# 函數 vs 微分

**單維彰・2013 年 4 月**

不論是要講微分還是積分，我們都要先有函數的觀念。這就是為什麼高中，甚至於國中的數學老師，就一直在說函數。但是，你在中學的時候，可能老師說函數就是教你函數有定義域、值域，然後定義域裡面的每一個元素都要應到對應域，並且只能應到一個。

我們現在要解釋，回到 17 世紀那個比較單純的年代，所謂的函數，基本上考慮的就是位置與時間的對應關係。令 t 表示時間，比如說以「秒」或「分」為單位。而 x 是位置。各位同學可能習慣看到 $x = f(t)$ 或者 $y = x(t)$，就是應變數、函數、和自變數的符號都不一樣。但是，我們現在長大了，其實可以這樣寫：$x = x(t)$。就是說，有一個應變量 $x$ 是某個東西的位置，而 $t$ 是一個自變量。自變量最好的例子就是時間，時間就是自己在改變，沒有任何人可以動它。任何一個沿著某條軌道運動的東西，我們都可以想像它就是一個位置對時間關係的函數。想像一條公路，比如說高速公路好了，高速公路雖然在三度空間裡面，它是一個空間中的曲線，但是每個人都曉得，高速公路有里程碑，它就相當於從 0 開始，以公里作單位的數線。因此，抽象化之後，高速公路就是一條數線的一部份。在高速公路上運動的車子，在每個時間都可以決定一個位置。像這樣可以用一個數表示其位置的運動，稱為**一維運動**。

任何的一維運動就可以想作是位置對時間的關係。那麼函數圖形，其實就是紀錄了每一個時間所在的位置的一個歷史過程。一個函數的圖形是固定的，但是，你也許從現在開始要想像它其實在動：記錄著隨時間改變的那個運動。

比如說，斜率為正的直線表示等速前進的運動。但是遞增凹向上的曲線，它是表示往前跑的運動沒有錯，但是與等速運動的差異是，它的速度是越來越快的。凹向上的遞增曲線，記錄一個跑得越來越快的運動。但是，遞增而凹向下的曲線，記錄著一個向前跑，但是速度越來越慢個運動。所以函數曲線要告訴我們一個運動的特質。

那麼，微分是什麼呢？微分就是在一滴滴的時間裡面，這個函數變化了多少，所以我們會寫出 $\dfrac{dx}{dt}$ 這樣的符號。這個意思就是說，在一滴滴的時間 $dt$，就是很短的時間裡面，這個運動的物體發生了一滴滴的位移 $dx$。將 $dx$ 除以 $dt$ 之後，應該大家都知道就是速度的意思。如果我們不清楚的話呢，用單位來思考，是很容易釐清的。那個一滴滴的時間 $dt$ 也許只有 0.0000001 秒，但是數值不論再小，單位是不會改變的，單位還是「秒」；同理，一滴滴的位移 $dx$，它…就算是很短很短的距離，我還是可以說單位就是「公里」。所以 $\dfrac{dx}{dt}$ 的單位就是 km/sec（每秒-公里），所以就是速度的意思。$\dfrac{dx}{dt}$ 就是微分的意思了。

將來同學會看到極限的形式，然後學到很多很多的公式，但是我們此刻都暫時不管這些事情，我們先瞭解微分就在說「瞬間變化率」。我們現在還說不清楚什麼叫作「瞬間」，不過差不多就是一滴滴的自變量的改變，跟一滴滴的應變量的改變，所形成的比值。

微分是瞬間變化率，現在多加一點技術的細節進來：什麼是「瞬間」呢？如果我們現在有兩個時間，假定 $a$ 是個固定的時間，假定 $t$ 是另外一個時間，那我們都曉得 $\frac{x(t)-x(a)}{t-a}$ 是平均速度，也就是在 $t$ 到 $a$ 的這一小段時間內的速度。可以這麼說吧：當 $t$ 就是 $a$，就是 $t=a$ 的那一瞬間。在每一瞬間，我們都要說這個運動有一個速度。這是自古以來就有的討論。譬如我這樣子走過來，如果有一個人在旁邊很快很快地拍照，那每一張照片我看起來都沒有動，但是我最後明明是動了。如果，我在每一瞬間都沒有動，那我最後是怎麼走過去的呢？如果我們最後改變了位置，則每一瞬間當然都有位移，也就有速度。但是數學要處理這個問題：究竟 $|t-a|$ 也就是 $t$ 和 $a$ 的時間差要多小，我們才能說它叫瞬間呢？稍微想一下就會知道，我們說多小都不行，你說它是十分之一秒，不夠短，你說它千分之一秒，不夠短，你說它是萬分之一秒，你還可以再把它縮短成十萬分之一秒，你還可以再把它縮短成…。你只要說了一個 $|t-a|>0$ 的秒，我們就可以說，還可以再縮短、再縮短。

如果我們就是要求 $\frac{x(t)-x(a)}{t-a}$ 在 $t=a$ 的值，這樣就不會有爭議了，對不對？但是如果這樣說的話，我們就面臨了一個數學上很尷尬的問題，這個式子就是不能夠把 $t=a$ 代進去啊，代入之後是個不能算的式子 $\frac{0}{0}$。現在的情況是，在理念上，我們就應該把 $t=a$ 代入 $\frac{x(t)-x(a)}{t-a}$ 計算瞬間速度，而且在理念上它也的確應該存在。但是在數學上不能那樣寫。於是，數學家就用

$$\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}$$

這個形式來表達想要做的事。我們就用這一個符號來說，我現在要在這個式子裡面把 $t=a$ 的值算出來。它看起來好像不能算一個值，但是在運動中的每一瞬間的確有速度，所以理念上應該可以算。它真的可以算得出來的（不一定永遠算得出來，絕大部分的情況下，這是可以算的）。就是是所謂「微分的極限形式」。