多項式函數

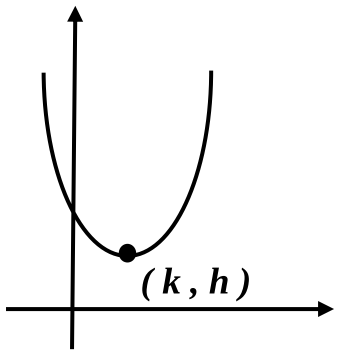
單維彰・2013 年 4 月

之前我們已經知道微積分是一套計算方法，它由微分和積分這兩種觀念和計算問題所組成，而微分和積分透過了微積分基本定理連接在一起，變成了可以互相支援的兩種計算。

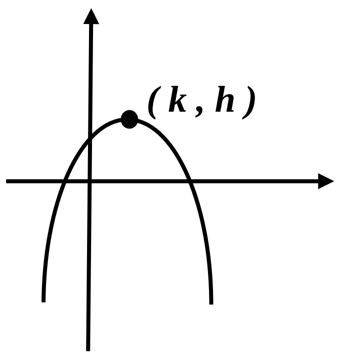
我們簡單地舉一些例子，看看在多項式函數的領域裡面，微分和積分各有些什麼功用。在這小段的教學裡面，主要是要幫助各位同學了解，在國高中所學習關於多項式函數的一些知識和技能，如何與大學微積分銜接。

從國中二年級時學會的配方法開始說起，我們知道，任意的二次多項式#

$a_2x^2 + a_1x + a_0$，其中$a_2 \neq 0$，透過配方可以寫成 $a_2(x-k)^2 + h$ 的樣子。到這裡我們也就曉得，二次函數必有極值。這個道理很簡單，如果 a_2 是正數，則二次函數的圖形就會是一個以 (k,h) 為頂點，開口向上的拋物線，如圖所示。



在圖中我們看到了有一個點發生在這個函數圖形最低的地方，所以這個函數在 $x = k$ 的時候發生最小值，而這個最小值顯然就是那一點的 y 座標，也就是 h 。如果 a_2 是負數，則二次函數的圖形就會是一個以 (k,h) 為頂點，開口向下的拋物線，如圖所示。



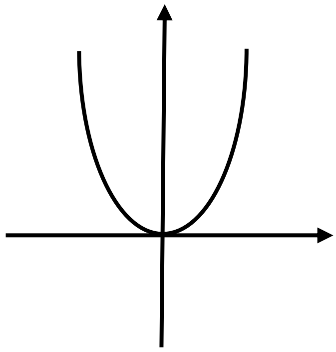
很明顯的，這個點是整個函數圖形的最高點。所以這個函數在 $x = k$ 的時候，發生最大值 h 。

我們對二次多項式函數的圖形跟性質有徹底的了解，其實來自於更簡化的一個觀念，就是：

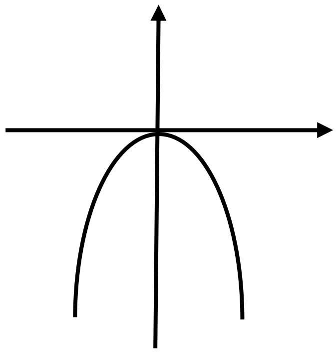
所有的二次函數 $a_2x^2+a_1x+a_0$ 的圖形都是

單項函數 $y=a_2x^2$ 的平移。

單項函數的頂點在原點，開口向上還是向下由首項係數來決定，如圖所示。



$a_2>0$，開口向上



$a_2<0$，開口向下

在高中的時候，我們知道經過配方後寫成的二次函數 $a_2(x-k)^2+h$ ，就是單項函數 a_2x^2 向右平移 k ，向上平移 h 的結果。原則上， a_2 是正或負，代表開口向上或向下，而 $|a_2|$ 的大小，代表了開口的寬或窄，且它一定有極大值或極小值。還有，單項二次函數圖形彎曲的方向是不會改變的。

我們對二次函數有完整的了解，那麼三次函數呢？三次多項式函數一般而言是

$$y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\text{，其中}a_3\neq 0 \quad 。$$

根據以前所知道的三次展開公式

$$(x-k)^3=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3 \quad ，$$

我們發現，如果令 k 滿足 $-3a_3k=a_2$ ，那麼上述的一般式可以寫成

$$y=a_3(x-k)^3+\widehat{a_1}(x-k)+\widehat{a_0} \quad ，$$

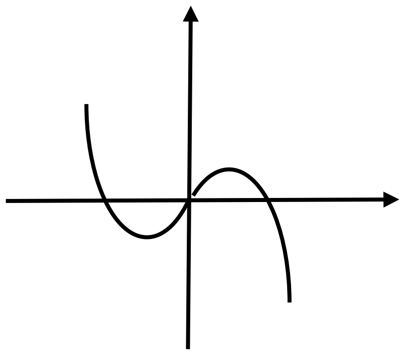
其中二次項就被包含在完全三次方裡，而我們稱符號 $\widehat{\quad}$ 為 hat。

我們可以看到 $y=a_3(x-k)^3+\widehat{a_1}(x-k)+\widehat{a_0}$ 的圖形就是奇函數

$$y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$$

向右平移 k 、向上平移 $\widehat{a_0}$ 的結果。所以從這裡我們可以知道，要了解三次函數的圖形，其實只要了解 $y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$ 這種形式的函數就好了。

那麼$y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$的函數圖形有什麼特色呢？第一點我們要看得出來的是，它是奇函數，而奇函數的圖形都有一個特色，就是對稱於原點，如圖所示。



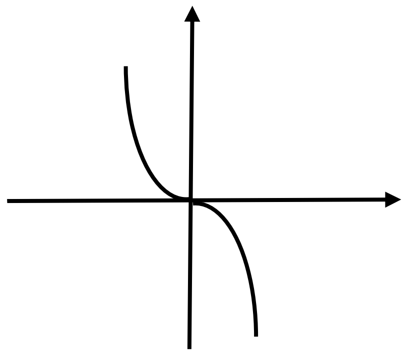


圖 1　　　　　　　　　　　　　　圖 2

相對於二次函數圖形的凹向是永遠不改變的 (永遠凹向上或永遠凹向下) ，從三次函數圖形對稱於原點這件事可以看得出來，像 $y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$ 這樣形式的函數，它永遠會有一個彎曲方向改變的現象，而 0 就是改變彎曲方向的臨界點：在 0 的左邊如果它凹向上，那麼在右邊它就會凹向下，上述兩個例子都為如此。但是當然也有可能，它在 0 的右邊是凹向上的，到了左邊就會凹向下，這是因為要對稱於原點的關係，如圖所示。

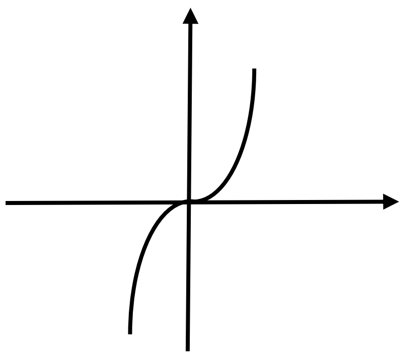


圖 3

圖形中，使凹的方向改變的那一點，我們給它一個新名詞，稱做**反曲點**。所以三次函數和二次函數不一樣的地方是，它一定會有反曲點，使得圖形彎曲的方向一定會改變。

一般的三次函數$y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ，一定可以被寫成奇函數 $y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$ 的一個平移。經過平移之後，原點會被平移到哪裡去呢？我們從式子$y=a_3(x-k)^3+\widehat{a_1}(x-k)+\widehat{a_0}$ 中可以看得出來，它會被平移到 (k , $\widehat{a_0}$) 的位置，也就是說，對一般的三次函數，反曲點一定發生在點 (k , $\widehat{a_0}$) 。

我們知道二次函數一定有最小或最大值，那三次函數會不會有呢？根據上述所說，一般三次多項式函數的圖形，都是奇函數 $y=a_3x^3+\widehat{a_1}x$ 圖形的平移，所以我們現在只要討論這種奇函數即可。從上面圖 1 的圖形來看，有一個極大

值，有一個極小值。但這時要注意的是，它不會像二次函數一樣，如果開口向下，就有最大值，如果開口向上，就有最小值。從三次函數的圖形看，很顯然地，在某一個小範圍的附近，有一個點是最大的，我們稱它為相對極大值，又簡稱為極大值，同樣地也有一個相對極小值，簡稱為極小值。

所以三次函數跟二次函數有兩個不同之處，第一個就是它會有所謂的反曲點，而且我們透過配三方算得出來反曲點發生在哪裡。第二個就是它不一定會有極大值或極小值，像以下圖形，它有兩個極值，一個極大值和一個極小值。

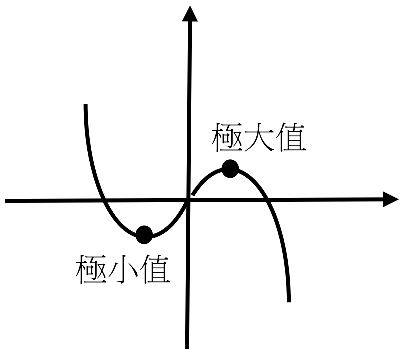
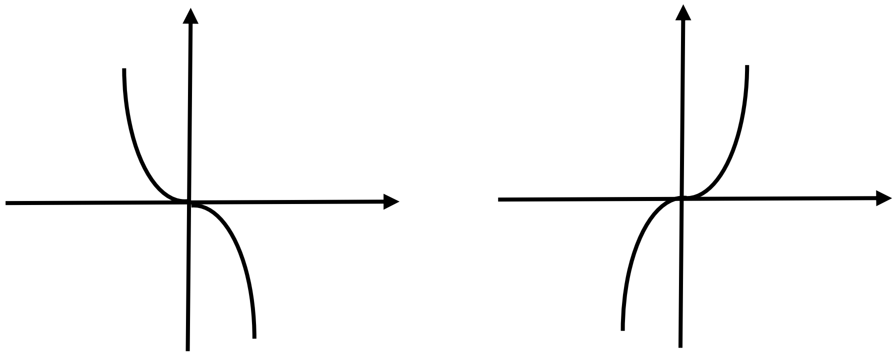


圖 4

但是像以下圖形，它們都沒有極大值或極小值。



而現在的問題就是怎麼樣知道一個三次函數有沒有極大值或極小值呢？如果有的話，那要怎麼樣算出來極大值和極小值呢？接下來如果我們再推廣，以我們對三次函數的認識，那麼四次、五次、六次……任意的一個 n 次多項式函數，會不會也在某些地方有反曲點呢？會不會在某些地方有極大值或極小值呢？如果有的話，怎麼算出來呢？這個就是在十七世紀，牛頓跟萊布尼茲他們想要解決的數學問題之一。這個數學問題在當時的物理和天文學上，是有它的意義和價值的，而現今在金融、經濟學、產銷、成本上，我們需要知道多項式函數的極大值或極小值發生在哪裡，微分可以幫助我們解決這些相關問題。微分學就是從這樣一個問題開始的。