

函數與反函數（上：代數）

單維彰 · 2021 年 2 月

先以最基本的一次函數為例，例如 $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$ ，它的函數圖形是坐標平面上斜率為 $\frac{3}{2}$ 的直線，它有所謂的反函數，記作 $f^{-1}(x)$ 。注意：它不是 $\frac{1}{f(x)}$ 的意思，所以不要讀作 f 的 -1 次方，而應該讀 f inverse of x （建議直接講英語）。

在代數上，用以下步驟算出 $f^{-1}(x)$ 。

1. 引入應變數 y ，將函數寫成方程式形式；例如 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 。
2. 求解自變數 x ，也就是把方程式寫成 $x = \dots$ 的形式，使得等號之右不再有 x ；
例如 $x = \frac{2}{3}y + 2$ 。如果等號右邊可以視為 y 的函數，則方程式可以記成 $x = f^{-1}(y)$ ，其中 $f^{-1}(y) = \frac{2}{3}y + 2$ 。
3. 在形式上，數學習慣以 x 作為自變數， y 作為應變數。所以，把步驟 (2) 結果的 x 和 y 兩符號對調，也就是改寫成 $y = f^{-1}(x)$ ，其中 $f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + 2$ 。

則 $f^{-1}(x)$ 就是所求： $f(x)$ 的反函數。

在概念上，**反函數**的意思是：把函數 $f(x)$ 返回 x 。也就是函數 f 把 x 變成 $f(x)$ ，而反函數 f^{-1} 把 $f(x)$ 變回 x 。例如

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2}{3}f(x) + 2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x - 3\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

反函數是「互相」的：如果 f^{-1} 是 f 的反函數，則果 f 是 f^{-1} 的反函數。用符號表達，意思是：

$$[f^{-1}]^{-1} = f$$

不妨檢查看看：

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3}{2}f^{-1}(x) - 3 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2\right) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

（次頁還有）

大多數的函數（在其自然定義域裡面）並沒有反函數。如果前面的步驟 (2) 辦不到，就是沒有反函數的意思。例如二次函數 $f(x) = x^2$ 在步驟 (2) 解出 $x = \pm\sqrt{y}$ ，而後者不是 y 的函數，所以 $f(x) = x^2$ （在實數上）沒有反函數。