泰勒展開式與升降冪排列

單維彰‧2013 年 4 月

給一個三次多項式函數

$$f(x)=x^3-x^2-x-1$$

若我們要估計 $f(1.97)$ 的函數值準確到百分位，也就是說小數點後兩位的準確程度。還記得我們該怎麼做這個問題嗎？首先，我們要設法把這個多項式函數寫成

$(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$，其中 a、b 為係數，c 為常數

然後把 $x=1.97$ 代入，得到的算式為

$$0.000027+0.0009a-0.03b+c$$

因為我們只要準確到百分位，如果 $|a|$ 不太大，所以 0.000027 和 0.0009 這兩項就可以忽略，那我們只要看 $-0.03b+c$，這就是我們在高一碰到這種問題時的標準答案，而我們可以利用在高一學過的綜合除法算出係數。

在這之前，我們要先知道，上述的多項式 $f(x)=x^3-x^2-x-1$，我們稱為**標準式**，又因其次數從高次寫到低次，故我們又叫做**降冪標準式**。而上述中的 $(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$，它是以 2 為參考點的**泰勒**[1]**形式**。而標準式 $f(x)=x^3-x^2-x-1$ 也可改寫成以 0 為參考點的泰勒形式，即

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-x^2-x-1\\&=(x-0)^3-(x-0)^2-(x-0)+1\end{aligned}$$

所以標準式其實是泰勒形式的一個特殊狀態。

現在我們就來做一些計算，算出 b *和* c 的值，透過除法原理，我們曉得#

$f(x)\div(x-2)=q_1(x)......f(2)$，$q_1(x)$ 為商，$f(2)$ 為餘式。

利用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l}1 & -1 & -1 & -1 & 2\\ & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \to \text{餘式}\end{array}$$

透過餘數定理我們知道餘式 $f(2)=1$，即 $c=1$。所以我們可以將 $f(x)$寫成

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+x+1)(x-2)+1\\&=[q_2(x)(x-2)+q_1(2)](x-2)+1\\&=q_2(x)(x-2)^2+q_1(2)(x-2)+1\end{aligned}$$

[1]泰勒 (Taylor)：英國人，是牛頓的最後一個學生，但並不是泰勒發明了式子，其實是牛頓自己發明了這種形式的多項式寫法。

再做一次除法

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 & 2 & 6 & & \\ \hline
1 & 3 & 7 & \rightarrow \text{餘式} &
\end{array}
$$

我們知道 $q_1(2)=7$ ，$q_2(x)=x+3$。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 & 2 & 6 & & \\ \hline
1 & 3 & 7 & 2 & \\
 & 2 & & & \\ \hline
1 & 5 & \rightarrow \text{餘式} & &
\end{array}
$$

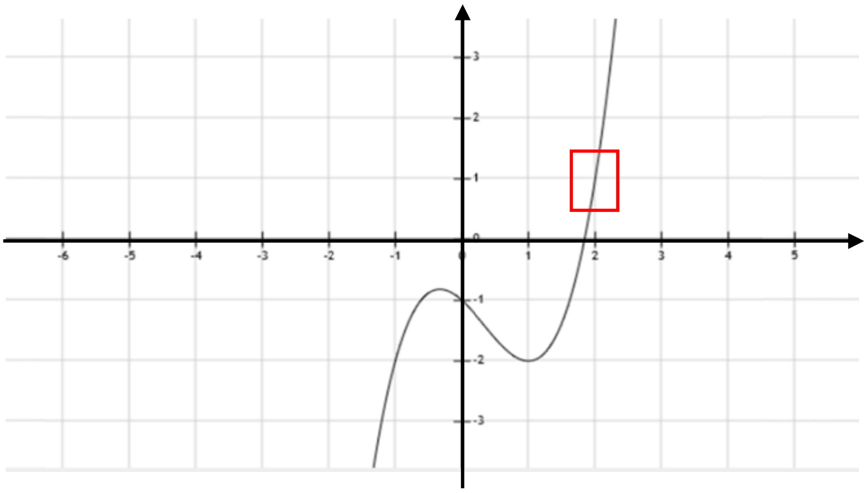
類似地，再做第三次綜合除法，可以得到$q_2(x)=x+3=(x-2)+5$ ，所以

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x+1)(x-2)+1 \\
&= [q_2(x)(x-2)+q_1(2)](x-2)+1 \\
&= q_2(x)(x-2)^2+q_1(2)(x-2)+1 \\
&= (x-2)^3+5(x-2)^2+7(x-2)+1
\end{aligned}
$$

在上述的步驟中，我們把原來的標準式改寫成以 2 為參考點的泰勒形式。

過去我們都習慣用降冪排列，但是還有另外一種排列的方式-升冪排列。將上述式子用升冪排列可寫成 $1+7(x-2)+5(x-2)^2+(x-2)^3$ 。什麼時候我們要用升冪排列呢？回到先前的問題，估計 $f(1.97)$的函數值時，如果不需要算得非常準確，越高的次方是越不重要的。這時我們不妨想像，1 是常數項，是一個小數的整數部分，1 次方項是十分位的部份，2 次方項是百分位的部份，3 次方項是千分位的部份，但是在實用上我們可能只需要取前面的兩位，而越小的小數位，是不需要注意它的。於是升冪排列在把實數寫成小數的形式時是非常實用的。

在計算時，不論 $x=0.97$ 或 $x=1.97$ 或 $x=2.03$，我們要算函數在 $x=2$ 附近的函數值時，可以忽略高次項不算，那麼函數的圖形不也應該是這樣嗎？函數的圖形就是 x 和 $f(x)$ 湊成一個 (x,y) 的有序對，畫在坐標平面上面的結果。既然如此，那麼 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的函數圖形，就是捨去了高次項的函數圖形 $1+7(x-2)$ ，而 $1+7(x-2)$ 這個函數圖形是斜率為 7 的一條直線。



上圖為函數 $y=x^3-x^2-x-1$ 的函數圖形，我們可以算出在 $x=2$ 時，函數值為 1，所以它通過 (2,1) 這個點。根據我們對三次多項式函數圖形的瞭解，我們知道在 $x=2$ 附近，它應該是彎的，是有點凹向上的。但若就我們上述而言，如果我們只看 $x=2$ 附近 (紅框處)，當我們越來越靠近看這個函數圖形時，它就是一條斜率為 7 的直線，因為在 $x=2$ 附近來看函數圖形時，其泰勒形式的平方項、三次方項都不考慮時，剩下的就是一次函數，圖形為一條直線。我們就稱這條直線為**切線**。

將來我們會學到函數可微，那什麼叫做可以微分呢？也就是說，如果這個函數的圖形以某個點為中心的一個很小範圍附近，若它看起來像一條直線，而且它不是鉛直線，我們就會說函數在這一點是可以微分的，而且微分的結果就是切線的斜率。