

面積 vs 積分

單維彰 · 2013 年 4 月、2018 年 6 月修

微積分是微分和積分兩大類計算方法的組合。積分這一類的計算方法，不管是在物理的古典力學上，或者在數學上，都在兩千多年前的希臘時代就討論過，最後殊途同歸地發現，某一類的物理和數學問題，最後就是要算面積。

回想一下，我們只知道從正方形推論出來的面積計算方式，而面積的原始意義也就是一個有界區域裡面有多大？而測量它「有多大」的方法就是要計算它是單位正方形的幾倍？就好像我們說數線上的單位長一樣，單位正方形不管多大或多小，你只要規定一個長度叫單位長，用它做出來的正方形就是一個單位正方形。面積的原始的意思，就是給我一個有界的區域，在裡面可以塞進去幾個不重疊的單位正方形？那些單位正方形的數量，就稱為這個區域的面積。

在上述定義之下，我們自古以來只知道很少數的區域面積公式。基本上就是說，一定要能把它切成一片一片三角形的區域，再不然就要跟圓有關，才能算面積。圓是個非常特殊的東西，我們從小學五年級就知道圓的面積公式 πr^2 ，就是圓周率乘以半徑的平方，我們用這個公式很多年了，但是其實要學過了積分之後，才會回頭來比較嚴肅地了解原因。且不說過去的人怎麼推論的，但基本上那個推論的過程，就是一個古典的積分過程。

從圓的面積公式，我們可以推論出來扇形的面積公式，然後推論弓形的面積公式。大概我們知道的面積公式就是這些了。那麼積分，就在問一個一般的問題：如果給我一個函數 $y = f(x)$ ， $a \leq x \leq b$ ，這個函數圖形與 x 軸之間所夾的有界區域的面積是什麼？你將來會學到，它又特別被稱為「定積分」，但是我們今天先不探究這個細節。

所以積分 $\int_a^b f(x) dx$ 的意思就是要算出 $y = f(x)$ 從 a 到 b 這一段曲線下跟橫軸之間所圍的面積。曲線 $y = f(x)$ 當然就有各式各樣的可能了，它可以是個半圓，比如 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ，而 $-1 \leq x \leq 1$ ，那麼 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 就是一個以半徑為一的上半圓，從負一到正一做它的定積分，就是半圓的面積；當然乘於 2 就得到了圓的面積。但是還有很多很多以前不能夠算的面積，我們都期望透過積分的算法，把它們的面積算出來。

積分會經過一個所謂「黎曼和」的程序，然後也會出現極限。那個求黎曼和極限的程序，就相當於要把越來越細越來越細的越來越多越來越多的長方形面積加在一起。而從這個想法，同學們就應該要了解為什麼那個極限會寫成定積分。而又為什麼定積分算出來的數，就是一塊面積。面積的數值，不一定會是整數，不一定會是有理數，它甚至於可能是無理數，但是它當然會是一個大於或等於零的數。

$\int_a^b f(x) dx$ 這個符號會是什麼意思呢？在課本上，你會學到「正規」的說法，而我們在這邊要告訴各位同學，一個比較不正規，但是可能比較容易理解的說法。那就是把 dx 想做是一滴滴的 x ，再具體一點，既然它是一滴滴的 x ，我們可以把它想作鉛直線的寬度。過去可能老師都跟說直線是沒有寬度的。就好像你在國中的時候，老師跟你說 $x^2 + 1 = 0$ 是沒有根的，但到了高中就跟你說，有！它可以是虛根。現在，我要說一條鉛直線，注意喔，僅限「鉛直線」，可以有一滴滴的寬度 dx 。我們通常在黑板上畫一條鉛直線，都會跟同學說它是一條線，但是現在要請你把它想作一個矩形。它已經有了一個滴的寬 dx ，很明顯它也有一個高，就是 $f(x)$ ，其中 x 是介於 a 與 b 之間的一個實數。

所以 $\int_a^b f(x) dx$ 的意思就是，把所有介於 a 與 b 之間的小矩形面積都加起來，每個矩形的高是 x 所對應的 $f(x)$ ，而寬是 dx ；看出來 $f(x) dx$ 就是一條很窄的矩形面積。把每一條鉛直線段所造成的一滴滴的面積，全部加在一起，就是總面積了。將來各位同學會學到黎曼和，到時候可以了解，黎曼和其實就是用正規的數學方式推論上述理解。

剛剛我們已經看得出來 \int 就是加在一起的意思，所以我們稱 \int 為積分符號。其實它就是從 S 這個字母變化來的。 S 這個字母又是 summation（加在一起）的意思。各位同學過去也學過一個 summation 符號 Σ ，它也長得很像 S ，而 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 符號指的是離散的數列 a_n ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 加在一起，而 \int_a^b 符號指的是連續的函數值 $f(x)$ ， $a \leq x \leq b$ 加在一起。¹

那麼加在一起以後的單位是什麼呢？就是看 $f(x)$ 和 x 的單位了。一滴滴的 x 就是 x 的單位，而 $f(x)$ 就是 y 的單位，把它們乘在一起，不管把多少同單位的數量加在一起，不會改變單位，所以積分的單位就是 x 的單位乘以 y 的單位。² 將來我們利用單位來思考，也可以幫助我們釐清積分的意義。

¹ 這裡說的「連續」是指自變數 x 連續地從 a 變到 b 。 $f(x)$ 未必是連續函數。

² 別忘了 $y = f(x)$ 。