，那補習班就負責外面那個程度，其實如果真的這樣做也不錯，真的這樣做，分工比較細，反而不會互相干擾，那第二個就是可能我們高中再來開大量的所謂課後輔導，上到六、七點下課。

T<sub>13</sub>：我認為三角函數這個單元是需要花一點時間去熟悉他的符號，熟悉他的運算，只要你這個功夫沒有下的話，你光是聽課是不可能熟悉的……明年的話只剩四堂課，因為 95 暫綱出來的時候時數會變少，其實我覺得如果到 95 暫綱的話，那講三角函數會是一件很可怕的事情，就是說你鐵定沒辦法講述比較需要思考的題目，你光是把內容講完，再搭配一些基本的練習，那時數很有限……因為三角函數整個第三章，它的內容不少，就是它

裡頭有一個，光是弧度的概念，還有三角函數的圖形，然後接著就講和角公式，那和角公式就新的東西嘛！對學生來講是新的東西，還有和差化積，因為九五暫綱它是把倍角公式放在和角公式裡面，然後再來就是和差化積、積化和差，這都是新的東西呀！再來就是疊合，然後隸美弗定理，這每一個單元都是新的東西，就是你在課堂上一教的時候，他就需要花時間去熟練這個單元，應用這個思考去解決這個問題。

\*\*\*\*\*

## 5.4.2 調整教材編排

在國民中小學課程整個大幅變革後，學生在國中畢業後所具備的先備知識與能力必然會與過去的學生產生差異，為使學生能在學習上有銜接性以及連貫性，高中課程的重新編修應是勢在必行。而以三角函數課題而言，如何安排才能讓未來的高中生有最好的學習成效呢？受訪教師根據自身多年的教學經驗提出了以下看法。

- (1) 將「三角函數的基本概念」以及「三角函數的性質與應用」安排在不同學期的課程

受訪教師表示，在高中三年的數學課程中，三角函數對學生而言，確實是較為困難的章節，尤其對於未來的學生，進入高中後，三角函數是他們前所未見的東西，許多學生對一開始的定義感到「不自然」。雖然三角形具體地在眼前，但定義在學生腦中的概念卻是抽象的，學生需要一段時間去適應、接受基本概念。若在學生尚未好好吸收之前，就要進入下一個章節去運算、應用，只是徒增學生的壓力，這也是部分學生到最後常常選擇放棄三角函數的主要

原因。因此教師認為，若能夠調整課本的編排順序，在兩大章節之間給予學生一個喘息的空間，或許可以提高學生在三角函數單元的學習成效。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師對修訂中的高中課程正式綱要在三角函數單元的教材編排上的看法？教師答覆如下：

T<sub>05</sub>：拆成兩個學期或許會比較好，因為現在像這個學期，幾乎全部都是在講三角函數，不過也不曉得，因為沒試過也不能確定那一種比較好，但是感覺上比較不會一直在把學生的壓力往上堆，學生就這個地方一直聽不懂，還一直這樣累積下來，就是前面的沒有跟上的話，那後面的都還是會出現更大的問題，也會造成說他們對數學的興趣會比較低，因為如果說學生不喜歡這個單元，可是整個學期都在教這個，那可能就會扼殺了他們對數學的興趣。

T<sub>07</sub>：三角函數後面的部分是蠻技巧的，就難度上是比較高一點，但是問題就是說，你要把三角函數切割成兩部分，就應該是從應用的這個地方。

T<sub>11</sub>：如果是S型排的話，變成這學期上過，然後下學期再上的時候，我可以先複習一下，我想有一點點彈性，有一點點重新的機會也許會不錯，像S型的教材我以前教過，我覺得蠻不錯的。

\*\*\*\*\*

## (2) 移除不必要的內容

在「三角函數的性質與應用」一章的部分教材中，有許多內容是較為著重在技巧的層面，多位高中教師表示，程度中上的學生都需要在這個部份投入龐大的時間與心力，才能學會靈活運用這些技巧，而對程度中等及以下的學生便是很大的負擔。且有部分教師認為，學習三角函數單元時某些繁複的計算以及特殊的方法，對於大部份的學生而言，在未來所用到的機會很少，因此

可以考慮將這些內容刪除，或是移到選修課程，僅編排三角函數的核心知識在必修課程中。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師對修訂中的高中課程正式綱要在三角函數單元的教材編排上的看法？教師答覆如下：

T<sub>01</sub>：因為他們是九年一貫課程上來的，但是有一些實在是跟高中差異蠻大的，所以課程方面應該是如何去把國中、高中的課程銜接起來，也許有一些可以刪掉……基本上高中課程對這些新的九年一貫的學生都蠻吃力的。其實也許可以考慮做一些適當的刪減。

T<sub>05</sub>：我覺得在高中的時候，其實可以不用學到這麼多，是可以再刪掉一些。

T<sub>06</sub>：三角函數我覺得上基本核心的就好了，像那些和差化積，有一些是在技巧上的運算，那個可以不用一直去花時間……你教了很難的東西，但是學生完全聽不懂，所以其實有一些單元可以刪，像反三角函數不是刪掉了嗎？對呀！應該抓重心去教。

T<sub>07</sub>：學生如果是唸社會組的，三角函數後半的部分可以說根本就是不太會考，但是如果你是考理工科的，這些就是很必要的東西，所以說我是覺得是不是可以把一些比較難的東西，比如說一些應用的，你就在這裡把他切割出來。

\*\*\*\*\*

### (3) 重新修訂九年一貫課程

國中教材的簡化造成高中課程在教學上一項很大的負擔。在台灣，高中教育的定位就是要讓學生有足夠的能力上大學，學生要唸大學，該具備的能力就要具備，該下的功夫就應該下，在每一個時期應有的磨練就應該有。而到了高中是另一個階段的訓練，不能只是因為國中以前的課程簡化了，高中爲了

能夠銜接也跟著簡化，否則到最後是台灣大學生整體的程度下滑，台灣喪失原有的國際競爭力。因此，大部分的教師仍舊希望，國中能恢復部分舊課程，三角函數的基本概念在國中先接觸是較好的。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師對改善高中生在三角函數單元的學習現況的看法？教師答覆如下：

T<sub>02</sub>：要嘛就是國中要上多一點，因為現在國中上的太簡單了，造成國中、高中落差太大。

T<sub>08</sub>：我還是會認為說，國中應該要先講解一些基本的東西，因為如果在國中有事先經過一些練習，學生的觀念會穩一點，因為我們高中其實時間不多。

T<sub>09</sub>：把國中小的課程重新做一個適度的調整，讓他們具備應有的程度來銜接高中課程……有些東西該從高中拉回國中的就拉回國中，有些國中該還給小學的就還給小學，不要讓他們有快樂的童年，快樂的青少年，然後很辛苦的高中，然後很不知道的大學，到最後很辛苦地找不到工作，真的，這是我個人的意思，因為我們個人有限，他是這個樣子，你給我一塊銅，我不能讓它變成金嘛！我再怎麼煉，他還是銅，如果你給我18K金，我還可以幫你煉成24K金，你給我這一塊銅，我怎麼煉也煉不出金呀！如果真的要有什麼方法的話，那就是讓他們把一些高中以前沒有上的課上完，那這個要給他足夠的時數……因為他必須要花的時間還是要花的……有些東西是要學習，然後練習，然後錯誤，然後改正，有一些再錯再改，需要這個過程。

T<sub>15</sub>：其實我還是覺得以前那樣，國中先教一點會比較好。因為你這些東西還是要學的啊！那你國中不學，高中再全部一起學，一下子要他們記這些東西，其實他們還是會覺得很陌生，然後馬上後面又一堆，那前面沒跟上，後面就倒了。就像我們班有人數學程度不錯，他數學程度

不錯的原因，就是他的國中老師是用舊教材來教，真的差很多。

### 5.4.3 創新教學方式

在受訪的 15 位教師當中，有 4 位教師為 94 學年度的高一新生額外準備補強的課程。他們認為，既然學生的先備能力與過去的學生不一樣，那麼教師可以藉由改變過去的教學方式來幫助學生學習，例如：介紹三角函數相關歷史及生活化的例子，課前安排相關計算、函數圖形以及幾何概念的複習活動，設計特殊單元教材以加強學生在代數式與圖形間的轉換能力。

\*\*\*\*\*

研究者詢問教師是否有針對 94 學年度高一學生規劃額外的課程以補強他們的先備知識的不足？教師答覆如下：

T<sub>07</sub>：一個當然是學生國中三年的時候，基礎要先打好，當然我們不一定說時間多，學生就學得好，那就是怎麼樣引導學生是比較重要的，那每個老師都有他自己的方法，像是特別強調函數圖形你一定要會，像只要講到函數圖形，我一定會講他的對應關係，在這個地方我花很多時間在講函數圖形。

T<sub>09</sub>：我們從銳角三角函數的定義，相似形的複習，函數定義再做解釋，到一個銳角定義他的六個三角函數，不包括基本關係式的話，大概就花了兩、三堂的時間。因為函數的概念，然後針對這個角度為什麼它能夠定義出這些意義，為什麼在不同的三角形裡面找出它的斜邊、對邊，做出來的函數值是一樣的。

T<sub>12</sub>：就是從埃及的典故開始講，就是因為要測量，所以才有三角函數的出現，還有三角函數在生活上的應用，其實是蠻廣的，對！所以我大概有花一些時間跟他們講一下由來，像是測金字塔有多高呀！之類的，我是有跟他們講說如果遇到這種情形，那你可能要怎麼樣去算它。

T<sub>13</sub>：我會講一些為什麼我要這樣定義，比如說我為什麼要這樣定義  $\sin x$ ，為什麼這叫做正弦，我會花一點時間在名詞的意義，比方說正面的弦長嘛！一些



#### 5.4.4 探討

教育改革雖然必須是階段性的進行，但是整個大環境卻是不斷地在變遷，我們的計畫仍應時時對變化作出因應，正視目前發生的問題，對於在各方面種種條件的限制，進一步協調、化解，務求探討出最佳的改善方法。

九年一貫新課程是教育各界精英傾注全份心力而產出的成果，但是要實際走過一次，才知道是不是真正適合台灣的學子，能不能抵達當初預設的理想境界。如今我們似乎已經看到了一點點的瑕疵，教育當局應該集結教育工作者的力量，及時來修正、補強現行政策的缺失。

※ ※ ※ ※ ※

高中教師身為第一線工作者，相較於其他教育機關人員，相信他們對於高中教育環境有著更深刻的關切，對於教育政策應改善的方向有著更全面性的見解。本研究將受訪教師中較為多數的意見作出以上歸納與統整，以期藉由教育最前線工作者的專業素養，反映出當代台灣學子的真正需求，促成新制度的適切性，讓未來即將推行的十二年一貫國民教育，能夠因應整體社會的變遷，建構品質良好的教育環境。

## 第 6 章 結論與建議

本研究從課程內容分析、學生學習成就以及教師經驗論述，探討九年一貫課程在各個層面上對於學生學習三角函數所產生的影響。根據實體教材觀察以及對高中生進行測驗與訪談高中教師的結果，可以看出學生在學習三角函數單元上，各方面的條件與資源均有所差異，在學習成就上較過去的學生為低落。深入分析這些現象並探討其中的原因後，本研究作出以下結論與建議。

### 6.1 課程規劃的合宜性

以授課時數而言，《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中所規劃的三角函數單元授課時數約為 60 堂，與本研究所調查的 4 所學校 94 學年度在三角函數單元的平均授課時數 90 堂之間的落差甚鉅，雖然刪除部分單元內容，但高中教師一致認為不足。原因在於九年一貫課程實施後，三角函數單元對高中生而言是一個前所未見的課題，學生需要較多的課堂時間來重新建構抽象定義的基本概念、理解繁雜步驟的推導過程以及補強相關應用的計算能力。況且教師在 94 學年度的教學經驗中，已經感到授課時數不足，95 學年度的課程恐怕在進度上會更加吃緊。

以教材內容而言，依據《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》編寫的國中教科書中，在三角函數先備知識的相關課題上有很多的缺漏，雖然教育部推行銜接教材做為因應措施，但高中教師仍然認為國中教材過於簡化，導致 94 學年度高一學生推理能力薄弱、無法判讀應用問題題意以及缺乏函數圖形概念。而依據《95 學年度高中數學課程暫行綱要》編寫的教科書中，三角函數單元內容與過去相去無幾，雖然《國民中小學九年一貫課程綱要》已重新加入暫行綱要中所缺漏的三角函數相關先備知識，對 97 學年度入學的高中生來說，課程架構堪稱足夠，但內容上仍是大量簡化，在教材上做這樣的修正是否足以改善高中教師提出的現況

問題？則有待進一步的觀察。此外，教育主管單位應當及時對於 94、95、96 學年度入學的高中生提出適切的補救措施，而大考中心針對此三屆學生的大學學力測驗，也應考量學生的差異來調整試題的性質。

## 6. 2 學生表現的差異性

94 學年度高一學生在三角函數單元表現出的學習成就較過去學生為低落，高中教師表示，造成如此的現況，無關乎學生的智商水準，而在於個體上一些學習所需的根本要素能力退化了。他們的思考模式、語文能力、圖形概念大大不如以前的學生，以及對於數學科的學習態度較為不重視、不嚴謹，才是最主要的原因。

在本研究調查的前測表現上，八成的學生都能掌握國中以前所學過的三角函數相關先備知識，以國中畢業生的程度而言，九年一貫課程實施後，學生雖然學得少，但學得好，相較於過去印象中，許多學生在這門科目學到後來常常呈現出羸弱不振的情形，可以說得上是一項進步。然而到了高中，學生在三角函數單元學習成就卻大幅降低，原因除了國中教材的簡化以外，還有基本學力測驗的評量方式影響教學策略，使得學生對於所習得的知識停滯在淺層的認知階段。

九年一貫課程的能力指標中有一個模糊地帶，就是數學教材內容五大主題中的「連結」部分，僅強調此能力要在各階段與其他能力相配合培養，因此在教材規範上似乎是遺漏了這一塊，再經由高中教師反映出的學生狀況，我們推論學生的差異就在於連結能力的降低。而過去的課程幫助學生培養連結能力的方式就是「練習」。在過去升學考試採用多元題型的形式下，國中教師會在學習歷程中規劃許多數學習題的演練，連結的能力就在這種日積月累的反覆練習中培養出來。從 94 學年度高一學生呈現較低落的表現看來，這方面的訓練仍是在中學教育中不可或缺的一環。

此外，學生學習態度的改變也是影響成就表現的重要因素，尊重多元智慧的九年一貫課程，無形之中使學生對於數學較為不重視、不嚴謹。以三角函數單元而言，學生必須懂得如何在課程行進的節奏中，對於新知識不斷地配合著認知、練習、思考然後融會貫通，若以散漫的態度學習這門科目，便難以得到好成效。

為導正學生在九年一貫課程實施後的偏差表現，本研究建議目前正在修訂中的高中課程正式綱要，可針對培養學生連結能力，在三角函數單元教材中編排相關例題與隨堂練習，並且配給應有的授課時數，讓學生在充足的思考空間下，揉合固有的知識與新進的觀念，深化對整個三角函數課題的理解並體認學習應有嚴謹的態度。另一方面，台灣的教育既是極度重視升學考試制度，那麼教育主管機關亦可利用考試引導教學，在基本學力測驗中恢復非選擇題，目的在取舊制度下的長處，讓學生從素行的練習中暢通思維，所習得的知識才能真正「一貫」。

### 6.3 制度改善的適切性

對於改善九年一貫後高中生三角函數之學習現況的看法，本研究將受訪高中教師提出的意見歸納為：增加授課時數、調整教材編排、創新教學方式，分述如下。

#### (1) 增加授課時數

本研究調查的四所學校在三角函數單元平均需要 90 堂的授課時數才足夠，而《95 學年度高中數學課程暫行綱要》中的三角函數內容，僅刪除了反三角函數一節與和差化積的部分內容，時數卻減少至 60 堂課，顯然是嚴重不足的。高中教師以自身的教學經驗論述，三角函數單元的學習歷程中，必須經過學習、練習、錯誤、改正，然後再練習、再錯誤、再改正，這些都需要在課堂上做適當地引導，95 學年度的授課時數僅僅足以講解課題原理，如此學生絕對無法消化其大量的內容。因此，要改善學生在三角函數的學習現況，最基

本的就應該是在該單元安排應有的授課時數。

## (2) 調整教材編排

- 將「三角函數的基本概念」以及「三角函數的性質與應用」安排在不同學期的課程：三角函數對未來的高中生是前所未見的新課題，學生需要一段時間去適應，若在學生尚未良好吸收之前，就進入下一個章節做運算與應用，對學生造成相當大的壓力，這也是部分學生到最後選擇放棄三角函數的主要原因。因此，若能夠調整課本的編排順序，在兩大章節之間給予學生一個喘息的空間，或許可以提高學生在三角函數單元的學習成效。
- 移除不必要的內容：「三角函數的性質與應用」內容中，有某些部份是較為著重在技巧的層面。部分教師認為，三角函數單元中某些需要繁複計算以及特殊方法的解題技巧，並不是每個學生都需要學會的，因此可以考慮將這些內容移到選修課程，僅編排三角函數的核心知識在必修課程中。
- 重新修訂九年一貫課程：在臺灣，高中教育的定位就是要讓學生有足夠的能力上大學，不能只是因為國中以前的課程簡化了，高中為了能夠銜接也跟著簡化，否則到最後是台灣大學生整體的程度下滑，台灣喪失原有的國際競爭力。因此，大部分的高中教師仍舊希望，國中能恢復部分舊課程，三角函數的基本概念在國中先接觸是較好的。

## (3) 創新教學方式

既然學生的先備能力與過去的學生不一樣，那麼教師可以藉由改變過去的教學方式來幫助學生學習，事先對自身原本的教學計畫作修正，或提出針對九年一貫學生的創意教學方案。教育當局若能夠在修訂課程之餘，同時帶動全體教育第一線工作者的成長，相信必然能夠提升教育改革的品質。

## 參考文獻

中文部份

林清山（1995）。《心理與教育統計學》。台北：東華書局。

王文科（1999）。《教育研究法》。台北：五南書局。

歐用生（1998）。《質的研究》。台北：師大書苑

郭生玉（1995）。《心理與教育研究法》。台北：精華書局。

楊順惠（2005）。《九年一貫課程實施前後對數學能力的影響分析——以高雄市為例》。國立中山大學社會科學院高階公共政策碩士學程碩士班論文。

陳大魁（2002）。談從 9 年一貫到 12 年一貫數學銜接的幾個面向。《科學教育月刊》，第 53 期。

陳忠雄（2002）。《高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士班論文。

陳冒海（2006）。《國民中學數學》。台北：南一書局。

高新建（2004）。《課程綱要實施檢討與展望（下）》。台北：師大。

翁婉珣（2004）。《台灣與新加坡之十二年數學課程比較》。中央大學數學所碩士班論文。

張琇涵（2005）。《台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較》。中央大學數學所碩士班論文。

李恆宇（2002）。《教改之路走向何方——從「九年一貫課程」與「多元入學方案」看我國國民教育改革的問題及展望》。台灣大學新聞研究所碩士班論文。

林福來（2006）。《高級中學數學》。台北：南一書局。

教育部（2003）。《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》。台北：教育部。

教育部（2004）。《高中數學暫行綱要》。台北：教育部。

黃純杏（2001）。《高中學生廣義角的三角函數運算錯誤類型之研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士班論文。

簡志明（2003）。《高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究》。高雄師範大學數學系教學所碩士班論文。

賴潔芳（2004）。《二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究》。高雄師範大學數學研究所碩士班論文。

英文部分

Babbie, E. R. (1973) . Survey research methods. Belmont, CA : Wadsworth.

Borg, W. R. and M. D. Gall (1983) . Educational Research : An Introduction.  
New York : Longman.

Mouly, G . J. (1978) . Educational research : The art and science of investigation.  
Boston : Allyn & Bacon.

Robert R. Pagano (1998) . Understanding Statistics in the Behavioral Sciences. Brooks :  
Cole.

Van Dalen, D. B. (1979) . Educational Research. New York : McGraw-Hill.